Índice general

Tema 1

Generalidades. Conjuntos numéricos

La primera parte de este tema está destinada a presentar de forma rigurosa, en la medida de lo posible, los conceptos generales de la Teoría de Conjuntos, así como a establecer la notación y terminología que serán utilizadas posteriormente. A continuación, se describirán los distintos conjuntos numéricos (incluyendo su construcción cuando sea asequible), culminando con el cuerpo de los números reales, ciertamente familiar al menos desde un punto de vista puramente intuitivo.

Partiremos del concepto de *conjunto* en su acepción de *colección de objetos*, sus *elementos*. Es posible formalizar rigurosamente esta noción, pero para nuestros propósitos no es necesario. Admitiremos por tanto la existencia de conjuntos y en particular la existencia de un conjunto, denominado *conjunto vacío* y denotado por $\emptyset$, caracterizado por carecer de elementos.

Supondremos asimismo al lector familiarizado con la terminología y los conceptos básicos tales como *pertenencia* ($\in$) a un conjunto, *inclusión* ($\subset$) de un conjunto en otro, las operaciones de *unión* ($\cup$), *intersección* ($\cap$), *producto cartesiano* ($\times$) y *diferencia* ($\setminus$) de conjuntos, y sus propiedades elementales.

1.1. Relaciones en un conjunto. Conjuntos ordenados

Definición 1.1. Sea A un conjunto no vacío. Una *relación* en A es un subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times A$. Si $a, b \in A$, se dice que a *está relacionado con* b (por la relación $\mathcal{R}$) si el par (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$, y se escribe $a\mathcal{R}b$.

Definición 1.2. Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto no vacío A es de *equivalencia* si verifica las siguientes propiedades:

(i) *Reflexiva*: $a\mathcal{R}a$ para cada $a \in A$.

(ii) *Simétrica*: Si $a, b \in A$ y $a\mathcal{R}b$, entonces $b\mathcal{R}a$.

(iii) *Transitiva*: Si $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$, entonces $a\mathcal{R}c$.

Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A y $a \in A$, el conjunto $C_a = \{b \in A : a\mathcal{R}b\}$ se denomina *clase de equivalencia de* a.

Proposición 1.3. Sean A un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Se verifican:

(i) Si C_a y C_b son dos clases de equivalencia distintas entonces $C_a \cap C_b = \emptyset$.

(ii) Cada $a \in A$ pertenece a una, y sólo una, clase de equivalencia.

La proposición anterior garantiza la consistencia de la siguiente

Definición 1.4. Sea A un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. El conjunto de las clases de equivalencia definidas por dicha relación se denomina *conjunto cociente* de A respecto de $\mathcal{R}$, y se denota por $A/_{\mathcal{R}}$.

Se llama *representante de una clase de equivalencia* $C \in A/_{\mathcal{R}}$ a cualquiera de sus elementos.

Definición 1.5. Se dice que una relación en un conjunto A es *de orden* si verifica las propiedades reflexiva, transitiva y

(ii') *Antisimétrica*: Si $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$, entonces $a = b$.

La relación de orden se dice *total* si dados cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que o bien $a\mathcal{R}b$ o $b\mathcal{R}a$.

Definición 1.6. Se llama *conjunto ordenado* a todo conjunto no vacío dotado de una relación de orden. Si la relación de orden es total se dice que el conjunto está *totalmente ordenado.*

Notación: Para una relación de orden es habitual escribir "$a \leq b$" o "$b \geq a$" en lugar de $a\mathcal{R}b$. Si $a, b \in A$ y se tiene $a \leq b$ y $a \neq b$ se escribe "$a < b$" o "$b > a$".

Definición 1.7. Sea A un conjunto ordenado y $B \subset A$, $B \neq \emptyset$. Se dice que $\beta \in A$ es *cota superior* (resp. *cota inferior*) de B si $b \leq \beta$ (resp. $\beta \leq b$) para cada $b \in B$.

Si $B \subset A$ tiene una cota superior (resp. inferior) se dice que B está *acotado superiormente* (resp. *acotado inferiormente*). Si el conjunto B está acotado superior e inferiormente, se dice que B es *acotado.*

Supongamos que la relación de orden en A es total. Se dice que un subconjunto B acotado superiormente (resp. inferiormente) tiene *extremo superior* o *supremo* (resp. *extremo inferior* o *ínfimo*) si existe una cota superior (resp. inferior) β, denominada el extremo superior (resp. inferior), que verifica la siguiente propiedad:

Si γ es otra cota superior (resp. inferior) de B, se tiene que $\beta \leq \gamma$ (resp. $\gamma \leq \beta$).

Proposición 1.8. Los extremos superior e inferior de un subconjunto B de un conjunto totalmente ordenado, si existen, son únicos.

Notación: Los extremos superior e inferior de un conjunto no vacío B se denotan respectivamente por:

$$\mathrm{sup}B \quad \text{o} \quad \overline{\mathrm{ext}}B \qquad \text{y} \qquad \mathrm{inf}B \quad \text{o} \quad \underline{\mathrm{ext}}B.$$

Si el extremo superior (resp. inferior) de un conjunto B pertenece al mismo, se denomina *máximo* (resp. *mínimo*) de B y se denota por $\max B$ (resp. $\min B$).

Definición 1.9. Sean A un conjunto totalmente ordenado y $a, b \in A$ con $a < b$. Se llama *intervalo de extremos* a *y* b a cualquiera de los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{c \in A : a < c < b\} && \text{(intervalo abierto)},\\
[a,b) &= \{c \in A : a \leq c < b\} && \text{(intervalo semiabierto por la derecha)},\\
(a,b] &= \{c \in A : a < c \leq b\} && \text{(intervalo semiabierto por la izquierda)},\\
[a,b] &= \{c \in A : a \leq c \leq b\} && \text{(intervalo cerrado)}.
\end{aligned}$$

Observación 1.10. Nótese que cada intervalo de extremos a y b es un conjunto acotado, y que a y b son cotas inferior y superior, respectivamente, de dicho conjunto.

1.2. Aplicaciones entre conjuntos

Definición 1.11. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una *correspondencia* de A en B es un subconjunto $\mathcal{C}$ del producto cartesiano $A \times B$. Si el par $(a, b) \in A \times B$ pertenece a $\mathcal{C}$ se dice que b *está en correspondencia* con a, o que b *es imagen* de a por $\mathcal{C}$.

Se dice que una correspondencia $\mathcal{C}$ de A en B es *aplicación* si verifica la siguiente propiedad:

Para cada $a \in A$ existe un, y sólo un, $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{C}$.

Habitualmente una aplicación de A en B se representa por $f\colon A \to B$, y se denota por $b = f(a)$ al único $b \in B$ que es imagen de a. Se llama *rango* de la aplicación f al conjunto

$$\{f(a) : a \in A\} = \{b \in B : \text{ existe } a \in A \text{ con } f(a) = b\} \subset B.$$

Definición 1.12. Una aplicación $f\colon A \to B$ es *inyectiva* si verifica la siguiente propiedad:

Si $a, a' \in A$ y $f(a) = f(a')$, entonces $a = a'$.

En otras palabras, elementos distintos de A han de tener imágenes distintas por f.

Una aplicación $f\colon A \to B$ es *suprayectiva* si verifica la siguiente propiedad:

Si $b \in B$ existe al menos un $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

De otro modo, se trata de que el rango de f sea B.

Una aplicación $f\colon A \to B$ es *biyectiva* si es simultáneamente inyectiva y suprayectiva.

Definición 1.13. Sea $f\colon A \to B$ una biyección entre A y B, y $\mathcal{C}$ la correspondencia que la define. La correspondencia $\mathcal{C}^{-1}$ de B en A definida por:

$$(b, a) \in \mathcal{C}^{-1} \text{ si, y sólo si, } (a, b) \in \mathcal{C}$$

es también una aplicación que se denomina *aplicación inversa* de f, y se denota por $f^{-1}\colon B \to A$.

Definición 1.14. Sean A y B conjuntos no vacíos y $f\colon A \to B$ una aplicación.

Dado $S \subset A$, el conjunto $\{f(a) : a \in S\} = \{b \in B : \text{ existe } a \in S \text{ con } b = f(a)\}$ se denota por $f(S)$, y se denomina *imagen directa* por f del conjunto S.

Dado $T \subset B$, el conjunto $\{a \in A : f(a) \in T\}$ se denota por $f^{-1}(T)$, y se denomina *imagen recíproca* o *imagen inversa* por f del conjunto T.

Proposición 1.15. Sean A y B conjuntos no vacíos, $S, S' \subset A$, $T, T' \subset B$ y $f\colon A \to B$ una aplicación. Se verifican las siguientes propiedades:

(i) $S \neq \emptyset$ si, y sólo si, $f(S) \neq \emptyset$.

(ii) Si $S \subset S'$ entonces $f(S) \subset f(S')$.

(iii) $f(S \cup S') = f(S) \cup f(S')$.

(iv) $f(S \cap S') \subset f(S) \cap f(S')$.

(v) $f^{-1}(B \setminus T) = A \setminus f^{-1}(T)$, donde, si X e Y son conjuntos, $X \setminus Y$ denota el *conjunto diferencia* "X menos Y", definido por $\{x \in X : x \notin Y\}$.

(vi) Si $T \subset T'$ entonces $f^{-1}(T) \subset f^{-1}(T')$.

(vii) $f^{-1}(T \cup T') = f^{-1}(T) \cup f^{-1}(T')$.

(viii) $f^{-1}(T \cap T') = f^{-1}(T) \cap f^{-1}(T')$.

Definición 1.16. Sean A, B, C conjuntos no vacíos y $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ aplicaciones. Se define la *aplicación compuesta de f con g*, denotada por $g \circ f\colon A \to C$, como sigue:

Si $a \in A$, $b = f(a)$ y $c = g(b)$, entonces se define $g \circ f(a) := g(f(a)) = g(b) = c$.

Notación: En ocasiones, como se ha hecho en la definición anterior, para recalcar que mediante una determinada igualdad se está definiendo el término a la izquierda como el valor indicado a la derecha del símbolo de igualdad, se sustituye dicho símbolo "=" por ":=".

Proposición 1.17. Sean A, B, C conjuntos no vacíos y $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ aplicaciones.

(i) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(ii) Si f y g son suprayectivas entonces $g \circ f$ es suprayectiva.

(iii) Si $S \subset A$ entonces $g \circ f(S) = g\big(f(S)\big)$.

(iv) Si $T \subset C$ entonces $(g \circ f)^{-1}(T) = f^{-1}\big(g^{-1}(T)\big)$.

1.3. Operaciones. Estructuras algebraicas

Definición 1.18. Sea A un conjunto no vacío. Una *operación* o *ley de composición interna* en A es una aplicación $*\colon A \times A \to A$. Si $a, b \in A$ se denota habitualmente por $a * b$ a la imagen de (a, b).

Se dice que la operación:

(i) es *asociativa* si para cualesquiera $a, b, c \in A$ se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(ii) es *conmutativa* si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que $a * b = b * a$.

(iii) tiene *elemento neutro* si existe $e \in A$ (el elemento neutro) tal que para cada $a \in A$ se tiene que $a * e = e * a = a$.

Se dice que $a \in A$ tiene *elemento simétrico* respecto de la operación $*$ si existe $b \in A$ (elemento simétrico de a) tal que $a * b = b * a = e$.

Si $*, \perp$ son dos operaciones en el conjunto A se dice que $\perp$ es *distributiva* respecto de $*$ si para cualesquiera $a, b, c \in A$ se verifica

$$a \perp (b * c) = (a \perp b) * (a \perp c) \quad \text{y} \quad (b * c) \perp a = (b \perp a) * (c \perp a).$$

Observación 1.19. Cuando la operación es aditiva se suele denotar por 0 al elemento neutro. Se llama *elemento opuesto* de a al elemento simétrico de a, y se denota por $-a$.

Si la operación es multiplicativa el elemento neutro se denomina *elemento unidad* y se suele denotar por 1. El elemento simétrico de a se denomina habitualmente *elemento inverso* y se denota por a^{-1} o $1/a$.

Definición 1.20. Un *semigrupo* es un par $(S, *)$ donde S es un conjunto no vacío y $*$ es una operación en S que satisface la propiedad asociativa. Si además verifica la propiedad conmutativa el semigrupo se dice *conmutativo* o *abeliano*.

Un *grupo* es un par $(G, *)$ donde G es un conjunto no vacío y $*$ es una operación en G que satisface la propiedad asociativa, tiene elemento neutro y cada elemento tiene un simétrico. Si además verifica la propiedad conmutativa el grupo se dice *conmutativo* o *abeliano*.

Definición 1.21. Un *anillo* es una terna $(A, *, \perp)$ donde A es un conjunto no vacío, $*$ es una operación en A para la que $(A, *)$ es un grupo abeliano y $\perp$ es una operación en A distributiva respecto de $*$ y para la que $(A, \perp)$ es semigrupo. Si además $\perp$ verifica la propiedad conmutativa el anillo se dice *conmutativo* o *abeliano*, y si $\perp$ tiene elemento neutro el anillo se dice *unitario*.

Definición 1.22. Un *cuerpo* es una terna $(K, *, \perp)$ donde K es un conjunto no vacío, $*$ es una operación en K para la que $(K, *)$ es un grupo abeliano y $\perp$ es una operación en K distributiva respecto de $*$ y tal que si e es elemento neutro de $*$, entonces $(K \setminus \{e\}, \perp)$ es grupo. Si además $\perp$ verifica la propiedad conmutativa el cuerpo se dice *conmutativo* o *abeliano*.

1.4. Números naturales. Principio de inducción

Definición 1.23. Un *conjunto naturalmente ordenado* es un par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación de orden total que verifica los siguientes axiomas:

N1: Existe $p \in X$ tal que $p \leq x$ para cada $x \in X$. p se denomina *primer elemento* de X. (El primer elemento es único).

N2: Si $x \in X$ existe $x' \in X$ tal que:
(i) $x < x'$.
(ii) Si $x < y$ entonces $x' \leq y$.
x' se denomina *sucesor* de x. (El sucesor de x es único).

N3: Si S es un subconjunto de X que verifica:
(i) $p \in S$, y
(ii) $x' \in S$ para cada $x \in S$,
entonces $S = X$.

Nota: Aunque es posible probar la existencia de conjuntos naturalmente ordenados nosotros simplemente admitiremos la existencia de los mismos.

Proposición 1.24. Sean X e Y dos conjuntos naturalmente ordenados. Existe una aplicación $\Phi\colon X \to Y$ que es isomorfismo de orden, es decir:
(i) Φ es biyectiva.
(ii) Φ conserva el orden: Si $x, y \in X$ con $x < y$, entonces $\Phi(x) < \Phi(y)$.

Observación 1.25. Si Φ es isomorfismo de orden entre X e Y se tiene que:
(i) La imagen del primer elemento de X es el primer elemento de Y.
(ii) Si x' es el sucesor de x entonces $\Phi(x')$ es el sucesor de $\Phi(x)$.

El resultado anterior garantiza la consistencia de la siguiente definición.

Definición 1.26. Se llama *conjunto de los números naturales*, y se denota por $\mathbb{N}$, a cualquier conjunto naturalmente ordenado. Sus elementos se denominan *números naturales*.

Notación: Como es bien sabido los elementos de $\mathbb{N}$ se denotan habitualmente por *1,2,3,4,...*, es decir, 1 es el primer elemento, 2 el sucesor de 1, etc., y si $n \in \mathbb{N}$ se denota al sucesor de n por $n+1$.

El axioma N3 proporciona una herramienta muy útil de razonamiento.

Proposición 1.27 (Principio de inducción). Sea $\mathcal{P}$ una proposición enunciada para los números naturales. Denotemos por $\mathcal{P}(n)$ a la proposición relativa a $n \in \mathbb{N}$. Se supone que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

(i) $\mathcal{P}(n_0)$ es cierta.

(ii) Si $m \geq n_0$ y $\mathcal{P}(m)$ es cierta, entonces $\mathcal{P}(m+1)$ es cierta.

Entonces $\mathcal{P}(n)$ es cierta para cada $n \geq n_0$. En particular, si $n_0 = 1$ resulta que $\mathcal{P}(n)$ es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.28 (Principio de inducción completa). Sea $\mathcal{P}$ una proposición enunciada para los números naturales. Denotemos por $\mathcal{P}(n)$ a la proposición relativa a $n \in \mathbb{N}$. Se supone que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

(i) $\mathcal{P}(n_0)$ es cierta.

(ii) Si $m \geq n_0$ y $\mathcal{P}(k)$ es cierta para cada k con $n_0 \leq k \leq m$, entonces $\mathcal{P}(m+1)$ es cierta.

Entonces $\mathcal{P}(n)$ es cierta para cada $n \geq n_0$. En particular, si $n_0 = 1$ resulta que $\mathcal{P}(n)$ es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.29. Se dice que un conjunto A es *finito*, o que tiene *cardinal finito*, si es vacío o existe una biyección $f\colon A \to J_n$, donde J_n denota el conjunto $J_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. En este último caso se dice que A tiene cardinal n o que tiene n elementos.

Se dice que un conjunto es *infinito*, o que tiene *cardinal infinito*, si no es finito.

Definición 1.30 (Operaciones en $\mathbb{N}$). En el conjunto $\mathbb{N}$ se definen dos operaciones, denominadas *suma* y *producto* y denotadas por $+$ y $\cdot$, respectivamente, como sigue:

(i) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sean A, B dos conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) con cardinal n y m, respectivamente. Se define $n+m$ como el cardinal del conjunto $A \cup B$.

(ii) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sean A, B dos conjuntos con cardinal n y m, respectivamente. Se define $n \cdot m$ como el cardinal del conjunto $A \times B$.

Observación 1.31. Las operaciones así definidas tienen las propiedades conmutativa y asociativa, y el producto tiene la propiedad distributiva respecto de la suma. Ello se deduce de las propiedades de la unión y del producto cartesiano de conjuntos.

Observación 1.32. Si consideramos el subconjunto $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$ de los números naturales pares, dicho conjunto es también un conjunto naturalmente ordenado; 2 es el primer elemento, 4 el sucesor de 2, etc. El isomorfismo de orden viene dado en este caso por:

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathbb{N} &\to 2\mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

Lo mismo sucede con el subconjunto $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} : n > k\} = \{k+1, k+2, k+3, \dots\}$; en este caso el primer elemento es $k+1$ y el isomorfismo de orden es:

$$\begin{aligned} \Psi\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N}_k \\ m &\mapsto k+m \end{aligned}$$

Observación 1.33. En ocasiones los elementos de un conjunto X se asocian de forma biunívoca con los de otro conjunto I mediante una biyección φ de I en X, y para determinar un elemento $x \in X$ se hace referencia al único elemento $i \in I$ asociado con él, es decir, tal que $\varphi(i) = x$; en este caso dicho elemento x se escribe 'x_i', y los elementos de I se denominan *índices* (el conjunto I se denomina, por tanto, *conjunto de índices*), se dice que X está *indizado* o *indexado* por I, y se denota por

$$X = \{x_i : i \in I\} \qquad \text{o} \qquad X = \{x_i\}_{i \in I}\,.$$

Otra notación similar a la anterior para elementos indizados es 'x^i'; para diferenciar ambos casos es habitual referirse a *subíndices* y *superíndices*, respectivamente.

Notación: Es común el uso de la siguiente notación abreviada:

(i) Supongamos que en un conjunto A se tiene definida una operación suma $+$ con la propiedad conmutativa, es decir, tal que para todos $a, b \in A$ se tiene que $a+b = b+a$. Sea $\{a_i : i \in I\}$ un conjunto o familia finita de elementos de A, su suma se representa por '$\sum_{i\in I} a_i$', y se lee 'suma o *sumatorio* de a_i cuando $i \in I$'. Es habitual que el conjunto de índices sea $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, en cuyo caso la suma de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se escribe también

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{o} \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

También puede suceder que los elementos a sumar sean los que verifiquen una cierta propiedad $\mathcal{P}$, en cuyo caso su suma se representa por '$\sum_{a \,\text{verifica}\, \mathcal{P}} a$'.

(ii) Si en un conjunto A se dispone de un producto conmutativo '$\times$', y $\{a_i : i \in I\}$ es una familia finita de elementos de A, su producto se representa por '$\prod_{i\in I} a_i$'. Si el conjunto de índices es J_n el producto de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se escribe también

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{o} \qquad a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n \qquad \text{o} \qquad a_1\, a_2 \cdots a_n\,.$$

Como en el caso de sumas, la expresión '$\prod_{a \,\text{verifica}\, \mathcal{P}} a$' denota el producto de los elementos que verifican la propiedad $\mathcal{P}$.

1.5. El anillo de los números enteros

Las operaciones definidas en $\mathbb{N}$ no gozan de todas las propiedades que cabría esperar.

En primer lugar la suma carece de elemento neutro; para subsanar esta deficiencia se amplía el conjunto $\mathbb{N}$ a un conjunto más grande ($\mathbb{Z}$), con operaciones que restringidas a aquél coinciden con las ya definidas. A continuación desarrollamos brevemente esta construcción:

Se considera el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y se define en él la relación $\mathcal{R}$ dada por:
"$(n_1, m_1)\mathcal{R}(n_2, m_2)$ si, y sólo si, $n_1 + m_2 = m_1 + n_2$".

Se comprueba sin dificultad que esta relación es de equivalencia.

Definición 1.34. Se denota por $\mathbb{Z}$ al conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\mathcal{R}}$, denominado *conjunto de los números enteros*. Sus elementos se denominan *números enteros*.

Definición 1.35 (Operaciones en $\mathbb{Z}$)**.** En $\mathbb{Z}$ se definen dos operaciones, suma "$+$" y producto "$\cdot$" como sigue:

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ y sean $(n_1, m_1), (n_2, m_2)$ representantes de p y q, respectivamente.

(i) Se define el número entero $p + q$ como la clase de equivalencia de $(n_1 + n_2, m_1 + m_2)$.

(ii) Se define el número entero $p \cdot q$ (o simplemente pq) como la clase de equivalencia de $(n_1n_2 + m_1m_2, n_1m_2 + m_1n_2)$.

Se comprueba fácilmente que estas definiciones son consistentes, es decir, no dependen de los representantes elegidos.

Proposición 1.36. $(\mathbb{Z}, +)$ tiene estructura de grupo conmutativo.

Si 0 denota la clase de (n, n), 0 es el elemento neutro de la suma. Si $p \in \mathbb{Z}$ viene representado por $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $-p$ denota la clase de (m, n), entonces $-p$ es el elemento opuesto de p.

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ tiene estructura de semigrupo conmutativo con elemento unidad.

Si 1 denota la clase de $(n+1, n)$ se tiene que $p \cdot 1 = p$ para cada $p \in \mathbb{Z}$, es decir, 1 es el elemento unidad.

El producto en $\mathbb{Z}$ tiene la propiedad distributiva respecto de la suma.

En conclusión, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario.

Definición 1.37 (Orden en $\mathbb{Z}$)**.** En el conjunto de los números enteros se tiene definida una relación de orden "$\leq$" de la siguiente forma:

Si $p, q \in \mathbb{Z}$ se dice que $p \leq q$ si, y sólo si, $n_1 + m_2 \leq m_1 + n_2$, donde (n_1, m_1) y (n_2, m_2) son sendos representantes de p y q, respectivamente.

La definición es consistente.

Proposición 1.38. $(\mathbb{Z}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. La relación de orden es *compatible con la estructura algebraica*, esto es, verifica:
(i) Si $p, q, r \in \mathbb{Z}$ y $p \leq q$, entonces $p + r \leq q + r$.
(ii) Si $p, q, r \in \mathbb{Z}$ y $p \leq q$, $r \geq 0$, entonces $p \cdot r \leq q \cdot r$.

Observación 1.39. Notemos por último que si se identifica cada número natural n con la clase de equivalencia de $(n+1, 1)$ entonces $\mathbb{N}$ se identifica (mediante una biyección $n \mapsto \varphi(n) = C_{(n+1,1)}$) con el subconjunto de $\mathbb{Z}$: $\varphi(\mathbb{N}) = \{p \in \mathbb{Z} : p > 0\}$. Las operaciones y la relación de orden coinciden, al ser restringidas a $\varphi(\mathbb{N})$, con las definidas en $\mathbb{N}$.

1.6. El cuerpo de los números racionales

Los números enteros carecen (excepto 1 y -1) de elemento inverso para el producto. Para paliar esta carencia vamos a ampliar este conjunto, manteniendo las operaciones y el orden.

En el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por: $(p_1, n_1)\mathcal{R}(p_2, n_2)$ si, y sólo si, $p_1 n_2 = p_2 n_1$.

Esta relación resulta ser de equivalencia.

Definición 1.40. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los *Números Racionales* es el conjunto cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/_{\mathcal{R}}$. Sus elementos son los *números racionales*.

Notación: Se suele representar por $p/_n$ al número racional $C_{(p,n)}$.

Definición 1.41 (Operaciones y orden en $\mathbb{Q}$)**.** En $\mathbb{Q}$ se tienen definidas dos operaciones, suma "$+$" y producto "$\cdot$", y una relación de orden, $\leq$, como sigue:

Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ y sean $(p_1, n_1), (p_2, n_2)$ representantes de r y s, respectivamente.

(i) El número racional $r + s$ es la clase de equivalencia del par $(p_1 n_2 + p_2 n_1, n_1 n_2)$.

(ii) Se define el número racional $r \cdot s$ (o $r\,s$) como la clase de equivalencia de $(p_1 p_2, n_1 n_2)$.

(iii) Se dice que $r \leq s$ si, y sólo si, $p_1 n_2 \leq p_2 n_1$.

Es sencillo probar que estas definiciones son consistentes.

Proposición 1.42. $(\mathbb{Q}, +)$ tiene estructura de grupo conmutativo.

Si 0 denota la clase de $(0, n)$ resulta $r + 0 = r$ para cada $r \in \mathbb{Q}$, es decir, 0 es el elemento neutro de la suma. Si $r \in \mathbb{Q}$ viene representado por $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ y $-r$ denota la clase de $(-p, n)$, entonces $r + (-r) = 0$.

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ tiene estructura de grupo conmutativo.

Si 1 denota la clase de $(n, n), n \in \mathbb{N}$, se tiene $r \cdot 1 = r$ para cada $r \in \mathbb{Q}$, es decir, 1 es el elemento unidad. Si $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, está representado por (p, n) y r^{-1} denota la clase de $(p\,n, p\,p)$ (obsérvese que $p^2 = p\,p > 0$, es decir, $p^2 \in \mathbb{N}$), entonces $r\,r^{-1} = 1$.

El producto en $\mathbb{Q}$ es distributivo respecto de la suma. Por todo lo antedicho, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo.

$(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, y la relación de orden es compatible con la estructura algebraica, es decir, verifica:
(i) Si $r, s, t \in \mathbb{Q}$ y $r \leq s$, entonces $r + t \leq s + t$.
(ii) Si $r, s, t \in \mathbb{Q}$ y $r \leq s$, $t \geq 0$, entonces $r\,t \leq s\,t$.

Observación 1.43. Si se identifica cada número entero p con la clase de equivalencia de $(p, 1)$, entonces $\mathbb{Z}$ es isomorfo algebraicamente y en orden a un subconjunto $\psi(\mathbb{Z})$ de $\mathbb{Q}$, es decir: las operaciones y la relación de orden coinciden, al ser restringidas a $\psi(\mathbb{Z})$, con las definidas en $\mathbb{Z}$. A partir de ahora consideraremos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ como subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

Proposición 1.44 (Propiedad arquimediana)**.** Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ con $s > 0$. Existe entonces un número natural n tal que $n\,s > r$.

Proposición 1.45 (Propiedad de densidad)**.** Sean $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Existe entonces un número racional t tal que $r < t < s$.

En consecuencia, entre dos números racionales distintos existen infinitos racionales.

Se introducen ahora los números factoriales y los combinatorios, posiblemente ya familiares para el lector, y que aparecen constantemente en los cálculos y fórmulas más comunes.

Definición 1.46 (**Factoriales. Números combinatorios**)**.** Para un número entero no negativo n se define su *factorial*, denotado por '$n!$', mediante la fórmula recurrente

$$0! = 1\,; \qquad n! = n\,(n-1)!\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$0! = 1\,; \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Si k y n son números enteros, con $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, se define el *número combinatorio* denominado n *sobre* k, y denotado por '$\binom{n}{k}$' o 'C_n^k', como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\;k!}\,.$$

En realidad los números combinatorios son números naturales y verifican

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \qquad 0 \leq k \leq n\,, \tag{1.1}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\,, \qquad 1 \leq k \leq n\,, \tag{1.2}$$

propiedades que se pide probar en el ejercicio 1.3 y que se suelen representar en el llamado *triángulo de Pascal* o *de Tartaglia*:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
n=0 & \longrightarrow & & & & & & & \mathbf{1} & & & & & & \\
n=1 & \longrightarrow & & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & \\
n=2 & \longrightarrow & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & \\
n=3 & \longrightarrow & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & \\
n=4 & \longrightarrow & & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & \\
n=5 & \longrightarrow & & \mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} & \\
n=6 & \longrightarrow & \mathbf{1} & & \mathbf{6} & & \mathbf{15} & & \mathbf{20} & & \mathbf{15} & & \mathbf{6} & & \mathbf{1} \\
\ldots & & & & & & & & \ldots & & & & & &
\end{array}$$

Cada fila del triángulo recoge para un número entero $n \geq 0$ los valores $\binom{n}{k}$ al variar k desde 0 a n. La simetría se debe a la propiedad (1.1). Por otra parte, cada número, exceptuando los que ocupan las posiciones extremas de cada fila, es la suma de los dos que figuran en la fila anterior a su izquierda y derecha, como indica la propiedad (1.2).

1.7. La recta real

Aunque las operaciones dadas en $\mathbb{Q}$ gozan de buenas propiedades, el conjunto resulta ser "incompleto" en el sentido que ilustramos a continuación con un ejemplo clásico:

(i) No existe ningún número racional r tal que $r^2 = 2$.

(ii) El conjunto $\{s \in \mathbb{Q} : s^2 \leq 2\}$ es un conjunto acotado superiormente que no tiene extremo superior.

El concepto de número real surge de la necesidad de salvar esta incompletitud. Es posible construir el conjunto de los números reales de diversas formas: mediante sucesiones monótonas de números racionales, y en particular mediante números decimales; por el método de las cortaduras, etc. En cualquiera de estos casos el procedimiento no es complicado, pero sí muy laborioso. Es por esta razón que nos limitamos a presentar de forma axiomática este conjunto.

Definición 1.47. Se llama *recta real*, o *conjunto de los números reales*, a todo conjunto no vacío, $\mathbb{R}$, provisto de dos operaciones, "+" y "·" denominadas suma y producto, respectivamente, y una relación de orden "$\leq$"que cumplen los siguientes axiomas:

(i) $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo conmutativo, es decir:
S1: Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifica $(x + y) + z = x + (y + z)$.
S2: Para cada $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica $x + y = y + x$.
S3: Existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado por 0 tal que $x + 0 = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
S4: Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + -x = 0$.

(ii) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo, es decir:
P1: Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifica $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
P2: Para cada $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica $x \cdot y = y \cdot x$.
P3: Existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado por 1 tal que $x \cdot 1 = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
P4: Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existe un elemento $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

(iii) El producto es distributivo respecto de la suma:
D: Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifica $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
(Los apartados (i), (ii) y (iii) se resumen afirmando que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.)

(iv) La relación de orden es total y compatible con la estructura algebraica:
O1: Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.
O2: Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$.
O3: Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ y $0 \leq z$ entonces $x \cdot z \leq y \cdot z$.

(v) **Axioma de Completitud**
C: Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y acotado superiormente tiene extremo superior.

Teorema 1.48. La recta real es única salvo isomorfismos, es decir, si dos conjuntos con sus respectivas operaciones y relaciones de orden verifican los trece axiomas anteriores, entonces existe una biyección entre ambos que respeta las operaciones y el orden.

Definición 1.49. Los elementos de $\mathbb{R}$ se denominan *números reales*. Se dice que un número real x es *positivo* si $x > 0$, y *negativo* si $x < 0$.

Propiedades 1.50. En lo que sigue w, x, y, z serán números reales. Las siguientes propiedades se deducen de los trece axiomas.

(i) Si $x + z = y + z$ entonces $x = y$ (*Ley de cancelación de la suma*).

(ii) Si $x \cdot z = y \cdot z$ y $z \neq 0$ entonces $x = y$ (*Ley de cancelación del producto*).

(iii) $x \cdot 0 = 0$.

(iv) $-(-x) = x$.

(v) Si $x \neq 0$ entonces $(x^{-1})^{-1} = x$.

(vi) $(-1) \cdot x = -x$.

(vii) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.

(viii) $(-x) + (-y) = -(x + y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

(ix) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(x) Si $z \neq 0$ y $w \neq 0$ entonces $\dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{w} = \dfrac{x \cdot w + y \cdot z}{z \cdot w}$.

(xi) Si $x \leq y$ e $y < z$ entonces $x < z$.

(xii) Si $x < y$ e $y \leq z$ entonces $x < z$.

(xiii) Si $x + z < y + z$ entonces $x < y$.

(xiv) Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$.

(xv) Si $x \leq y$ y $z \leq w$ entonces $x + z \leq y + w$.

(xvi) Si $x \leq y$ y $z < w$ entonces $x + z < y + w$.

(xvii) $x > 0$ si, y sólo si, $-x < 0$.

(xviii) Si $x < y$ entonces $-x > -y$.

(xix) Si $x < y$ y $z > 0$ entonces $x \cdot z < y \cdot z$.

(xx) Si $x < y$ y $z < 0$ entonces $x \cdot z > y \cdot z$.

(xxi) Si $x \neq 0$ entonces $x^2 = x \cdot x > 0$.

(xxii) $1 > 0$ y $-1 < 0$.

(xxiii) Si $x > 0$ entonces ${}^1\!/_x > 0$.

(xxiv) Si $0 < x < y$ entonces $0 < {}^1\!/_y < {}^1\!/_x$.

(xxv) **Axioma de Completitud:**
C': Todo subconjunto de la recta real no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior.

Observación 1.51. Si se identifican el elemento neutro y el elemento unidad de $\mathbb{Q}$ con los correspondientes de $\mathbb{R}$, cada número entero $n > 0$ con el número real $\varphi(n) = 1 + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + 1$, cada número entero $p < 0$ con el número real $-\varphi(-p)$, y por último cada número racional ${}^p\!/_n$ con el número real $\varphi(p) \cdot \varphi(n)^{-1}$, se obtiene una aplicación $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tal que al considerar en $\mathbb{Q}^* = \varphi(\mathbb{Q})$ la restricción de las operaciones y el orden en $\mathbb{R}$ se tiene:

(i) $\mathbb{Q}^*$ es un subcuerpo de $\mathbb{R}$.

(ii) $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^*$ es biyección.

(iii) φ es homomorfismo de cuerpos, es decir, para cada $r, s \in \mathbb{Q}$ se tiene que

$$\varphi(r+s) = \varphi(r) + \varphi(s) \qquad \text{y} \qquad \varphi(r \cdot s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s).$$

(iv) φ es isomorfismo de orden, es decir, si $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r \leq s$ entonces $\varphi(r) \leq \varphi(s)$.

Podemos considerar pues $\mathbb{Q}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$, con lo que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Proposición 1.52 (Propiedad arquimediana en $\mathbb{R}$). Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, existe entonces un número natural n tal que $n\,x > y$.

En particular (tomando $y = 1$), para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n tal que

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Proposición 1.53 (Parte entera de un número real). Si $x \in \mathbb{R}$ existe un único $m \in \mathbb{Z}$ que verifica

$$m \leq x < m + 1.$$

Dicho número entero se denomina *parte entera* de x y se denota por $[x]$ o $\lfloor x \rfloor$.

Proposición 1.54 (Propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Existe entonces un número racional r tal que

$$x < r < y.$$

Por tanto, entre dos números reales distintos existen infinitos números racionales.

Existen números reales que no son racionales, es decir $\mathbb{R}$ es realmente una extensión propia de $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$ está acotado superiormente y su extremo superior no es un número racional.

Definición 1.55. El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se denomina *conjunto de los números irracionales* y se denota por $\mathbb{I}$.

Proposición 1.56 (Propiedad de densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$). Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Existe entonces un número irracional γ tal que

$$x < \gamma < y.$$

Por tanto, entre dos números reales distintos existen infinitos números irracionales.

Si, como es habitual, se representan gráficamente los números enteros dispuestos en una línea, manteniendo su orden de forma creciente de izquierda a derecha, y de manera que dos cualesquiera que sean consecutivos mantengan una distancia fija, los números racionales (no enteros) ocupan en dicha línea lugares intermedios, pero no la llenan; los "poros" que quedan (fruto de la incompletitud de $\mathbb{Q}$) corresponden precisamente a los lugares que ocupan los números irracionales. Esta idea es la que justifica el nombre de recta real y que sus elementos se denominen también *puntos*.

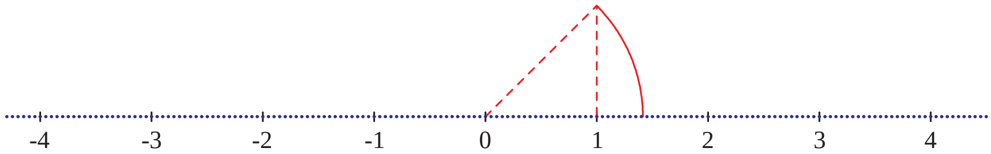

Figura 1.1: La recta real y alguno de sus puntos.

La figura 1.1 pretende ilustrar el comentario anterior. Además se ha representado el número irracional $\sqrt{2}$ que, según el famoso teorema de Pitágoras, es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos dos catetos tienen longitud 1; el traslado de esta hipotenusa a la 'recta real' se representa con el arco de circunferencia. El número $\sqrt{2}$ es constructible con regla y compás, y lo mismo sucede con los números racionales en virtud del no menos conocido teorema de Tales sobre semejanza de triángulos.

Definición 1.57 (Intervalos de la recta)**.** Se dice que un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un *intervalo* si verifica la siguiente propiedad:

Si $x, y \in I$, con $x < y$, entonces para cada $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$ se tiene que $z \in I$.

En otras palabras, un intervalo I se caracteriza por contener a todos los puntos intermedios entre dos cualesquiera de sus elementos.

Observación 1.58. Esta nueva noción de intervalo generaliza la que se dio en la definición 1.9, pues todo conjunto que sea un intervalo según aquella definición lo es según esta otra; sin embargo, ahora se considera una clase más amplia de conjuntos. Obsérvese que los conjuntos unipuntuales $\{x\}$ son intervalos *reducidos a un punto*. También son intervalos los conjuntos no acotados de la forma

$$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$

para algún $a \in \mathbb{R}$, que se denotan, respectivamente, por

$$(a, \infty), \qquad [a, \infty), \qquad (-\infty, a), \qquad (-\infty, a],$$

así como la recta real, representada por $(-\infty, \infty)$. El símbolo '∞' se lee *infinito*. Nos volveremos a encontrar con este símbolo en numerosas ocasiones que aclararán más su significado.

Definición 1.59 (Valor absoluto de un número real)**.** Si $x \in \mathbb{R}$ se define el *valor absoluto* de x, denotado por $|x|$, como el número real

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propiedades 1.60. Sean $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Se verifican:

(i) $|x| \geq 0$. Además, $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

(ii) $-|x| \leq x \leq |x|$.

(iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(iv) Si $x \neq 0$ entonces $\left|{}^{1}\!/_{x}\right| = {}^{1}\!/_{|x|}$.

(v) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Desigualdad Triangular*).

(vi) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

(vii) $|x| < \varepsilon$ si, y sólo si, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(viii) $|x-y|<\varepsilon$ si, y sólo si, $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$.

Mediante el valor absoluto es posible dar una nueva caracterización de los conjuntos acotados, que admite generalización a los espacios euclídeos.

Proposición 1.61. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. A es acotado si, y sólo si, existe $M\geq 0$ tal que $|x|\leq M$ para cada $x\in A$.

Observación 1.62. La propiedad de completitud es la clave para la construcción de las funciones elementales, cuya existencia se admite habitualmente de forma puramente intuitiva. Ilustraremos esto con un esbozo de la construcción de la función potencial (o exponencial). Una vez definidas las potencias de exponente entero en la forma usual, se pueden resumir las subsiguientes etapas como:

(i) Sean $a\in\mathbb{R}$, $a>1$ y $n\in\mathbb{N}$. Existe un único $b\in\mathbb{R}$, $b>1$ tal que $b^n=a$. En efecto, el conjunto $\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0, x^n\leq a\}$ está acotado superiormente. Se prueba sin dificultad que si b es su extremo superior entonces debe ser $b^n=a$.

(ii) Sean $a\in\mathbb{R}$, $0\leq a\leq 1$ y $n\in\mathbb{N}$. Existe un único $b\in\mathbb{R}$, $b>0$ tal que $b^n=a$. De hecho, si $a=0$ ó $a=1$ es obvio. En otro caso el número $1/a$ es mayor que 1, y por (i) existe un único $b'\in\mathbb{R}$ tal que $(b')^n=1/a$. El número $b=1/b'$ resuelve la cuestión.

En los dos casos anteriores se dice que b es la única raíz n-ésima positiva de a y se escribe $b=\sqrt[n]{a}$ ó $b=a^{\frac{1}{n}}$.

(iii) Sean $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ y $r\in\mathbb{Q}$, $r>0$. Si p/n es un representante de r ($p>0$, $n\in\mathbb{N}$), el número $b=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$ no depende del representante elegido para r. Esto da sentido a la siguiente definición:
Sean $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ y $r\in\mathbb{Q}$. Si p/n es un representante de r ($n>0$) se define el número a^r por:

$$a^r=\begin{cases}\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p, & \text{si } r>0;\\ 1, & \text{si } r=0;\\ \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-p}\right)^{-1}, & \text{si } r<0.\end{cases}$$

En este caso de exponente racional, las conocidas propiedades de la potenciación se deducen fácilmente a partir de la definición.

(iv) Sean $a\in\mathbb{R}$, $a>1$ y $x\in\mathbb{R}$. El conjunto $\{a^r: r\in\mathbb{Q}, r\leq x\}$ está acotado superiormente. Denotaremos a su extremo superior por a^x. Entonces, para $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ y $x\in\mathbb{R}$, se define el número real a^x por

$$a^x=\begin{cases}a^x, & \text{si } a>1;\\ 1, & \text{si } a=1;\\ \left(1/a\right)^{-x}, & \text{si } 0<a<1.\end{cases}$$

Es sencillo probar ahora que las mismas propiedades que se verifican para la potenciación con exponente racional se verifican igualmente en el caso general.

1.8. Conjuntos numerables

Ya hemos introducido anteriormente (ver la definición 1.29) el concepto de conjuntos finitos y de sus cardinales (números naturales), ahora bien, al tratar con conjuntos infinitos la noción de cardinalidad deja de ser tan obvia, aunque de manera formal se puede introducir en los mismos términos de aplicaciones biyectivas.

Definición 1.63. Se dice que dos conjuntos A y B son *equipotentes* o *coordinables*, y se escribe $A\sim B$, si o bien ambos son vacíos, o bien existe una aplicación biyectiva entre ambos. En este caso también se dice que ambos conjuntos *tienen el mismo cardinal*.

Dados dos conjuntos A y B, se dice que *el cardinal de A es menor o igual que el cardinal de B* si, o bien A es vacío, o bien existe una aplicación inyectiva $\varphi\colon A\to B$.

Propiedades 1.64.

(i) Dados dos conjuntos no vacíos A y B, es condición necesaria y suficiente para que el cardinal del conjunto A sea menor o igual que el del conjunto B que exista una aplicación suprayectiva $\psi\colon B \to A$.

(ii) De la propia definición se deduce que si $A \subset B$, entonces el cardinal de A es menor o igual que el de B.

(iii) Es obvio igualmente que, si A y B son dos conjuntos equipotentes, entonces el cardinal de A es menor o igual que el de B y el cardinal de B es menor o igual que el de A. Se verifica también el recíproco, conocido como *teorema de Bernstein*, pero la demostración de este resultado es bastante complicada.

Prestamos atención ahora a aquellos conjuntos cuyos elementos se pueden enumerar; esta noción se precisa en la siguiente

Definición 1.65. Un conjunto A se dice *infinito numerable* si es equipotente al conjunto de los números naturales. Un conjunto A se dice *numerable* si es finito o infinito numerable.

Proposición 1.66. (i) El cardinal de un conjunto finito está unívocamente determinado.
(ii) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

Proposición 1.67. (i) Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.
(ii) De todo conjunto infinito se puede extraer un subconjunto infinito numerable.

Observación 1.68. El concepto de cardinal sólo se ha definido para conjuntos finitos, a pesar de que se hayan utilizado las locuciones “igual cardinal que” o “menor o igual cardinal que” en el caso general.

Hablando en este contexto de forma puramente coloquial, el último apartado de la proposición anterior significa que el cardinal de $\mathbb{N}$, denotado usualmente por $\aleph_0$ (se lee “alef-sub-cero”), es el menor de los cardinales infinitos.

Proposición 1.69. (i) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ es una colección finita de conjuntos finitos, entonces el conjunto unión $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es finito.

(ii) Si K es un conjunto numerable y $\{A_k\}_{k\in K}$ una familia de conjuntos tales que A_k es numerable para cada $k \in K$, entonces el conjunto $A = \bigcup_{k\in K} A_k$ es numerable.

Corolario 1.70. $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son conjuntos infinitos numerables.

Proposición 1.71. El intervalo $[0, 1]$ es un conjunto infinito y no numerable.

Corolario 1.72. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos infinitos no numerables.

Observación 1.73. El cardinal de la recta real se denomina usualmente *potencia del continuo*, resulta ser el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (conjunto de partes de $\mathbb{N}$) y se denota a veces por $2^{\aleph_0}$.

1.9. Apéndice: Funciones elementales

Parece necesario hacer en este momento un compendio de las propiedades más relevantes de las funciones cuya aparición y manejo es constante en el Análisis Matemático. Como se ha visto en la Observación 1.62, es posible construir las funciones potenciales y exponenciales reales haciendo uso del axioma de completitud de la recta real. Las funciones logarítmicas (respectivamente, las funciones hiperbólicas) aparecen entonces como inversas (resp. como combinación) de las exponenciales. La definición de las funciones trigonométricas también es factible mediante argumentos geométricos sin duda familiares, y a partir de ellas se definen de nuevo sus inversas. Sin embargo, la construcción de todas estas funciones, denominadas *funciones elementales*, y la obtención de sus propiedades, es más directa y clara en el marco más general de la teoría de funciones complejas de variable compleja definidas mediante series de potencias, cuyo estudio riguroso requiere herramientas de las que carecemos. No obstante, los resultados sobre continuidad y derivabilidad de funciones de variable real y sobre convergencia de series de números reales, que serán tratados más adelante en esta asignatura, permiten obviar estas dificultades y realizar un estudio razonable restringido al caso real, que presentamos a continuación en forma de prontuario y que será desarrollado con detalle a lo largo del curso.

1.9.1. Funciones exponenciales y logarítmicas

Función exponencial de base e

Los conceptos de sucesión y de límite de la misma serán introducidos en el tema 2. En particular, en el ejercicio 2.1 de ese tema se probará que la sucesión $\left\{\left(1+{}^1\!/_n\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, y su límite se denota por 'e', cuyo valor aproximado es 2'718.

Definición 1.74. Se denomina *función exponencial* a la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\exp(x) := e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

donde e^x ha sido definido en la Observación 1.62.

Proposición 1.75. Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,.$$

Propiedades 1.76.

(I) $e^{x+y} = e^x\, e^y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(II) $e^0 = 1$, $e^1 = e$ y $e^x > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(III) $e^{-x} = (e^x)^{-1} = {}^1\!/_{e^x}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(IV) $1 + x \le e^x \le 1 + x\, e^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

(V) $e^x > 1$ si $x > 0$; $0 < e^x < 1$ si $x < 0$.

Proposición 1.77. La función $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $e^x > e^y$.

Proposición 1.78. La función $\exp$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Proposición 1.79. $\exp$ es una biyección de $\mathbb{R}$ en el intervalo $(0, \infty)$, en particular

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,.$$

Proposición 1.80. La función $\exp$ es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$, además

$$\exp'(x) = \exp(x) = e^x \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

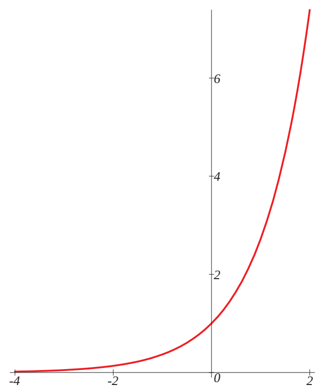

Figura 1.2: La función exponencial.

Función logaritmo natural

Definición 1.81. La función inversa de $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (ver la Proposición 1.79) se denomina *logaritmo natural* o *neperiano* y se denota por '$\log$' o '$\ln$'.

Propiedades 1.82.

(I) $\log(x\,y) = \log(x) + \log(y)$ para todos $x, y > 0$.

(II) $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$ y $\log(x) > 0$ para cada $x > 1$.

(III) $\log(1/x) = -\log(x)$ para cada $x > 0$.

(IV) $\log(x) < 0$ si $0 < x < 1$.

(V) $1 - 1/x \leq \log(x) \leq x - 1$ para cada $x > 0$.

Proposición 1.83. La función $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log(x) > \log(y)$.

Proposición 1.84. La función $\log$ es continua en $(0, \infty)$.

Proposición 1.85. $\log$ es una biyección del intervalo $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$, en particular

$$\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty\,.$$

Proposición 1.86. La función $\log$ es indefinidamente derivable en $(0, \infty)$, además

$$\log'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{para cada } x > 0\,.$$

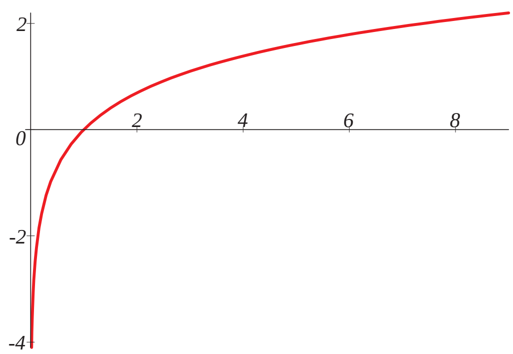

Figura 1.3: La función logaritmo natural.

Función exponencial de base arbitraria

Definición 1.87. Sea a un número real con $a > 0$ y $a \neq 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la *exponencial de base* a de x como la función que asocia a cada $x \in \mathbb{R}$ el valor a^x definido en la Observación 1.62.

Proposición 1.88. Sea a un número real con $a > 0$ y $a \neq 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$a^x = e^{x \log(a)}\,.$$

Propiedades 1.89.

(I) $a^{x+y} = a^x\, a^y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(II) $a^0 = 1$ y $a^x > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(III) $a^{-x} = 1/a^x$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(IV) Si $a > 1$, $a^x > 1$ para $x > 0$ y $0 < a^x < 1$ para $x < 0$.

(V) Si $0 < a < 1$, $0 < a^x < 1$ para $x > 0$ y $a^x > 1$ para $x < 0$.

Proposición 1.90. Si $a > 1$, la función $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $a^x > a^y$.
Si $0 < a < 1$, la función $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $a^x < a^y$.

Proposición 1.91. La función a^x es continua en todo $\mathbb{R}$.

Proposición 1.92. a^x es una biyección de $\mathbb{R}$ en el intervalo $(0, \infty)$.
Si $a > 1$,entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty\,.$
Si $0 < a < 1$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0\,.$

Proposición 1.93. La función a^x es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$, además

$$(a^x)' = \log(a)\, a^x\,.$$

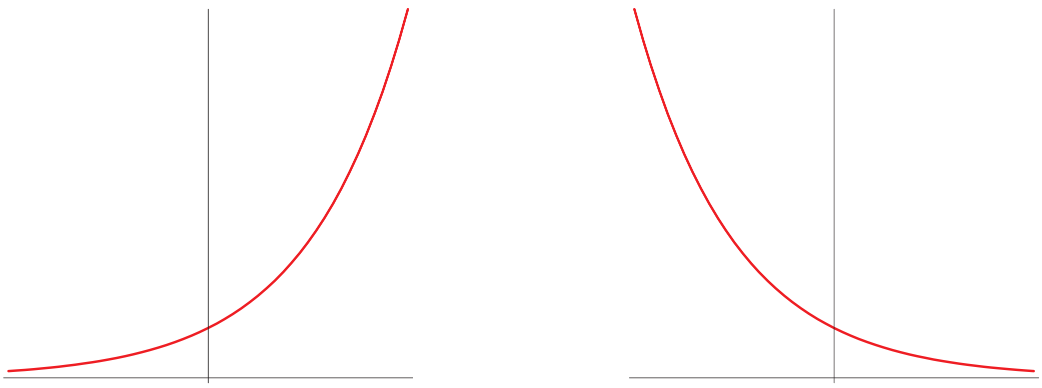

Figura 1.4: Exponencial de base mayor que 1 (a la izquierda) y de base menor que 1.

Función logaritmo de base arbitraria

Definición 1.94. Si a es un número real con $a > 0$, $a \neq 1$, la función inversa de $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (ver la Proposición 1.92) se denomina *logaritmo en base* a y se denota por '$\log_a$'.

Propiedades 1.95.

(I) $\log_a(x\, y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ para todos $x, y > 0$.

(II) $\log_a(1) = 0$ y $\log_a(a) = 1$.

(III) $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$ para cada $x > 0$.

(IV) Si $a > 1$, $\log_a(x) > 0$ para $x > 1$ y $\log_a(x) < 0$ para $0 < x < 1$.

(V) Si $0 < a < 1$, $\log_a(x) < 0$ para $x > 1$ y $\log_a(x) > 0$ para $0 < x < 1$.

(VI) Si $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, entonces

$$\log_b(x) = \log_b(a)\,\log_a(x) \quad \text{para cada } x > 0\,.$$

En particular,

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \text{para cada } \ x > 0\,.$$

Proposición 1.96. Si $a > 1$ la función $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log_a(x) > \log_a(y)$.
Si $0 < a < 1$ la función $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log_a(x) < \log_a(y)$.

Proposición 1.97. La función $\log_a$ es continua en $(0, \infty)$.

Proposición 1.98. $\log_a$ es una biyección del intervalo $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$.
Si $a > 1$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$.
Si $0 < a < 1$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$.

Proposición 1.99. La función $\log_a$ es indefinidamente derivable en $(0, \infty)$, además

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{\log(a)}\,\frac{1}{x} \quad \text{para cada } x > 0\,.$$

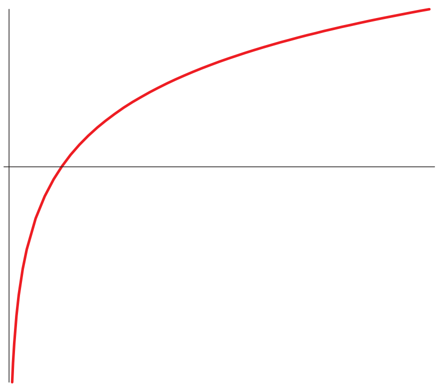
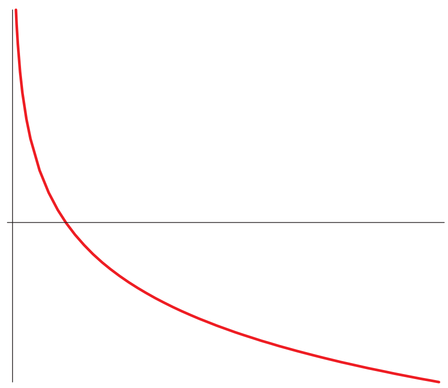

Figura 1.5: Logaritmo de base mayor que 1 (a la izquierda) y de base entre 0 y 1.

Función potencial

Definición 1.100. Dado un número real a, para cada $x > 0$ se define la *potencia de base x y exponente a* por

$$x^a = \exp\big(a\,\log(x)\big)\,.$$

Propiedades 1.101.

(I) $(x\,y)^a = x^a\,y^a$ para todos $x, y > 0$.

(II) $(x^a)^b = x^{a\,b}$ y $x^a\,x^b = x^{a+b}$ para cada $x > 0$ y todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(III) Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $x^a = x\,x \overset{a \text{ veces}}{\cdots} x$ para cada $x > 0$.

(IV) Si $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, entonces $x^a = \dfrac{1}{\overbrace{x\,x \cdots x}^{|a|\text{ veces}}}$ para cada $x > 0$.

Proposición 1.102. Si $a > 0$ la función $x^a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $x^a > y^a$.
Si $a < 0$ la función $x^a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $x^a < y^a$.

Proposición 1.103. La función x^a es continua en $(0, \infty)$.

Proposición 1.104. Si $a \neq 0$, la función x^a es una biyección de $(0, \infty)$ en $(0, \infty)$.
Si $a > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} x^a = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = \infty\,.$
Si $a < 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} x^a = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = 0\,.$

Proposición 1.105. La función x^a es indefinidamente derivable en $(0, \infty)$, además

$$(x^a)' = a\,x^{a-1}\,.$$

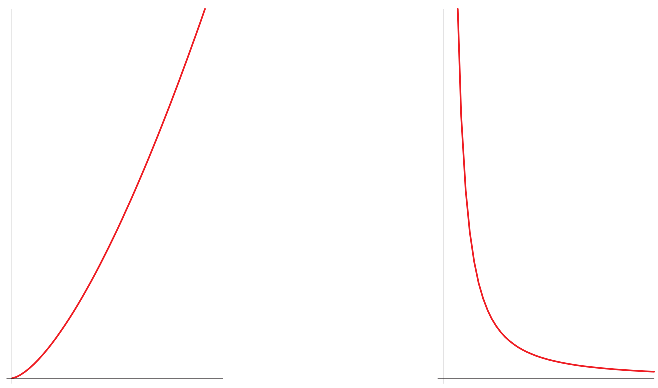

Figura 1.6: Función potencial de exponente positivo (a la izquierda) y de exponente negativo.

1.9.2. Funciones trigonométricas

Funciones seno y coseno

Definición 1.106. Si $x \in \mathbb{R}$ se definen el *coseno de* x, denotado "$\cos(x)$", y el *seno de* x, denotado "$\operatorname{sen}(x)$" por

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n}\,, \qquad \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\,x^{2\,n+1}\,.$$

Propiedades 1.107. Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

(I) $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1\,.$

(II) $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$ y $\cos(x) = \cos(-x)$.

(III) $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$.

(IV) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

(V) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.

(VI) $\operatorname{sen}(2\,x) = 2\,\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ y $\cos(2\,x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$.

(VII) $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2\,x)}{2}$ y $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2\,x)}{2}$.

(VIII) $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$

(IX) $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$.

(X) $\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$.

(XI) $\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

(XII) $\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

(XIII) $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

(XIV) $\cos(x)-\cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

Proposición 1.108. Las funciones $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son indefinidamente derivables en todo $\mathbb{R}$, además

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) \qquad \text{y} \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\,.$$

Observación 1.109. Se tiene que $\cos(0) > 0$ y $\cos(2) < 0$, por tanto, $\cos(\xi) = 0$ para algún punto ξ del intervalo $(0, 2)$.

Definición 1.110. Si $\alpha = \inf\{x \geq 0 \,:\, \cos(x) = 0\}$ se define el número π como

$$\pi = 2\,\alpha\,. \qquad\qquad (\pi \simeq 3'1415926\ldots)$$

Proposición 1.111. $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones periódicas, de periodo $2\,\pi$, es decir

$$\cos(x+2\,\pi) = \cos(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x+2\,\pi) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\,.$$

Propiedades 1.112.

(I) $\cos(0) = 1$ y $\operatorname{sen}(0) = 0$.

(II) $\cos\left(\pi/2\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\pi/2\right) = 1$.

(III) $\cos(\pi) = -1$ y $\operatorname{sen}(\pi) = 0$.

(IV) $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen}(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(V) $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(VI) $\operatorname{sen}\left(\pi/2 - x\right) = \cos(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(VII) $\cos\left(\pi/2 - x\right) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(VIII) $\operatorname{sen}(x) = 0$ si, y sólo si, $x = k\,\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

(IX) $\cos(x) = 0$ si, y sólo si, $x = \pi/2 + k\,\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

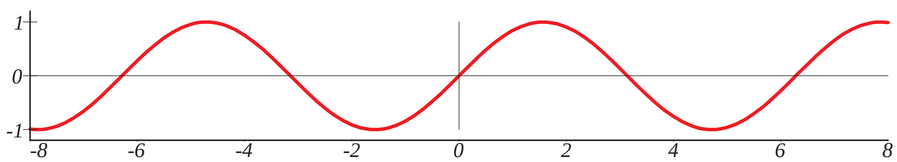

Figura 1.7: La función seno.

Funciones inversas de seno y coseno

Proposición 1.113. $\operatorname{sen}:\left[-\pi/2, \pi/2\right] \to [-1, 1]$ es una biyección creciente. A la función inversa se le denomina *arcoseno* y se denota por 'arcsen'.

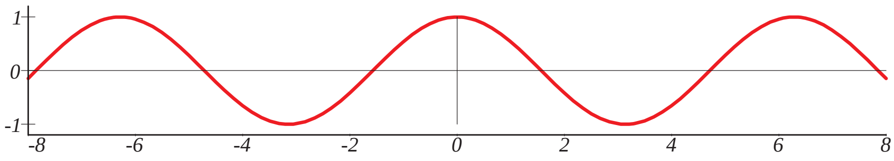

Figura 1.8: La función coseno.

Proposición 1.114. $\operatorname{arcsen} : (-1,1) \to \left(-\pi/2, \pi/2\right)$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para cada } x \in (-1,1)\,.$$

Proposición 1.115. $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ es una biyección decreciente. A la función inversa se le denomina *arcocoseno* y se denota por '$\arccos$'.

Proposición 1.116. $\arccos : (-1,1) \to (0,\pi)$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para cada } x \in (-1,1)\,.$$

Proposición 1.117. Para cada $x \in (-1,1)$ se tiene que

$$\arccos(x) = \pi/2 - \operatorname{arcsen}(x)\,.$$

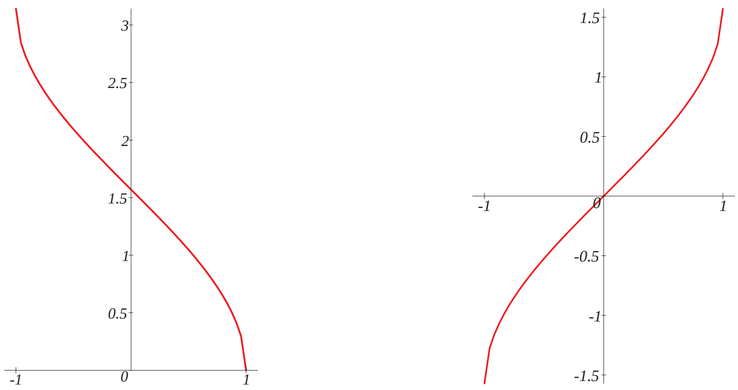

Figura 1.9: Funciones arcocoseno (a la izquierda) y arcoseno.

Funciones tangente, cotangente y sus inversas

Definición 1.118. Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\,\pi + \pi/2$ ($k \in \mathbb{Z}$), se define

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente* de x. Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), se define

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,,$$

denominada *cotangente* de x.

Proposición 1.119. $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \operatorname{tg}(x)^2 \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

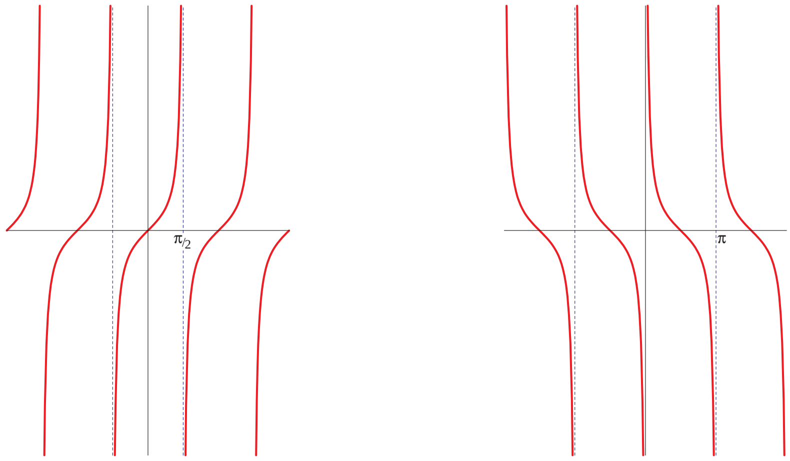

Figura 1.10: Funciones tangente (a la izquierda) y cotangente.

Proposición 1.120. $\mathrm{tg} : \left(-\,{}^{\pi}\!/_{2}, {}^{\pi}\!/_{2}\right) \to \mathbb{R}$ es una biyección creciente. A la función inversa se le denomina *arcotangente* y se denota por "arctg".

Proposición 1.121. $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\,{}^{\pi}\!/_{2}, {}^{\pi}\!/_{2}\right)$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

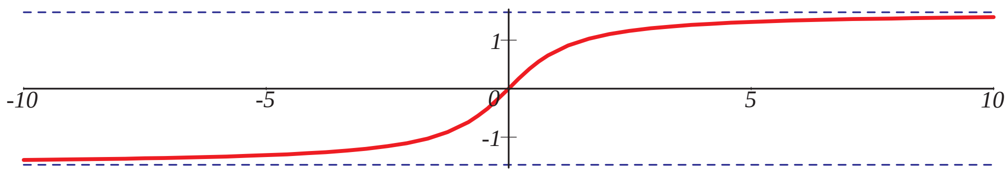

Figura 1.11: Función arcotangente.

Proposición 1.122. $\mathrm{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\mathrm{cotg}'(x) = \frac{-1}{\mathrm{sen}(x)^2} = -1 - \mathrm{cotg}(x)^2 \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Proposición 1.123. $\mathrm{cotg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ es una biyección decreciente. A la función inversa se le denomina *arcocotangente* y se denota por "arccotg".

Proposición 1.124. $\mathrm{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ es indefinidamente derivable. Además

$$\mathrm{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

1.9.3. Funciones hiperbólicas

Funciones seno y coseno hiperbólicos

Definición 1.125. Si $x \in \mathbb{R}$ se definen

$$\mathrm{Ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \mathrm{Sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$

denominadas *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de x, respectivamente.

Propiedades 1.126.

(I) $\mathrm{Ch}(0) = 1$ y $\mathrm{Sh}(0) = 0$.

(II) $\mathrm{Ch}(x) \geq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(III) $\mathrm{Sh}(x) > 0$ si $x > 0$ y $\mathrm{Sh}(x) < 0$ si $x < 0$.

Proposición 1.127. Las funciones $\mathrm{Sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathrm{Ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son indefinidamente derivables en todo $\mathbb{R}$, además

$$\mathrm{Sh}'(x) = \mathrm{Ch}(x) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Ch}'(x) = \mathrm{Sh}(x) \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

Propiedades 1.128. Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

(I) $\mathrm{Sh}(x) = -\mathrm{Sh}(-x)$ y $\mathrm{Ch}(x) = \mathrm{Ch}(-x)$.

(II) $\mathrm{Ch}^2(x) - \mathrm{Sh}^2(x) = 1$.

(III) $\mathrm{Sh}(x + y) = \mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Ch}(y) + \mathrm{Ch}(x)\,\mathrm{Sh}(y)$.

(IV) $\mathrm{Ch}(x + y) = \mathrm{Ch}(x)\,\mathrm{Ch}(y) + \mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Sh}(y)$.

(V) $\mathrm{Sh}(2\,x) = 2\,\mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Ch}(x)$.

(VI) $\mathrm{Ch}(2\,x) = \mathrm{Ch}^2(x) + \mathrm{Sh}^2(x)$.

(VII) $\mathrm{Sh}^2(x) = \dfrac{\mathrm{Ch}(2\,x) - 1}{2}$ y $\mathrm{Ch}^2(x) = \dfrac{\mathrm{Ch}(2\,x) + 1}{2}$.

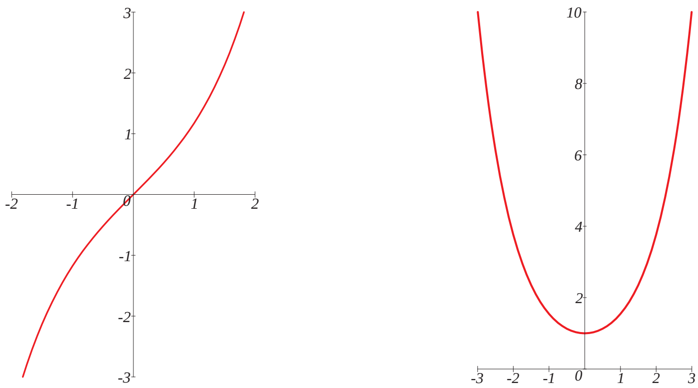

Figura 1.12: Funciones seno hiperbólico (a la izquierda) y coseno hiperbólico.

Funciones inversas del seno y coseno hiperbólicos

Proposición 1.129. $\mathrm{Sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una biyección creciente. A la función inversa se le denomina *argumento del seno hiperbólico* y se denota por 'ArgSh'.

Proposición 1.130. $\mathrm{ArgSh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\mathrm{ArgSh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

Proposición 1.131. $\mathrm{Ch} : [0, \infty) \to [1, \infty)$ es una biyección decreciente. A la función inversa se le denomina *argumento del coseno hiperbólico* y se denota por 'ArgCh'.

Proposición 1.132. $\mathrm{ArgCh} : (1, \infty) \to (0, \infty)$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\mathrm{ArgCh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \text{para cada } x \in (1, \infty)\,.$$

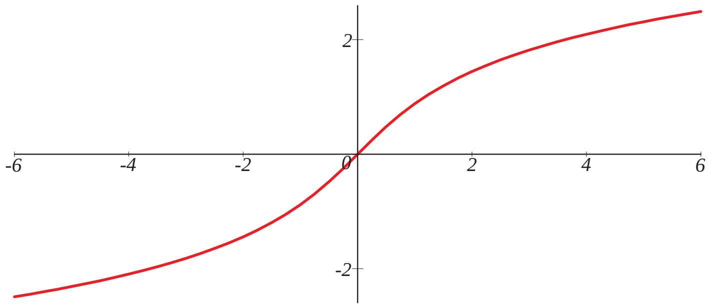

Figura 1.13: Función argumento del seno hiperbólico.

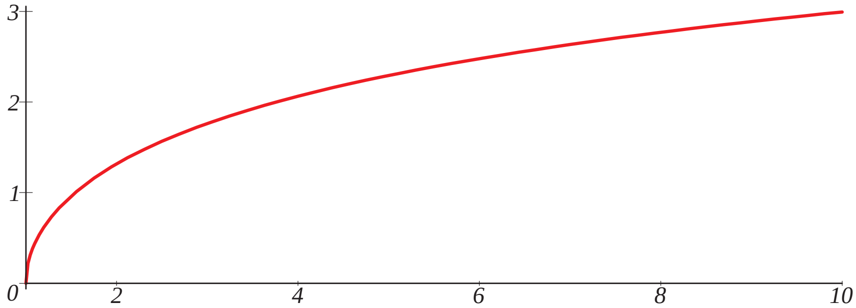

Figura 1.14: Función argumento del coseno hiperbólico.

Funciones tangente y cotangente hiperbólicas

Definición 1.133. Para $x \in \mathbb{R}$ se define

$$\mathrm{Tgh}(x) = \frac{\mathrm{Sh}(x)}{\mathrm{Ch}(x)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente hiperbólica* de x. Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, se define

$$\text{Cotgh}(x) = \frac{\mathrm{Ch}(x)}{\mathrm{Sh}(x)}\,,$$

denominada *cotangente hiperbólica* de x.

Proposición 1.134. $\mathrm{Tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\mathrm{Tgh}'(x) = 1 - \mathrm{Tgh}(x)^2 = \frac{1}{\mathrm{Ch}(x)^2} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

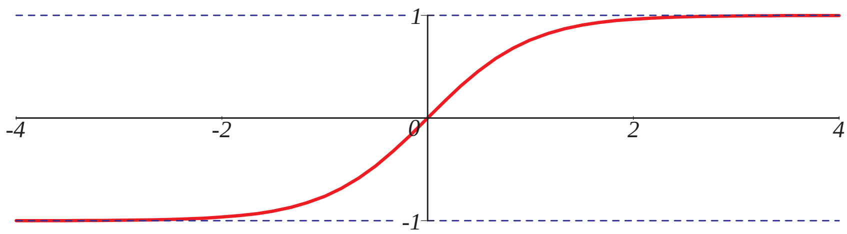

Figura 1.15: Tangente hiperbólica.

Proposición 1.135. $\mathrm{Tgh} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ es una biyección creciente. A la función inversa se le denomina *argumento de la tangente hiperbólica* y se denota por "ArgTgh".

Proposición 1.136. $\mathrm{ArgTgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ es indefinidamente derivable. Su derivada es

$$\mathrm{ArgTgh}'(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicios propuestos

1.1 Para las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$f(x) = x^2$, $\quad f(x) = 1 + x^3$, $\quad f(x) = e^x$, $\quad f(x) = \operatorname{sen}(x)$,

estudiar si son inyectivas o suprayectivas, determinando sus rangos. En caso de no inyectividad, determinar dominios adecuados, lo mayor posibles, en los que sí sean inyectivas.

1.2 Probar por inducción las siguientes igualdades. En todos los casos n denota un número natural.

(I) $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, $\; r \neq 1$. $\qquad$ (II) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

(III) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2\,k - 1) = n^2$. $\qquad$ (IV) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$. $\qquad$ (V) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1$.

1.3 Sean k y n números enteros, con $n \geq 1$. (i) Probar que si $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(ii) Demostrar que, si $1 \leq k \leq n$, se verifica que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

y deducir que los números combinatorios son en realidad números naturales.

(iii) Demostrar la **fórmula del binomio de Newton**:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

1.4 Sea $x \in \mathbb{R}$. Probar por inducción las siguientes igualdades:

(I) $\operatorname{sen}(x)\Big(\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(3\,x) + \ldots + \operatorname{sen}\big((2\,n-1)\,x\big)\Big) = \operatorname{sen}^2(n\,x)$.

(II) $2\operatorname{sen}(x)\Big(\cos(x) + \cos(3\,x) + \ldots + \cos\big((2\,n-1)\,x\big)\Big) = \operatorname{sen}(2\,n\,x)$.

(III) $2^{n+1}\operatorname{sen}(x)\,\cos(x)\,\cos(2\,x)\,\cos(4\,x)\cdots\cos(2^n x) = \operatorname{sen}(2^{n+1}x)$.

(IV) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\big(\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2\,x) + \cdots + \operatorname{sen}(n\,x)\big) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\,x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}\,x\right)$.

(V) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\big(1 + \cos(x) + \cos(2\,x) + \cdots + \cos(n\,x)\big) = \cos\left(\dfrac{n\,x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}\,x\right)$.

1.5 Probar por inducción las desigualdades siguientes:

(I) $(1+p)^n > 1 + n\,p$, si $p > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(II) $2\,n < 2^n - 1$, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

(III) $n + 1 \;\geq\; \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \;\geq\; 1 + \frac{n}{2}$, si $n \in \mathbb{N}$.

(IV) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(V) $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2k-1}{2k} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$.

1.6 Demostrar para $n \in \mathbb{N}$:

(I) $5^n - 1$ es múltiplo de 4. $\qquad$ (II) $7^n - 6\,n - 1$ es múltiplo de 36.

(III) $n^5 - n$ es múltiplo de 5. $\qquad$ (IV) $2^{2n+1} + 1$ es múltiplo de 3.

(V) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es múltiplo de 133.

1.7 Probar las siguientes afirmaciones:

(I) Dado un número natural n con $n \geq 2$, se consideran n puntos distintos del plano, de manera que tres cualesquiera de ellos no están alineados. Entonces el número total de líneas que se obtienen uniendo dos de dichos puntos es $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(II) El número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n.

1.8 Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ la proposición "n^2+5n+1 es un número natural par".
(i) Probar que $P(n+1)$ es verdadera si lo es $P(n)$.
(ii) ¿Para qué valores de n es verdadera $P(n)$?

1.9 Demostrar que cualquier número de botellas mayor que 7 se puede envasar en bolsas de 3 y 5 botellas.

1.10 Demostrar que, para cada número natural n, el número x_n definido por

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]$$

es un número natural.
Indicación: Probar que $x_1 = x_2 = 1$ y que $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

1.11 Problemas propuestos en examen:
29 Junio 2002, examen del primer parcial, problema 2, apartado a).
29 Junio 2004, examen del primer parcial, cuestión 1.
29 Junio 2009, examen final, cuestión 1, apartado a).
9 Febrero 2010, cuestión 1.
3 Noviembre 2011, primera prueba de evaluación continua, cuestión 2.

1.12 Sea n un número natural. Probar que, o bien n es cuadrado perfecto, o bien su raíz cuadrada es irracional, es decir, si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ entonces $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

1.13 Sean a un número racional no nulo y x un número irracional. Probar que $a+x$ y $a \cdot x$ son irracionales.
Dar un ejemplo de dos números irracionales tales que su suma y su producto sean racionales.

1.14 Sean x e y números racionales positivos tales que el número $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ es racional. Probar que también son racionales los números $\sqrt{x}$ y $\sqrt{y}$.

1.15 Demostrar que, si $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ y $a+\sqrt{b} = c+\sqrt{d}$, entonces o bien $a = c$ y $b = d$, o bien b y d son los cuadrados de dos números racionales.

1.16 Se denota por $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ al subconjunto de los números reales de la forma $p + q\sqrt{2}$, donde p y q son números racionales. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un *subcuerpo* de $\mathbb{R}$, es decir:
(i) si $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ entonces $x+y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ y $x \cdot y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, y
(ii) si $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $x \neq 0$, entonces $x^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

1.17 Averiguar si son racionales los siguientes números: (I) $\cos(10°)$ (II) $\cot(20°)$
(III) $\tan(5°)$ (IV) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$ (V) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ (VI) $\log_4(5)$

1.18 Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, y sea $\beta \in \mathbb{R}$. Son equivalentes: (i) El extremo superior de A es β.
(ii) β es cota superior de A, y para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > \beta - \varepsilon$.

1.19 Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Se supone que para cada elemento $x \in A$ y para cada elemento $y \in B$, se tiene que $x \le y$.
(i) Probar que A admite extremo superior y B admite extremo inferior.
(ii) Demostrar que, además, se verifica que $\sup A \le \inf B$.

1.20 Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ están acotados superior o inferiormente y, en caso afirmativo, calcular los correspondientes extremos.

(I) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| + |2-x| < 3+x\}$. (II) $D = \Big\{n + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\Big\}$.

(III) $C = \mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{5})$. (IV) $B = \Big\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2+12x+11}\Big\}$.

(V) $E = \Big\{\dfrac{1}{1+n^2} - \dfrac{2}{(2m-1)^2} : n, m \in \mathbb{N}\Big\}$. (VI) $F = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1)(x-2)(x-3) < 0\}$.

1.21 Escribir los siguientes conjuntos como unión de intervalos:

(I) $\{x \in \mathbb{R} : 1 > 3\sqrt{|x| - x}\}$. (II) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-2| \leq 12\}$.

(III) $\{x \in \mathbb{R} : |x(x-1)| < 1/2\}$. (IV) $\{x \in \mathbb{R} : |x+1| < |x|\}$.

1.22 Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se define el conjunto C por

$$C = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Probar que, si A y B son acotados, entonces C también está acotado. ¿Qué se puede decir de los extremos de C en relación con los de A y B?

1.23 Probar que si a y b son números reales, entonces

$$\text{máx}\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{mín}\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

1.24 Probar que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$.

1.25 Probar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) \qquad (\textbf{Desigualdad de Cauchy-Schwarz}).$$

1.26 Calcular las siguientes sumas:

(I) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$. (II) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k\,(k+1)}$.

(III) $\displaystyle\sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}$. (IV) $\displaystyle\sum_{k=1}^{22} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)^2, \; x \in \mathbb{R}, \; x > 0$.

1.27 Resolver las siguientes ecuaciones:

(I) $\big||x+1| - 3\big| = 0$. (II) $\sqrt{1 - x^2} = 1 - |x|$. (III) $\big|x^2 - 4|x| - 12\big| = 0$.

(IV) $|x-1|\,|x-2| = 3$. (V) $|x| = x^2 + x - 2$. (VI) $\big|x - |4 - x|\big| - 2x = 4$.

(VII) $\dfrac{1 - 2x}{3 - |x-1|} = 1$.

1.28 Probar las siguientes desigualdades:

(I) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 2$, $\left|\dfrac{\text{sen}(x)}{x^2 - 1}\right| \leq \dfrac{1}{3}$. (II) Para cada $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x}{1 + x^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

(III) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{1 + \text{sen}(\theta)}{1 + \text{sen}(\theta)\cos(\theta)}\right| \leq 4$.

1.29 Problemas propuestos en examen:
25 Noviembre 2009, cuestión 1.
3 Noviembre 2011, primera prueba de evaluación continua, cuestiones 3 y 4.

1.30 (I) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $(a, b) \sim [a, b] \sim (a, b] \sim [a, b)$.
(II) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $(a, b) \sim (0, 1)$.
(III) Demostrar que todo intervalo I no reducido a un punto es equipotente a $\mathbb{R}$.

1.31 Sean X un conjunto infinito no numerable e $Y \subseteq X$, tal que Y es numerable. Demostrar que $X \sim X \setminus Y$.

1.32 Demostrar que si $a < b$ entonces $[a, b]$ es equipotente a $\mathbb{I} \cap [a, b]$.

1.33 Demostrar que $\mathbb{R} \sim \mathbb{I}$.

1.34 Se dice que un número real x es *algebraico* si existe un polinomio P con coeficientes enteros tal que $P(x) = 0$, es decir, si existen números enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 = 0.$$

Demostrar que el conjunto de los números algebraicos es numerable.
Nota: Los números reales no algebraicos se denominan *trascendentes*; por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico (por ser solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$), en cambio e y π son trascendentes.

Tema 2

Sucesiones de números reales

El concepto abstracto de sucesión se puede asociar, en una primera aproximación, a los procesos discretos de la naturaleza o a aquéllos que se pueden describir de forma discreta, por ejemplo, la evolución de una población en instantes de tiempo equiespaciados o una señal digital.

Aparte de su interés como mecanismo para modelar, la teoría de sucesiones aporta una importante herramienta deductiva en el Análisis Matemático; el aspecto más relevante de las sucesiones numéricas, su carácter convergente o no, es un caso más de la noción de proximidad, es decir, del concepto de límite, fundamento éste de todo el Cálculo Infinitesimal.

2.1. Definiciones y terminología. Convergencia.

Definición 2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *sucesión de elementos de* X es una aplicación del conjunto de los números naturales en X,

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto \sigma(n). \end{aligned}$$

Habitualmente una sucesión se representa de forma más compacta por el símbolo '$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$', donde $x_n = \sigma(n)$.

El elemento x_n se denomina *término n-ésimo* de la sucesión. La imagen de la aplicación σ, es decir, el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, se denomina *conjunto de términos* o *rango* de la sucesión.

Observaciones 2.2.

(i) El adjetivo *secuencial* se usa para referirse a propiedades enunciadas sobre sucesiones o mediante ellas.

(ii) En la notación $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, el papel de las letras 'x' y 'n' es meramente accesorio, lo mismo se podría haber escrito, por ejemplo, $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, para representar la aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to X$, si se conviene que $a_m = \sigma(m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. También son usuales las notaciones '$(x_n)_{n=1}^{\infty}$' y '$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$' para representar una sucesión.

(iii) Como ejemplo, en el teorema del encaje de intervalos 2.30 se considera una sucesión $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuyos términos son intervalos, subconjuntos de $\mathbb{R}$ (es decir, $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$). En general, cuando se consideran sucesiones de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son habituales las notaciones $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ para denotar la unión y la intersección, respectivamente, de todos los conjuntos A_n.

(iv) Aunque una sucesión tiene infinitos términos, el conjunto de los mismos puede ser finito; por ejemplo, si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *constante*, esto es, $x_n = x \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, su rango se reduce al conjunto $\{x\}$. Otro ejemplo: el rango de la sucesión de números reales $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, dada por $a_k = (-1)^k$, es el conjunto $\{-1, 1\}$.

A partir de ahora todas las sucesiones consideradas serán de números reales, salvo que se indique expresamente otra cosa.

Definición 2.3. Se dice que una sucesión es *acotada inferiormente*, *acotada superiormente*, o *acotada* si así lo es, respectivamente, el conjunto de sus términos.

Definición 2.4. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *monótona creciente* (resp. *decreciente*) si $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$) para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si la desigualdad es estricta para cada $n \in \mathbb{N}$, se dice que la sucesión es *estrictamente monótona* (creciente o decreciente).

Proposición 2.5. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente (resp. decreciente), entonces está acotada inferiormente (resp. superiormente).

Definición 2.6. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión es *convergente* si existe un número real x verificando la siguiente propiedad:

Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que $|x_n - x| < \varepsilon$ o, equivalentemente, $x_n \in (x - \varepsilon\,,\, x + \varepsilon)$. En este caso, el número x se denomina *límite* de la sucesión, y se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge hacia* x.

Proposición 2.7. Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, su límite es único.

Notación: Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia x, se escribe

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n\,,$$

expresión que se lee "x es el límite cuando n tiende a infinito de x_n".

Observaciones 2.8. (i) La definición anterior no es otra cosa que la formalización rigurosa de la idea de que los términos de la sucesión se aproximan a su límite tanto como se quiera si se toman índices suficientemente grandes.

(ii) La propiedad arquimediana de los números reales (ver 1.52) proporciona un primer ejemplo, muy notable, de sucesión convergente: La sucesión $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0. Para probarlo, basta atender a la desigualdad (1.3) del tema 1.

Proposición 2.9. Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces está acotada.

Proposición 2.10. Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, entonces es convergente si, y sólo si, es acotada. Además, su límite es:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si es creciente.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si es decreciente.

Propiedades 2.11 (Sucesiones convergentes).

(I) El carácter de una sucesión de números reales no se altera si se modifican o suprimen en ella un número finito de términos, es decir, la sucesión resultante tiende hacia el mismo límite (finito o infinito) que la original, o no tiene límite si la primera tampoco lo tiene. Nótese que si se suprimen los p primeros términos de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se obtiene la subsucesión $\{a_{p+n}\}_{n=1}^{\infty}$.

(II) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0, entonces la sucesión $\{a_n\, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

(III) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a, entonces la sucesión $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $|a|$.

El recíproco, en general, no es cierto; no obstante, es inmediato de la definición que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 si, y sólo si, la sucesión $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

(IV) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número real $a \neq 0$, entonces:

(i) Si $a > 0$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < a$ existe un número natural n_0 (que depende de α) tal que para cada $n \geq n_0$ se tiene que $\alpha < a_n$.

(ii) Si $a < 0$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ con $a < \alpha < 0$ existe un número natural n_0 (que depende de α) tal que para cada $n \geq n_0$ se tiene que $a_n < \alpha$.

(V) Sea β un número real. Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a, y para cada número natural n se tiene que $\beta \le a_n$ (resp. $a_n \le \beta$), entonces $\beta \le a$ (resp. $a \le \beta$).

(VI) Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones que convergen hacia los números a y b, respectivamente. Entonces:

(i) La sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $a+b$.

(ii) La sucesión $\{a_n\, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $a\,b$.

(iii) Si $b \neq 0$ y $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{{}^{a_n}/_{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia ${}^{a}/_{b}$.

(iv) Si $a_n \le b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ha de ser $a \le b$.

(VII) Si las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen hacia el mismo límite a, y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $a_n \le b_n \le c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge hacia a.

Esta propiedad se denomina habitualmente *criterio del sandwich* (la palabra inglesa “sandwich” significa “emparedado” o “bocadillo”, así que no es difícil imaginar el motivo de esta terminología).

(VIII) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos y converge hacia el número real $a > 0$, entonces la sucesión $\{\log(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $\log(a)$.

(IX) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a, entonces la sucesión $\{e^{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número e^a.

(X) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos y converge hacia el número real $a > 0$, y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número b, entonces la sucesión $\{a_n^{\,b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a^b.

Nota: La mayoría de los resultados anteriores se deducen fácilmente de las propiedades aritméticas y de orden de la recta real. No sucede lo mismo con los relativos a la exponenciación, la potenciación y el logaritmo (del 2.11.VIII al 2.11.X), que requieren un estudio más detallado de las correspondientes funciones elementales; de hecho, en estas propiedades están descritas implícitamente las propiedades de continuidad de las mencionadas funciones.

Las propiedades listadas anteriormente permiten, en algunos casos, obtener el valor del límite de una sucesión por estimación directa del tamaño de sus términos. El ejercicio 2.19 aporta varios ejemplos en este sentido, todos ellos de aplicación frecuente en el estudio de nuevos límites. Procede mencionar también que las sucesiones que convergen hacia 0 son comúnmente conocidas como *infinitésimos*.

Definición 2.12. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de un conjunto X. Una *subsucesión* de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la composición de una sucesión estrictamente creciente de números naturales con la sucesión dada:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \to X \\ k &\mapsto n_k \mapsto x_{n_k}\,, \end{aligned}$$

donde $n_k < n_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se representa como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Ejemplos 2.13. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión.

(i) Las dos sucesiones de números naturales $\{2\,m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{2\,m-1\}_{m=1}^{\infty}$ son estrictamente crecientes. Al componerlas con $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se obtienen las subsucesiones $\{x_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{x_{2m-1}\}_{m=1}^{\infty}$ de los términos de índice par e impar, respectivamente.

(ii) Fijado un número natural k, la sucesión de números naturales $\{m \cdot k\}_{m=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, al componerla con $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se obtiene la subsucesión $\{x_{mk}\}_{m=1}^{\infty}$ de los términos cuyo índice es múltiplo de k.

Proposición 2.14. Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia x, entonces toda subsucesión suya converge hacia el mismo límite x.

Este último resultado proporciona un criterio negativo de convergencia:

Corolario 2.15. Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene dos subsucesiones que convergen hacia distintos límites, o una subsucesión que no converge, entonces no puede ser convergente.

2.2. Límites infinitos

Prestamos ahora atención al concepto de límite infinito, esto es, a la idea de que los términos de una sucesión se hagan arbitrariamente grandes (o pequeños) para índices suficientemente grandes.

Definición 2.16. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tiende a* $+\infty$ (resp. *tiende a* $-\infty$) o que *tiene límite* $+\infty$ (resp. *tiene límite* $-\infty$) si verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $M > 0$ (resp. $N < 0$) existe un número natural n_0, que depende de M (resp. de N), tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que $x_n > M$ (resp. $x_n < N$).

Notación: Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad (\text{resp. } \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\,)\,.$$

El signo '$+$' en $+\infty$, que se ha incluido en la definición para enfatizar el tratamiento simultáneo de los dos casos, suele omitirse.

Observación 2.17. En virtud de la propiedad arquimediana 1.52, la sucesión de los naturales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $x_n = n$ para todo n, tiene límite $+\infty$ (tómese en dicho resultado $x = 1 > 0$ e $y = M > 0$). Esto justifica la locución "cuando n tiende a infinito".

Proposición 2.18. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona creciente (resp. decreciente) y no acotada tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposición 2.19. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no acotada superiormente (resp. inferiormente) tiene una subsucesión que tiende a $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Propiedades 2.20 (Límites infinitos).

(I) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ (resp. hacia $-\infty$), entonces la sucesión está acotada inferiormente (resp. superiormente).

(II) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ (resp. hacia $-\infty$) y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $a_n \leq b_n$ (resp. $b_n \leq a_n$) para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también tiende hacia $+\infty$ (resp. hacia $-\infty$).

(III) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ (resp. hacia $-\infty$) y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferiormente (resp. superiormente), entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ (resp. hacia $-\infty$).

En particular, esta propiedad se aplica al caso particular en que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea convergente.

(IV) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número real $b \neq 0$, entonces la sucesión $\{a_n\, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, según la regla de los signos.

(V) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número real $b \neq 0$, y $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{{a_n}/{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, según la regla de los signos.

(VI) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número real $a \neq 0$ o tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0, con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{{a_n}/{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$:

  (i) tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, según la regla de los signos, si $b_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o si $b_n < 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

  (ii) no tiene límite (ni finito ni infinito) si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos.

(VII) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada (en particular, si es convergente) y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{{a_n}/{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

(VIII) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ es de números positivos y converge hacia 0 (resp. tiende a $+\infty$), entonces la sucesión $\{\log(a_n)\}_{n=1}^\infty$ tiende a $-\infty$ (resp. a $+\infty$).

(IX) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $-\infty$ (resp. a $+\infty$), entonces la sucesión $\{e^{a_n}\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0 (resp. tiende a $+\infty$).

(X) Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números positivos que converge hacia 0:

(i) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia el número $b > 0$ o tiende a $+\infty$, entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0.

(ii) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia el número $b < 0$ o tiende a $-\infty$, entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $+\infty$.

(XI) Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números positivos que tiende hacia $+\infty$:

(i) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia el número $b > 0$ o tiende a $+\infty$, entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $+\infty$.

(ii) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia el número $b < 0$ o tiende a $-\infty$, entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0.

(XII) Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números positivos que converge hacia el número real a con $0 < a < 1$ (resp. $a > 1$):

(i) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ tiende a $+\infty$, entonces $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^\infty$ converge a 0 (resp. tiende hacia ∞).

(ii) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ tiende a $-\infty$, entonces $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $+\infty$ (resp. converge hacia 0).

Nota: Como se comentó para las Propiedades 2.11, de nuevo estos resultados se deducen de las propiedades aritméticas y de orden de la recta real. Los relativos a la exponenciación, la potenciación y el logaritmo (del 2.20.VIII al 2.20.XII) describen las propiedades de comportamiento asintótico (límites en el infinito) de las mencionadas funciones.

Observaciones 2.21 (Indeterminaciones). Hay situaciones, que obviamente no se han contemplado antes, en las que la existencia de límite de las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ no garantiza la existencia o no existencia de límite para las sucesiones

$$\{a_n + b_n\}_{n=1}^\infty , \qquad \{{}^{a_n}/_{b_n}\}_{n=1}^\infty \qquad \text{o} \qquad \{a_n^{\,b_n}\}_{n=1}^\infty ;$$

estos casos reciben el nombre genérico de *indeterminaciones* y se detallan seguidamente.

(I) *Indeterminación del tipo* '$\infty - \infty$'

Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $+\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $-\infty$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=1}^\infty$. Es decir, la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=1}^\infty$ puede converger, tener límite infinito, o carecer de límite.

(II) *Indeterminación del tipo* '${}^0/_0$'

Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0 y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ también converge hacia 0, con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{{}^{a_n}/_{b_n}\}_{n=1}^\infty$.

(III) *Indeterminación del tipo* '$0 \cdot \infty$'

Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0 y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n\, b_n\}_{n=1}^\infty$.

(IV) *Indeterminación del tipo* '${}^\infty/_\infty$'

Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, siendo $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{{}^{a_n}/_{b_n}\}_{n=1}^\infty$.

(V) *Indeterminación del tipo* '∞^0'

Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ es de números positivos y tiende hacia $+\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^\infty$.

(VI) *Indeterminación del tipo* '0^0'

Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos y converge hacia 0 y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge hacia 0, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n^{\,b_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

(VII) *Indeterminación del tipo* '1^{∞}'

Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos y converge hacia 1, y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n^{\,b_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Nota: Por supuesto, las expresiones '$\infty-\infty$', '$0/0$', etc., son simplemente convenios de notación y carecen totalmente de sentido en la aritmética de la recta real.

Observaciones 2.22.

(i) Las sucesiones que tienden hacia infinito se denominan en ocasiones *infinitos*, y su carácter se puede determinar en ocasiones por estimación directa del tamaño de sus términos, al igual que ocurría con los infinitésimos. El ejercicio 2.23 estudia varias de estas situaciones y aporta información auxiliar valiosa para el cálculo de límites.

(ii) La indeterminación '1^{∞}' se resuelve en ocasiones con la información proporcionada en los ejercicios 2.1 y 2.2, manipulando la expresión correspondiente hasta obtener la forma del número e, que se refiere a un límite del tipo (2.1).

(iii) Los tres últimos tipos de indeterminación pueden ser transformados en una del tipo '$0\cdot\infty$' utilizando la igualdad
$$a^b = e^{b\log(a)}, \qquad a>0,\ b\in\mathbb{R},$$
indicada en la Proposición 1.88.

(iv) En general, puede ser de utilidad el sustituir alguna de las expresiones complejas que aparezcan en el término general de una sucesión por otras que, siendo más sencillas, se comporten igual, en el sentido de que dicha sustitución no altere el valor del límite buscado. La descripción de este método es el objeto de la próxima sección.

El siguiente criterio es útil para el estudio de la indeterminación ∞/∞.

Proposición 2.23 (Criterio de Stolz). Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales. Se supone que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de términos no nulos, estrictamente creciente y tiende a $+\infty$. Si la sucesión
$$\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$
tiene límite (finito o infinito) L, entonces la sucesión $\left\{a_n/b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite, que es también L.

Observaciones 2.24.

(i) El mismo resultado se obtiene si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ decrece estrictamente hacia 0 y la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 (*segunda versión del criterio de Stolz*).

(ii) El recíproco no es cierto, es decir, de la existencia de límite para la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ no se deduce la existencia de límite para la otra sucesión.

2.3. Sucesiones equivalentes

Definición 2.25. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales. Se dice que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *equivalente* a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ si existen una sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales que converge hacia 1, y un número natural n_0 tales que
$$y_n = c_n\, x_n \qquad \text{para cada } n\ge n_0\,.$$
En este caso se escribe '$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\sim\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$' o simplemente '$y_n\sim x_n$'.

Proposición 2.26. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales. Se verifica:

(i) $x_n \sim x_n$.

(ii) Si $y_n \sim x_n$ entonces $x_n \sim y_n$.

(iii) Si $x_n \sim y_n$ e $y_n \sim z_n$, entonces $x_n \sim z_n$.

(iv) Si $x_n \sim y_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\, x_n \sim \alpha\, y_n$.

(v) Si $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $x_n \sim y_n$, entonces $1/x_n \sim 1/y_n$.

(vi) Si $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y la sucesión $\{x_n/y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 1 , entonces $x_n \sim y_n$.

(vii) Si $x_n \sim y_n$ y $a_n \sim b_n$, entonces $a_n\, x_n \sim b_n\, y_n$.

(viii) Si $x_n \sim y_n$ ambas sucesiones tienen el mismo carácter. Además, si tienen límite (finito o infinito), dicho límite es el mismo.

Observaciones 2.27.

(i) Los apartados (i), (ii) y (iii) en la proposición anterior implican que la relación así definida es, efectivamente, una relación de equivalencia en el conjunto de las sucesiones de números reales.

(ii) De los resultados anteriores se deduce que en un producto de sucesiones, a efectos de cálculo de límites, es lícito sustituir una de las sucesiones factor por otra equivalente. Sin embargo, NO es cierto en general que si $x_n \sim y_n$ y $a_n \sim b_n$, entonces $a_n + x_n \sim b_n + y_n$. Para ilustrar esto basta considerar las sucesiones

$$x_n = 1 \ \sim\ y_n = 1 + 1/2^n\,,$$
$$a_n = -1 \ \sim\ b_n = -1 + 1/2^n\,.$$

El ejercicio 2.22 proporciona más información sobre la posibilidad de aplicar equivalencias en otras situaciones comunes.

(iii) La utilidad práctica de las sucesiones equivalentes radica en la resolución de indeterminaciones mediante la sustitución de las sucesiones bajo estudio por otras más sencillas.

A continuación se presenta una relación de los infinitésimos e infinitos equivalentes más comunes.

Proposición 2.28 (Infinitésimos equivalentes).

(I) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(i) Las siguientes sucesiones son equivalentes a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

(1) $\{\operatorname{sen}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (2) $\{\operatorname{Sh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (3) $\{\operatorname{tg}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

(4) $\{\operatorname{Tgh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (5) $\{\operatorname{arcsen}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (6) $\{\operatorname{ArgSh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

(7) $\{\operatorname{arctg}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (8) $\{\operatorname{ArgTgh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (9) $\{e^{x_n} - 1\}_{n=1}^{\infty}$

(10) $\{\log(1 + x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

(ii) Si $a > 0$, $a^{x_n} - 1 \sim \log(a)\, x_n$.

(iii) Si $p > 0$, $(1 + x_n)^p - 1 \sim p\, x_n$.

(iv) Las sucesiones

(1) $\{1 - \cos(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (2) $\{\operatorname{Ch}(x_n) - 1\}_{n=1}^{\infty}$

son equivalentes a la sucesión $\left\{\dfrac{{x_n}^2}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

(II) Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge hacia 1 . Entonces:

(i) $\{\log(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{y_n - 1\}_{n=1}^{\infty}$.

(ii) Si $p > 0$, $y_n^p - 1 \sim p\,(y_n - 1)$.

Nota: Estas equivalencias se deducen, como veremos en el tema 4, de los desarrollos de Taylor de las respectivas funciones; de hecho, por el mismo procedimiento se pueden encontrar más infinitésimos equivalentes. Por ejemplo, se precisará el significado de la igualdad siguiente, válida para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen}(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots ,$$

y de aquí se deducirá que, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0,

$$\operatorname{sen}(x_n) - x_n \sim -{x_n}^3/3!\,.$$

Proposición 2.29 (Infinitos equivalentes).

(I) Sea $P(x) = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_k\, x^k$ un polinomio de grado $k \geq 1$ ($a_k \neq 0$). Entonces la sucesión $\{P(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{a_k\, n^k\}_{n=1}^{\infty}$.

(II) **Fórmula de Stirling**: La sucesión $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la sucesión $\{n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,\}_{n=1}^{\infty}$.

2.4. Principio del encaje de intervalos. Criterio de convergencia de Cauchy.

El Axioma de Completitud es equivalente al resultado que se presenta a continuación y que resulta ser bastante útil a la hora de demostrar ciertas proposiciones, principalmente referidas al concepto de límite.

Teorema 2.30 (del encaje de intervalos). Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado de la recta real. Se supone que:

(i) $I_{n+1} \subset I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si $n \geq n_0$ se tiene $b_n - a_n < \varepsilon$.

Existe entonces un único $x \in \mathbb{R}$ que pertenece a cada uno de los intervalos I_n, es decir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}\,,$$

de hecho $x = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 2.31 (de Bolzano-Weierstrass). Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, entonces tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que es convergente.

Definición 2.32. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión es *de Cauchy* si verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada par de números naturales $n, m \geq n_0$ se tiene que $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Proposición 2.33 (Criterio de convergencia de Cauchy). Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy.

Nótese que, mientras que para aplicar el criterio de convergencia dado por la definición 2.6 es necesario el conocimiento previo de dicho límite, no sucede lo mismo en este caso. Por lo tanto, este criterio es útil cuando es imposible determinar, a priori, el posible límite de la sucesión.

Ejercicios propuestos

2.1 Se consideran las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{y} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

(I) Probar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada superiormente.

(II) Probar que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente.

(III) Probar que ambas sucesiones convergen hacia un mismo límite.

Nota: Dicho límite, que se llama *número* e, es aproximadamente $2'7182818\ldots$ Obviamente, se verifica que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n < e < b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, con $x_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + {}^1\!/\!_{x_n}\right)^{x_n} = e. \tag{2.1}$$

2.3 Probar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

es creciente y está acotada superiormente.

2.4 Estudiar la monotonía de las sucesiones de término general:

(I) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$ (II) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}}$

(III) $\dfrac{n^2+5n+7}{(n+2)!}$ (IV) $\dfrac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)}$, $\alpha > 0$.

2.5 Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4, \text{ si } n \geq 1.$$

Demostrar que $a_n < 6$ para cada número natural n, y que la sucesión es creciente.

2.6 Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de término general

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

no está acotada.
Indicación: Véase el ejercicio 1.5.III.

2.7 Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$.

(i) Demostrar que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para cada $n \geq 3$.

(ii) Demostrar que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{3}{2}$ para cada $n \geq 7$.

2.8 Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$a_1 = \sqrt{2}; \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad \text{si } n \geq 1.$$

Probar que la sucesión es creciente y está acotada.

2.9 Sea α un número real con $0 \leq \alpha \leq {}^1\!/\!_4$; se define la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$a_1 = \alpha; \qquad a_{n+1} = \alpha + {a_n}^2, \quad \text{si } n \geq 1.$$

Probar que la sucesión es creciente y está acotada.

2.10 Sea α un número real positivo.

(i) Probar que $\dfrac{4\alpha^2}{1+4\alpha^2} \leq \alpha$.

(ii) Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$a_1 = \alpha; \qquad a_{n+1} = \frac{4{a_n}^2}{1+4{a_n}^2}, \quad \text{si } n \geq 1.$$

Probar que la sucesión está acotada inferiormente y es decreciente.

2.11 Determinar el límite, si existe, de las sucesiones definidas en los ejercicios del 2.5 al 2.10.

2.12 Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recurrentemente por

$$a_1 = 14\,; \qquad a_{n+1} = {a_n}^2 - 2\,, \quad n \geq 1\,.$$

Probar por inducción que, para todo número natural n, el número

$$\sqrt{3({a_n}^2 - 4)}$$

es entero y divisible por 4. Deducir que existen infinitos triángulos tales que las medidas de sus lados son enteros consecutivos y el área es asimismo un entero.
Indicación: Hágase uso de la *fórmula de Heron*, que afirma que el área de un triángulo es igual a $\sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$, siendo a, b y c las longitudes de sus lados y s el *semiperímetro* $s = (a+b+c)/2$.

2.13 Problemas propuestos en examen:
11 Febrero 2000, examen del primer parcial, problema 1.
24 Junio 2000, examen final, problema 1.
2 Febrero 2001, examen del primer parcial, problema 1 y cuestión 1.
8 Febrero 2002, examen del primer parcial, problema 1.
10 Febrero 2003, examen del primer parcial, problema 1, apartados a) y b).
30 Junio 2003, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 1.
13 Febrero 2004, examen del primer parcial, problema 1.
29 Junio 2004, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 1.
31 Enero 2005, examen del primer parcial, problema 1.
1 Febrero 2006, examen del primer parcial, problema 1, apartados a) y b).
1 Febrero 2007, examen del primer parcial, problema 1.
23 Noviembre 2007, examen adicional, problemas 1 y 2.
21 Noviembre 2008, examen adicional, problemas 1 y 4.
25 Noviembre 2009, examen adicional, problema 2.
9 Febrero 2010, examen del primer parcial, problema 3.
18 Junio 2010, examen final, problema 1.
27 Octubre 2010, prueba de evaluación continua, problemas 1 y 2.
1 Diciembre 2010, prueba de evaluación continua, problema 1.
22 Noviembre 2011, segunda prueba de evaluación continua, problema 4.
26 Enero 2012, examen del primer parcial, problema 1.
18 Julio 2012, examen extraordinario, problema 1, apartados del (a) al (d).
22 Noviembre 2012, primera prueba de evaluación continua, problema 3.
7 Febrero 2013, examen del primer parcial, problema 1.
1 Julio 2013, examen extraordinario, problema 1, apartados a) y b).
20 Noviembre 2013, primera prueba de evaluación continua, problema 3.
6 Febrero 2014, examen del primer parcial, problema 1.

2.14 Dar una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de números enteros sea convergente.

2.15 Sea σ una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Se supone que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales converge hacia a. Demostrar que la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ también converge hacia a.

2.16 Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales y $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sendas subsucesiones de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ verificando que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe, bien $j \in \mathbb{N}$ tal que $n = n_j$, bien $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m_k$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite ℓ (finito o infinito) si, y sólo si, las dos subsucesiones $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tienen límite ℓ.

2.17 Dar un ejemplo de dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales, con $b_n \neq 0$ para cada n, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y de manera que la sucesión $\left\{a_n/b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ no tenga límite (ni finito ni infinito).

2.18 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números reales definida por

$$x_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}\,.$$

(i) Demostrar que para cada número natural n se verifica que $\sqrt{n} \leq x_n \leq 2\sqrt{n}$.
(ii) Probar que la sucesión $\{x_n/\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 1.
(iii) Determinar el límite de $\{x_n - \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$.

2.19 Estudiar la existencia de límite para la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en los siguientes casos:

(I) $a_n = b^n$, $b \in \mathbb{R}$ (II) $a_n = \sqrt[n]{c}$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ (III) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

2.20 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales para la cual existe un número real K, con $0 \leq K < 1$, y tal que, para cada número natural $n \geq 2$, se tiene que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq K\,|x_n - x_{n-1}|.$$

Demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy (y por tanto convergente).

2.21 Estudiar la convergencia de las sucesiones de término general:

(I) $\Big(1 + (-1)^n\Big)\dfrac{1}{2^n} + \Big(1 + (-1)^{n+1}\Big)\dfrac{n}{2}$ (II) $\operatorname{sen}^n\Big(\dfrac{2\pi n}{3}\Big)$

(III) $\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)\cos(n\pi)$ (IV) $\dfrac{[n/3]}{5n+1}$, donde $[x]$ denota la parte entera del número real x.

2.22 Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales positivos.

(I) Demostrar que si $a_n \sim b_n$, no tiene por qué verificarse que

$$e^{a_n} \sim e^{b_n}, \quad \text{ni} \quad \log(a_n) \sim \log(b_n), \quad \text{ni} \quad {a_n}^n \sim {b_n}^n.$$

(II) Demostrar que si $a_n \sim b_n$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite, finito o infinito, distinto de 1, entonces $\log(a_n) \sim \log(b_n)$.

(III) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y $a_n \sim b_n$, entonces $e^{a_n} \sim e^{b_n}$.

(IV) Si $a_n \sim b_n$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces ${a_n}^{c_n} \sim {b_n}^{c_n}$.

2.23 Demostrar que:

(I) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (II) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ a \in \mathbb{R}$

(III) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0,\ a > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (IV) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0.$

2.24 Calcular el límite de las sucesiones de término general:

(I) $a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, $p \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ y $a_p \neq 0$.

(II) $\dfrac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ para todos $i, j,$, $a_p \neq 0$ y $b_q \neq 0$.

(III) $\dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ (IV) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a \geq b \geq 0$. (V) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$

(VI) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\,\operatorname{sen}(n!)}{n+1}$ (VII) $(-1)^n\Big(\operatorname{sen}(\sqrt{n+1}) - \operatorname{sen}(\sqrt{n})\Big)$ (VIII) $\sqrt[3]{n^3 + \alpha n^2} - \sqrt[3]{n^3 - \alpha n^2}$

(IX) $n\Big(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\Big)$ (X) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}}$

(XI) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$, $k \in \mathbb{N}$ fijo

(XII) $\Big(\dfrac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 5n + 7}\Big)^n$ (XIII) $\Big(\dfrac{n^2 + 1}{n^2 - 3}\Big)^{2n^2+4}$ (XIV) $\left(\dfrac{1 + \operatorname{tg}(1/n)}{1 - \operatorname{tg}(1/n)}\right)^n$

(XV) $\Big(\dfrac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3}\Big)^n$, $a, b, c > 0$ (XVI) $\dfrac{\cos(1/n) - \sqrt{\cos(2/n)}}{\operatorname{sen}^2(1/n)}$

(XVII) $\dfrac{\Big(1 - \cos(2/n)\Big)\log(1 + 1/n)}{n\,(e^{1/n} - 1)\operatorname{tg}^2(1/n)\operatorname{sen}(2/n)}$ (XVIII) $n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}\Big(\frac{1}{n^2 + \sqrt{k}}\Big)$

(XIX) $\left(\dfrac{\cos(\theta + 1/n)}{\cos(\theta)}\right)^n$, $\cos(\theta) \neq 0$ (XX) $x_n\,(2^{x_n} - 3^{x_n})$, siendo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

(XXI) $\dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\Big)^2$ (XXII) $\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)^{\frac{1/n^3\,\mathrm{sen}(1/n)}{1-\cos(1/n)}}$

(XXIII) $\Big(\dfrac{\mathrm{sen}(2\,x_n)}{x_n}\Big)^{1+x_n}$ y $\dfrac{1-\cos\big(1-\cos(x_n)\big)}{{x_n}^4}$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

(XXIV) $\dfrac{(a^{x_n}-1)\log(1-{x_n}^2)}{\big((1-{x_n}^2)^p-1\big)\,\mathrm{arcsen}(x_n)}$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $a>0$, $p\in\mathbb{N}$

(XXV) $\big(a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0\big)^{1/\log(n)}$, $p\geq 1$, $a_p>0$

(XXVI) $\dfrac{1-\cos\big(\mathrm{tg}^2(1/n)\big)}{2\,\mathrm{sen}^4(1/n)+\mathrm{sen}^5(1/n)}$ (XXVII) $\cos\big(\pi/2^2\big)\cos\big(\pi/2^3\big)\cdots\cos\big(\pi/2^n\big)$

(XXVIII) $\Big(\dfrac{n+2}{3\,n^2-1}\Big)^{\frac{1}{\log(n+3)}}$ (XXIX) $\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}}$.

2.25 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Demostrar:

(I) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (finito o infinito), entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = x$.

(II) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n>0$ para cada n, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n} = x$.

(III) Si $x_n>0$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = x$.

(IV) El recíproco de (III) no es cierto.

2.26 Calcular el límite de las sucesiones de término general:

(I) $\dfrac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}$ (II) $\dfrac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}$

(III) $\dfrac{\mathrm{sen}(\alpha)+2^2\,\mathrm{sen}\big(\alpha/2\big)+\ldots+n^2\,\mathrm{sen}\big(\alpha/n\big)}{n^2}$

(IV) $\big(n!\big)^{\frac{1}{n\log(n)}}$ (V) $\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ (VI) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$

(VII) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ (VIII) $\sqrt[n^2]{\dbinom{n}{1}\dbinom{n}{2}\cdots\dbinom{n}{n}}$ (IX) $\sqrt[n^2]{2^n\,n!}$.

2.27 Problemas propuestos en examen:

11 Febrero 2000, examen del primer parcial, cuestión 1.
29 Junio 2001, examen final, cuestión 1.
14 Septiembre 2001, examen extraordinario, cuestión 1.
8 Febrero 2002, examen del primer parcial, cuestión 1.
29 Junio 2002, examen final, cuestión 1.
10 Febrero 2003, examen del primer parcial, cuestión 1.
30 Junio 2003, examen final, cuestión 1.
29 Junio 2004, examen final, problema 1, apartado (a).
31 Enero 2005, examen del primer parcial, cuestión 1.
30 Junio 2005, examen final, primer parcial, problema 2, apartado a).
12 Septiembre 2005, examen extraordinario, cuestión 1.
1 Febrero 2006, examen del primer parcial, cuestión 1.
30 Junio 2006, examen final, primer parcial, problema 2, apartado (a).
1 Febrero 2007, examen del primer parcial, cuestión 1.
29 Junio 2007, examen final, primer parcial, problema 2, apartado a), y cuestión 1.
23 Noviembre 2007, examen adicional, problema 3.
31 Enero 2008, examen del primer parcial, cuestión 1.
29 Junio 2009, examen final, primer parcial, cuestión 3.
9 Septiembre 2009, examen extraordinario, cuestión 1.
18 Junio 2010, examen final, primer parcial, problema 2 y cuestión 1.
13 Septiembre 2010, examen extraordinario, cuestión 1.
22 Noviembre 2011, segunda prueba de evaluación continua, problemas 2 y 3.

26 Enero 2012, examen del primer parcial, cuestión 1.
19 Junio 2012, examen final, toda la asignatura, cuestión 1.
18 Julio 2012, examen extraordinario, cuestión 1.
22 Noviembre 2012, primera prueba de evaluación continua, problema 2.
7 Febrero 2013, examen del primer parcial, cuestión 2.
20 Noviembre 2013, primera prueba de evaluación continua, problema 2.
6 Febrero 2014, examen del primer parcial, cuestión 1.
5 Junio 2014, examen final, toda la asignatura, cuestión 1.
2 Julio 2014, examen extraordinario, cuestión 1.

2.28 Demostrar que la sucesión $\{\operatorname{sen}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite.
Indicación: Razonar por reducción al absurdo y, utilizando relaciones trigonométricas adecuadas, llegar a contradicción.

2.29 Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones crecientes de números positivos tales que $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

2.30 Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales tales que para cada número natural n se tiene que

$$\big(a_n - b_n\big)\big(b_n - c_n\big) > 0\,.$$

Sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, estudiar la convergencia de la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.31 Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$a_1 = 1\,; \qquad a_{n+1} = \frac{e^{-a_n}}{n+1}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Demostrar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un infinitésimo equivalente a la sucesión $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.32 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ (finito o infinito). Calcular, en caso de que exista,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{{a_n}^n}{a_1 a_2 \cdots a_n}}\,.$$

2.33 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Se define recurrentemente la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_1 = \frac{a^2 - b^2}{a - b}\,; \qquad x_2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}\,; \qquad x_n = (a+b)\,x_{n-1} - a\,b\,x_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,.$$

Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.34 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales que verifica

$$x_{n+1} \leq {x_n}^2 \leq x_{n-1} \quad \text{para cada} \quad n \geq 2\,.$$

Indicar si es convergente tal sucesión. En caso afirmativo precisar su límite.

Tema 3

Funciones reales de variable real
Límites y continuidad

El desarrollo de la Ciencia (y por tanto de la Matemática) en los siglos XVII y XVIII estaba regido por el principio filosófico de que la naturaleza es "regular", es decir, objetos próximos tienen propiedades parecidas. Sin embargo, esta noción de continuidad no fue establecida de modo riguroso hasta bastante más tarde.

Los conceptos y propiedades que tratamos en este tema, en particular las nociones de entorno y de límite, van dirigidos a precisar cómo se debe entender la proximidad a que antes hemos hecho referencia, y son la base del *Cálculo Infinitesimal*. La clave se encuentra en que el valor absoluto dado en la recta real permite definir una *distancia* entre los puntos de $\mathbb{R}$; dicho de otra forma, dos puntos x, $y \in \mathbb{R}$ estarán "próximos" si $|x - y|$ es "pequeño".

3.1. Nociones de topología

Bajo este primer epígrafe se presentan las nociones más elementales de la topología de la recta real, aquéllas que serán necesarias para el estudio de la continuidad y la derivabilidad de las funciones de variable real.

Definición 3.1. Sea x un punto de la recta real. Si ε es un número real positivo, el *entorno abierto centrado en* x *y de radio* ε es el intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}$.

Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un *entorno* del punto $x \in \mathbb{R}$ si existe un entorno centrado en x y de radio ε tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$. También se dice en este caso que el punto x es *interior* al conjunto A.

Definición 3.2. Se dice que un subconjunto A de la recta real es *abierto* si es vacío o si es entorno de todos sus puntos, es decir, si se verifica que:

Para cada $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ (que depende de x) tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

Definición 3.3. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, el conjunto de los puntos $x \in \mathbb{R}$ que son interiores a A se denomina *interior* de A y se denota por '$\overset{\circ}{A}$' o '$\operatorname{int}(A)$'.

Proposición 3.4. Si $A \subset \mathbb{R}$ entonces $\overset{\circ}{A}$ es un conjunto abierto y $\overset{\circ}{A} \subset A$. Además, A es abierto si, y sólo si, $A = \overset{\circ}{A}$.

Definición 3.5. Sean C un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Se dice que x es *adherente* al conjunto C si para cada entorno V del punto x se tiene que $V \cap C \neq \emptyset$.

Observaciones 3.6.

(i) En la práctica el enunciado anterior se puede mejorar en el sentido de que sólo es necesario que dicha propiedad se verifique para los entornos centrados en el punto x, es decir, x es adherente a C si para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C \neq \emptyset$.

(ii) Hablando de forma coloquial, el hecho de que x sea adherente a C viene a decir que en el conjunto C hay puntos tan próximos a x como se quiera.

Definición 3.7. Dado un subconjunto C de $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ que son adherentes a C se llama *adherencia* (o *clausura*) del conjunto C y se denota por '$\overline{C}$' o '$\mathrm{cl}(C)$'.

Definición 3.8. Sean C un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Se dice que x es un *punto de acumulación* del conjunto C si para cada entorno V de x se tiene que $\big(V \setminus \{x\}\big) \cap C \neq \emptyset$ o, equivalentemente, si para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $\big((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}\big) \cap C \neq \emptyset$.

Si C es un subconjunto de $\mathbb{R}$, el conjunto de todos sus puntos de acumulación se denomina *derivado* de C y se denota por 'C''.

Observaciones 3.9.

(i) Si x es un punto de acumulación del conjunto C, entonces x es adherente a C.

(ii) El hecho de que el punto x sea de acumulación del conjunto C significa que en C hay puntos tan próximos a x como se quiera, pero distintos de él.

(iii) De todo lo anterior se deduce fácilmente que si $C \subset \mathbb{R}$, entonces $\overline{C} = C \cup C'$.

Definición 3.10. Se dice que un subconjunto C de la recta real es *cerrado* si es vacío o si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Proposición 3.11. Un subconjunto C de la recta real es cerrado si, y sólo si, su complementario $\mathbb{R} \setminus C$ es abierto (de otro modo, un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es abierto si, y sólo si, $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado).

Proposición 3.12. Si $C \subset \mathbb{R}$ entonces $\overline{C}$ es un conjunto cerrado y $C \subset \overline{C}$. Además, C es cerrado si, y sólo si, $C = \overline{C}$.

Ejemplos 3.13.

(i) Un intervalo abierto $I = (a, b)$ es un conjunto abierto pero no es cerrado (obsérvese que a y b son adherentes a I pero no pertenecen a él).

(ii) Un intervalo cerrado $I = [a, b]$ es un conjunto cerrado pero no es abierto (obsérvese que a y b no son interiores a I pero pertenecen a él).

(iii) En los dos ejemplos anteriores el interior de los conjuntos es el intervalo (a, b) y sus adherencias coinciden con sus conjuntos derivados, que resultan ser el intervalo $[a, b]$.

(iv) A diferencia de su significado etimológico, los conceptos topológicos *abierto* y *cerrado* no son antónimos (que un conjunto no sea cerrado no significa que sea abierto). Como muestra, considérese el conjunto $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$; este conjunto no es cerrado ni abierto. Su interior es el conjunto vacío, su derivado es el conjunto $\{0\}$ y su adherencia es $C \cup \{0\}$. Por otra parte, la recta real es un conjunto abierto y cerrado a la vez.

Con vistas a futuras aplicaciones, son interesantes las caracterizaciones secuenciales de los conceptos antes introducidos que se exponen en la siguiente proposición.

Proposición 3.14. Sean B un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$.

(i) El punto x es interior a B si, y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales que converge hacia x existe un número natural n_0 tal que $x_n \in B$ para todo $n \geq n_0$.

(ii) El punto x es adherente a B si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de B que converge hacia x.

(iii) El punto x es de acumulación de B si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de B, distintos todos ellos de x, que converge hacia x.

La *compacidad* juega un papel fundamental en el estudio de ciertas propiedades de funciones continuas. En realidad, esta noción se puede enunciar en espacios más generales que la recta (incluso careciendo de una distancia). Aunque la definición general es distinta de la que aquí se da, al particularizarla a $\mathbb{R}$ equivale a la siguiente.

Definición 3.15. Se dice que un subconjunto K de la recta real es *compacto* si es simultáneamente cerrado y acotado.

Proposición 3.16. Sea K un subconjunto de la recta real. Son equivalentes:

(i) K es compacto.

(ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de K existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge hacia un punto de K.

3.2. Límites finitos

Para poder hablar del límite de una función en un punto es necesario que dicho punto esté cercano al dominio de definición de la función. Precisando más, ello se traduce en que el citado punto sea de acumulación de tal conjunto (aun cuando no pertenezca a él).

Lo mismo sucede al considerar límites en el infinito, es decir, el comportamiento asintótico de la función cuando la variable se hace arbitrariamente grande o pequeña. Para poder contemplar estos casos se requiere que el dominio de definición de la función no esté acotado superior o inferiormente, según corresponda. Haremos notar también que el límite de una sucesión no será otra cosa que el límite en $+\infty$ de una función definida en el subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$.

Definición 3.17. Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f *tiene límite* (*finito*) *cuando* x *tiende hacia* a si existe un número real ℓ verificando la siguiente propiedad:

Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que, para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$ con $x \neq a$ (es decir, para cada $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$), se tiene que

$$f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \qquad \text{(es decir, } |f(x) - \ell| < \varepsilon\text{)}.$$

En este caso el número ℓ se denomina *límite* de la función f en a.

Proposición 3.18. En las condiciones de la definición anterior, si la función f tiene límite en el punto a, este límite es único.

Notación: Si la función f tiene límite ℓ en a, se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Definición 3.19. Sean A subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente (resp. inferiormente) y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Se dice que f *tiene límite* (*finito*) *cuando* x *tiende hacia* ∞ (resp. *hacia* $-\infty$) si existe un número real ℓ verificando la siguiente propiedad:

Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $M > 0$ (resp. $N < 0$) tal que, para cada $x \in A$ con $x > M$ (resp. $x < N$), se tiene que

$$f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \qquad \text{(es decir, } |f(x) - \ell| < \varepsilon\text{)}.$$

El número ℓ se denomina *límite* de f en ∞ (resp. $-\infty$).

Proposición 3.20. En las condiciones de la definición anterior, si la función f tiene límite cuando x tiende hacia ∞ (resp. $-\infty$), éste es único.

Notación: Si la función f tiene límite ℓ cuando x tiende hacia ∞, se escribe

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \ell.$$

Análogamente, la expresión

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

significa que f tiene límite ℓ cuando x tiende hacia $-\infty$.

Definición 3.21. Sea f una función definida en un conjunto X a valores reales. Se dice que f es *acotada* en X si existen α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \le f(x) \le \beta \qquad \text{para cada } x \in X,$$

o equivalentemente, si existe $M \ge 0$ tal que

$$|f(x)| \le M \qquad \text{para cada } x \in X.$$

Proposición 3.22. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función que tiene límite finito en el punto $a \in A'$. Entonces existe un número real $\delta > 0$ tal que f está acotada en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$.

Proposición 3.23 (Conservación de signo). Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in A'$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función que tiene límite finito $\ell \neq 0$ en el punto a. Entonces existe un número real $\delta > 0$ tal que f conserva el mismo signo que ℓ en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$. Explícitamente:

(i) Si $\ell > 0$, dado α con $0 < \alpha < \ell$, existe un número real $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$ con $x \neq a$, se verifica que $f(x) > \alpha$.

(ii) Si $\ell < 0$, dado β con $\ell < \beta < 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$ con $x \neq a$, se verifica que $f(x) < \beta$.

Proposición 3.24. Sean f y g funciones reales definidas en un mismo subconjunto A de $\mathbb{R}$, y sea a un punto de acumulación de A. Se supone que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y que g está acotada en $\big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big) \cap A$ para algún $\delta > 0$. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) \;=\; 0\,.$$

Observación 3.25. Las tres proposiciones anteriores, que se enunciaron para el caso de límite de una función en un punto, son igualmente válidas, tras las modificaciones oportunas, para el caso de límites en ∞ ó $-\infty$. Por ejemplo:

Si f es una función definida en el conjunto A, no acotado superiormente, y existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, entonces existe un número real $M > 0$ tal que la función está acotada en el conjunto $A \cap (M, \infty)$.

3.2.1. Límites finitos siguiendo subespacios

La teoría que presentamos ahora constituye un herramienta deductiva bastante potente a la hora de determinar la existencia de límites; en concreto, proporciona criterios negativos (es decir, que niegan la existencia de límite) muy útiles en la práctica.

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in A'$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Si $B \subset A$ y a es también punto de acumulación de B, tiene sentido considerar $f_{|B}$, la restricción de f a B, y el posible límite $\lim\limits_{x\to a} f_{|B}(x)$. Este límite, si existe, se denomina *límite de f en a siguiendo* (o *a través de*) *el subespacio* B, y se denota por

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)\,.$$

Análogamente se definen los límites a través de subespacios en ∞ ó $-\infty$; en este caso se requiere, por supuesto, que el conjunto B no esté acotado superior o inferiormente, según corresponda.

Un caso particular se tiene al considerar los subconjuntos

$$A^+ = \{x \in A \,:\, a < x\} = A \cap (a, \infty) \qquad \text{y} \qquad A^- = \{x \in A \,:\, x < a\} = A \cap (-\infty, a)\,.$$

Si a es un punto de acumulación de A^+ (resp. de A^-), el límite de f en a a través de A^+ (resp. de A^-), si existe, se denomina *límite lateral por la derecha* (resp. *por la izquierda*) de f en el punto a, y se denota por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \Big(\text{resp. } \lim_{x\to a^-} f(x)\Big)\,.$$

Teorema 3.26. Sean f una función real definida en el conjunto A y a un punto de acumulación de A. Son equivalentes los siguientes enunciados:

(i) f tiene límite en el punto a.

(ii) Para cada subconjunto $B \subset A$ tal que $a \in B'$, f tiene límite en a a través de B.

Si se cumplen (i) y (ii), el valor de los límites mencionados en ambos es el mismo.

Destacamos las dos siguientes aplicaciones de este resultado.

Corolario 3.27. En las condiciones anteriores, se supone además que el punto a es de acumulación de los conjuntos A^+ y A^-. Son equivalentes:

(i) f tiene límite en el punto a.

(ii) Existen los dos límites laterales de f en el punto a y coinciden.

Si se cumplen (i) y (ii), el valor de los límites mencionados en ambos es el mismo.

Proposición 3.28 (Criterio secuencial).

(i) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Son equivalentes los siguientes enunciados:

(i.1) f tiene límite (finito) en a.

(i.2) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converge hacia a y con $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Además, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converge hacia a, con $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente (resp. inferiormente) y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(ii.1) f tiene límite (finito) en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

(ii.2) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A con $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$), la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Además, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que tiende a ∞ (resp. a $-\infty$).

3.2.2. Propiedades de los límites finitos

Enunciamos a continuación algunas propiedades en el caso de límites en un punto de $\mathbb{R}$, pudiéndose formular propiedades análogas para los límites en ∞ ó $-\infty$, lo que se deja como ejercicio al lector.

Las demostraciones de estos resultados se pueden realizar directamente usando la definición de límite, o aplicando el criterio secuencial y teniendo en cuenta las propiedades análogas de sucesiones convergentes enunciadas en el tema 2, cuya referencia damos entre paréntesis.

Propiedades 3.29. Sean f, g y h funciones reales definidas en un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$, y a un punto de acumulación de A.

(I) Si la función f tiene límite ℓ en a, entonces la función $|f|$ tiene límite $|\ell|$ en el punto a. El recíproco, en general, no es cierto; no obstante, es inmediato de la definición que f tiene límite 0 en a si, y sólo si, la función $|f|$ tiene límite 0 en a. (ver 2.11.III)

(II) Sea $\beta \in \mathbb{R}$. Si la función f tiene límite ℓ en a, y para cada $x \in A$ se tiene que $\beta \leq f(x)$ (resp. $f(x) \leq \beta$), entonces $\beta \leq \ell$ (resp. $\ell \leq \beta$). (ver 2.11.V)

(III) Supongamos que las funciones f y g tienen límites ℓ y k, respectivamente, en a. Entonces:

(i) La función $f+g$ tiene límite $\ell + k$ en a.

(ii) La función fg tiene límite ℓk en a.

(iii) Si además $k \neq 0$, la función f/g, bien definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, tiene límite ℓ/k en a.

(iv) Si además $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in A$, se tiene que $\ell \leq k$. (ver 2.11.VI)

(IV) Si las funciones f y h tienen límite ℓ en a, y además $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para cada $x \in A$, entonces g tiene límite en a y vale ℓ (*criterio del sandwich*). (ver 2.11.VII)

(V) Si la función f tiene límite $\ell > 0$ en a, entonces la función $\log(f)$, que está definida (en virtud de la Proposición 3.23) en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, tiene límite $\log(\ell)$ en a. (ver 2.11.VIII)

(VI) Si la función f tiene límite ℓ en a, entonces la función e^f tiene límite e^ℓ en a. (ver 2.11.IX)

(VII) Si las funciones f y g tienen límites ℓ y k, respectivamente, en a, con $\ell > 0$, entonces la función f^g, que está definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, tiene límite ℓ^k en a. (ver 2.11.X)

3.3. Límites infinitos

El concepto de límite infinito se enuncia en términos semejantes, sustituyendo la noción de proximidad por la condición de que los valores de la función, positivos o negativos, se hagan arbitrariamente grandes en valor absoluto.

Definición 3.30. Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f *tiene límite* ∞ (resp. $-\infty$) *cuando* x *tiende hacia* a si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $K > 0$ (resp. $K < 0$) existe un número real $\delta > 0$ (que depende de K) tal que, para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$ con $x \neq a$, se tiene que $f(x) > K$ (resp. $f(x) < K$).

Notación: Si f tiene límite ∞ (resp. $-\infty$) en a, también se dice que f *tiende a* ∞ (resp. $-\infty$) en a, y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad (\text{resp. } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\,).$$

Definición 3.31. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f *tiene límite* ∞ (resp. $-\infty$) *cuando* x *tiende hacia* ∞ si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $K > 0$ (resp. $K < 0$) existe un número real $M > 0$ tal que, para cada $x \in A$ con $x \geq M$, se tiene que $f(x) > K$ (resp. $f(x) < K$).

Notación: Si la función f tiene límite ∞ cuando x tiende hacia ∞ también se dice que f *tiende a* ∞ en ∞ y se representa por

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

De la misma forma, si f tiene límite $-\infty$ cuando x tiende hacia ∞ se escribe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Análogamente se definen los límites infinitos en $-\infty$ para funciones f definidas en conjuntos no acotados inferiormente, denotados respectivamente por

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Al igual que en el caso de límite finito, es posible considerar en el que ahora nos ocupa límites a través de subespacios. El teorema 3.26 se verifica igualmente para límites infinitos; asimismo, los criterios de límites laterales 3.27 y secuencial 3.28 se adaptan a esta situación sin más que sustituir en ellos el límite finito ℓ por ∞ ó $-\infty$.

Dejamos como ejercicio al lector que enuncie y demuestre dichos resultados.

Como antes, se enuncian a continuación propiedades correspondientes al caso de límite en un punto $a \in \mathbb{R}$, dejando que el lector las generalice para los límites en ∞ ó $-\infty$. Los números entre paréntesis hacen de nuevo referencia a las propiedades de sucesiones dadas en el tema 2.

Propiedades 3.32 (Propiedades de los límites infinitos). Sean f y g funciones reales definidas en un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$, y a un punto de acumulación de A.

(I) Si la función f tiende a ∞ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a y para cada $x \in A$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$ (resp. $g(x) \leq f(x)$), entonces la función g tiende a ∞ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a. (ver 2.20.II)

(II) Si f tiende a ∞ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a y g está acotada inferiormente (resp. superiormente) en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, entonces $f+g$ tiende a ∞ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a.

En particular, la propiedad se verifica cuando g tiene límite finito en a. (ver 2.20.III)

(III) Si la función f tiene límite infinito cuando x tiende hacia a y g tiene límite finito y no nulo en a, entonces la función fg tiende hacia ∞ ó $-\infty$ (según la regla de los signos) cuando x tiende hacia a. Lo mismo sucede con $f/_g$, que está bien definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$. (ver 2.20.IV, 2.20.V)

(IV) Si la función f tiene límite finito no nulo o límite infinito cuando x tiende hacia a, y la función g tiene límite 0 en a, existiendo $\delta > 0$ tal que g no se anula en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$, entonces la función $f/_g$:

(i) tiende hacia ∞ o $-\infty$ (según la regla de los signos) siempre que g tenga signo constante en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$.

(ii) no tiene límite (ni finito ni infinito) si g no tiene signo constante en ningún entorno de a. (ver 2.20.VI)

(V) Si f está acotada en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$ y g tiene límite infinito cuando x tiende hacia a, entonces $f/_g$ tiene límite 0 en a.

En particular, la propiedad se verifica si f tiene límite finito en a. (ver 2.20.VII)

(VI) Si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ y f tiene límite 0 (resp. ∞) cuando x tiende hacia a, entonces la función $\log(f)$ tiene límite $-\infty$ (resp. ∞) en a. (ver 2.20.VIII)

(VII) Si la función f tiene límite $-\infty$ (resp. ∞) cuando x tiende hacia a, entonces la función e^f tiene límite 0 (resp. ∞) en a. (ver 2.20.IX)

(VIII) Se supone que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$, y que f tiene límite 0 cuando x tiende hacia a.

(i) Si g tiene límite finito $\ell > 0$ o si tiende a ∞ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a.

(ii) Si g tiene límite finito $\ell < 0$ o si tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a ∞ cuando x tiende hacia a. (ver 2.20.X)

(IX) Se supone que f tiende a ∞ cuando x tiende hacia a; esto implica la existencia de un número $\delta > 0$ tal que la función f^g está bien definida para $x \in A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$.

(i) Si g tiene límite finito $\ell > 0$ o si tiende a ∞ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a ∞ cuando x tiende hacia a.

(ii) Si g tiene límite finito $\ell < 0$ o si tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a. (ver 2.20.XI)

(X) Se supone que f tiene límite ℓ en el punto a, con $0 < \ell < 1$ (resp. $\ell > 1$). De nuevo, las condiciones sobre el límite garantizan que f^g está definida en la intersección de un entorno de a con $A \setminus \{a\}$.

(i) Si g tiende a ∞ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 (resp. tiende hacia ∞) en a.

(ii) Si g tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a ∞ (resp. tiene límite 0) cuando x tiende hacia a. (ver 2.20.XII)

Observación 3.33 (Indeterminaciones). Al igual que sucede en el caso de sucesiones numéricas, hay situaciones en las que la existencia de límite para las funciones f y g no garantiza nada acerca del posible límite de las funciones $f+g$, $f\,g$, $f/_g$ o f^g.

Como muestra presentamos un caso para límites en un punto $a \in A'$, dejando que el lector adapte el resto siguiendo la pauta de las Observaciones 2.21.

Si f tiende a ∞ y g tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función $f+g$. Es decir, $f+g$ puede tener límite finito o infinito o carecer de límite en a. (ver 2.21.I)

3.4. Notación de Landau

En el estudio asintótico de funciones son de gran utilidad los conceptos que presentamos a continuación. En particular, el concepto de funciones equivalentes se desarrolla en total paralelismo con la teoría de sucesiones numéricas.

Definición 3.34 (Notación de Landau). Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y f, g dos funciones reales definidas en A.

(i) Se dice que f es una O de g en el punto a (léase "f es una o grande de g en a"), y se escribe '$f = O(g)$ *en* a', si existen un número $\delta > 0$ y una constante $M \geq 0$ tales que

$$|f(x)| \leq M\,|g(x)| \qquad \text{para cada } x \in A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big).$$

(ii) Se dice que f es una o de g en el punto a (léase "f es una o pequeña de g en a"), y se escribe '$f = o(g)$ *en* a', si existen un número $\delta > 0$ y una función ε definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ con $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ y tal que

$$f(x) = \varepsilon(x)\,g(x) \qquad \text{para cada } x \in A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big).$$

Observaciones 3.35.

(i) Las notaciones '$f = O(g)$ *en* ∞', '$f = o(g)$ *en* ∞', '$f = O(g)$ *en* $-\infty$' y '$f = o(g)$ *en* $-\infty$' se aplican en términos semejantes a los anteriores cuando el conjunto A no está acotado superior o inferiormente. Dejamos que el lector supla los detalles.

(ii) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y f una función real definida en A.

(ii.1) Si $\mu \in \mathbb{R}$ y se denota por $\boldsymbol{\mu}$ a la función constantemente igual a μ en A, el hecho de que $f = O(\boldsymbol{\mu})$ en a significa precisamente que f está acotada en la intersección de A con un entorno del punto a.

(ii.2) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f = o\big((x-a)^n\big)$ en a, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

con lo que f tiende hacia 0 en a "más rápido" que $(x-a)^n$.

Proposición 3.36. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y f, g, h y k funciones reales definidas en A.

(i) Si $f = O(h)$ en a y $g = O(h)$ en a, entonces $f + g = O(h)$ en a.
(ii) Si $f = o(h)$ en a y $g = o(h)$ en a, entonces $f + g = o(h)$ en a.
(iii) Si $f = o(h)$ en a y $g = O(k)$ en a, entonces $f\,g = o(h\,k)$ en a.

3.5. Continuidad

Definición 3.37. Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Si $a \in A$ se dice que f es *continua en el punto* a si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que, si

$$x \in A \quad \text{y} \quad |x-a| < \delta \qquad \big(\text{equivalentemente, } x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A\big),$$

entonces

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \big(\text{equivalentemente, } f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)\big).$$

Se dice que f es *continua en* A si es continua en cada punto de A.

Teorema 3.38. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in A$ un punto de acumulación de A y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:

(i) f es continua en a.
(ii) Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es precisamente $f(a)$.

Observación 3.39. En el resultado anterior se ha requerido que a fuese un punto de acumulación de A, pues en caso contrario no tiene sentido considerar el correspondiente límite.

Cuando un punto b de un conjunto A no es de acumulación de A se dice que es un *punto aislado* de A. No es difícil comprobar que cada función definida en A es continua en todos sus puntos aislados (eligiendo δ suficientemente pequeño, no hay más puntos en A que satisfagan $|x-b| < \delta$ que el propio b, y para él, obviamente, se tiene que $|f(b) - f(b)| = 0 < \varepsilon$).

De cualquier forma, aunque presentamos esta teoría de forma general, para funciones definidas en subconjuntos arbitrarios de la recta, los casos más interesantes, con diferencia, son los que se refieren a funciones definidas en intervalos (pensemos en funciones que describan magnitudes físicas). Recordemos que todos los puntos de un intervalo son de acumulación de dicho conjunto; el lector que así lo prefiera puede pensar que en todos los enunciados el dominio de definición de la función es un intervalo, por lo que será aplicable siempre el teorema anterior.

Ejemplos 3.40.

(i) Toda función constante es continua en su dominio de definición.

(ii) La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$.

(iii) La función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = [x]$ (parte entera de x) no es continua en los puntos de $\mathbb{Z}$. Es continua en todos los demás puntos de $\mathbb{R}$.

Proposición 3.41. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, f una función real definida en A y a un punto de A en el que f es continua.

(i) Existe $\delta > 0$ tal que f es acotada en $(a-\delta, a+\delta) \cap A$.

(ii) Si $f(a) \neq 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$ para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$.

Los criterios relativos a límites siguiendo subespacios, junto con el Teorema 3.38, se traducen en los tres siguientes resultados.

Proposición 3.42. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in A$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto a. Si $B \subset A$ y $a \in B$, entonces la función $f_{|B}$ es continua en a.

Proposición 3.43. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in A$ y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Se supone además que el punto a es de acumulación de los dos subconjuntos A^+ y A^- (lo que implica que $a \in A'$). Son equivalentes:

(i) f es continua en el punto a.

(ii) Existen los dos límites laterales de f en a y coinciden ambos con $f(a)$.

Proposición 3.44. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, f una función real definida en A y a un punto de A. Son equivalentes:

(i) f es continua en a.

(ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A que converge hacia a se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Propiedades 3.45. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de A y f, g funciones reales definidas en A y continuas en el punto a. Se verifica que:

(i) $f+g$, $f\,g$ y $|f|$ son continuas en a.

(ii) Si $g(a) \neq 0$ entonces la función $1/g$, que está bien definida en $(a-\delta, a+\delta) \cap A$ para algún $\delta > 0$, es continua en a.

(iii) Si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.

Presentamos a continuación un concepto más fuerte que el de continuidad, el de *continuidad uniforme*. Observemos que en la definición de función continua el número δ depende de ε, pero también del punto a, aunque no se haya dicho explícitamente. La palabra "uniforme" se refiere a la ausencia de esta dependencia con respecto del punto.

Definición 3.46. Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y f una función real definida en A. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que sólo depende de ε) tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

siempre que $x, y \in A$ con $|x-y| < \delta$.

Proposición 3.47. Si f es una función uniformemente continua en el conjunto A, entonces f es continua en A.

3.6. Teoremas fundamentales de continuidad

Esta sección se dedica a presentar los resultados más importantes sobre funciones continuas. En todos ellos juega un papel relevante la naturaleza del dominio de definición, un intervalo o un conjunto compacto.

Teorema 3.48 (de Bolzano). Sea f una función real definida y continua en el intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Se supone que $f(a)\,f(b) < 0$, es decir, f toma valores no nulos y de signos opuestos en los extremos del intervalo. Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de forma equivalente como sigue.

Proposición 3.49 (Propiedad de Darboux). Sea f una función real definida y continua en el intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, y tal que $f(a) \neq f(b)$. Entonces, para cada número real ξ entre $f(a)$ y $f(b)$ (es decir, $f(a) < \xi < f(b)$ si $f(a) < f(b)$ ó $f(b) < \xi < f(a)$ en caso contrario) existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \xi$.

Corolario 3.50. Sean I un intervalo de la recta real (acotado o no, cerrado o no, etc.) y f una función real definida y continua en I. Si f es no constante, su imagen $f(I)$ es un intervalo.

El siguiente resultado, relativo a funciones continuas en conjuntos compactos, se puede probar fácilmente a partir de la caracterización secuencial de estos conjuntos.

Teorema 3.51 (de Weierstrass). Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (en particular, K puede ser un intervalo cerrado y acotado). Si f es una función real definida y continua en K, entonces f está acotada. De hecho, f alcanza sus extremos, es decir, existen $\alpha,\ \beta \in K$ tales que

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \qquad \text{para cada } x \in K.$$

Se tiene todavía una versión más fuerte del teorema de Weierstrass.

Teorema 3.52. Sea f una función real definida y continua en un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}$. Entonces $f(K)$ es un conjunto compacto.

El recíproco de la Proposición 3.47 no es cierto en general, pero se verifica el siguiente

Teorema 3.53 (de Heine). Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Si f es una función continua en K, entonces f es uniformemente continua en K.

Teorema 3.54 (Continuidad de la función compuesta). Sean A, B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ y f, g sendas funciones reales definidas en A y B, respectivamente, tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en el punto $a \in A$ y g es continua en el punto $b = f(a) \in B$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en a. En consecuencia, si f es continua en A y g es continua en B, entonces $g \circ f$ es continua en A.

Observación 3.55. Relajando las hipótesis del teorema previo, se obtiene el siguiente resultado: Si f tiene límite $b \in B$ en el punto $a \in A \cap A'$ y g es continua en b, entonces

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) \ = \ g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big) \ = \ g(b)\,.$$

Abordamos ahora el problema de la continuidad de la función inversa de una función biyectiva. Cuando el dominio de definición es un intervalo el estudio es bastante simple, y en él es fundamental la noción de monotonía que introducimos seguidamente.

Definición 3.56. Sea f una función definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}$. Se dice que f es *monótona creciente* (resp. *decreciente*) en A si para cada par de puntos $x, y \in A$ tales que $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).

Si $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$) siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, la función se dice *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*). La expresión *estrictamente monótona* se aplica en cualquiera de las dos situaciones anteriores.

Teorema 3.57. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ (de cualquier naturaleza) y f una función definida y continua en I. La condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva en I es que sea estrictamente monótona en I. Es más, f^{-1} es creciente (resp. decreciente) si así lo es f.

Teorema 3.58 (Continuidad de la función inversa). Sea f una función definida, continua e inyectiva en el intervalo I de $\mathbb{R}$. Denotemos por J al conjunto imagen de f (que es un intervalo en virtud del Corolario 3.50). Entonces la función $f^{-1}\colon J \to I$ es continua.

Ejercicios propuestos

3.1 Probar mediante la definición de límite que: (I) $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ (II) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

3.2 Sea f una función monótona en un intervalo (a,b) de la recta real. Probar que para cada $c \in (a,b)$ existen los límites laterales de f en c; concretamente, si f es creciente se tiene que

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \;=\; \inf\{f(x) : x > c\} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) \;=\; \sup\{f(x) : x < c\}\,.$$

Si, por el contrario, f es decreciente en (a,b), entonces

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \;=\; \sup\{f(x) : x > c\} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) \;=\; \inf\{f(x) : x < c\}\,.$$

3.3 Se considera la función f definida en $(0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2\,n\,(n+1)\Big(x - \dfrac{1}{n+1}\Big) & \text{si } x \in \Big[\dfrac{1}{n+1}\,,\, \dfrac{2\,n+1}{2\,n\,(n+1)}\Big], \\ -2\,n\,(n+1)\Big(x - \dfrac{1}{n}\Big) & \text{si } x \in \Big[\dfrac{2\,n+1}{2\,n\,(n+1)}\,,\, \dfrac{1}{n}\Big], \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Representar gráficamente la función f. ¿Tiene f límite en 0?

3.4 Estudiar la existencia de límite en cada punto de las siguientes funciones:

(I) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$ (II) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$ (III) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

3.5 Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}\,, \qquad x \neq 1\,,\, x \neq 0\,.$$

Estudiar la existencia de límite de la función en los puntos 0 y 1.

3.6 Sean $a, b > 0$. Estudiar la existencia del límite en 0 para las funciones

$$f(x) = \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right],$$

definidas para $x \neq 0$ ($[x]$ denota la parte entera de x).

3.7 Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) \;=\; \inf\big\{|x-n| \;:\; n \in \mathbb{Z}\big\}\,.$$

Probar que no existe $\lim_{x\to 0} f\big({}^1\!/_x\big)$ pero sí existe $\lim_{x\to 0} x\, f\big({}^1\!/_x\big)$. Calcular este último límite.

3.8 Sean f, g y h tres funciones definidas en $\mathbb{R}$. Se supone que

$$\lim_{x\to 0} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0} g(x) \;=\; 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \le h(x) \le 1 \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\Big(h(x)\,f(x) + \big(1 - h(x)\big)\,g(x)\Big) \;=\; 1\,.$$

3.9 Se considera la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} A + B\log(x) & \text{si } x > 0\,, \\ C & \text{si } x = 0\,, \\ D\,e^{3x} + \dfrac{E}{x^3} & \text{si } x < 0\,, \end{cases}$$

donde A, B, C, D y E son parámetros reales. Encontrar los valores de los parámetros para los que se verifica:

(I) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ (II) $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

(III) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ (IV) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

3.10 Sean b y α números reales con $b>1$ y $\alpha>0$. Demostrar que:

(I) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{b^x}{x^\alpha} = \infty$. En particular, cuando x tiende a ∞, la función exponencial crece hacia infinito más rápido que cualquier polinomio.

(II) $\lim_{x\to 0^+} b^{1/x} x^\alpha = \infty$. (III) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$. (IV) $\lim_{x\to 0^+} \log(x)\, x^\alpha = 0$.

3.11 Calcular los siguientes límites en caso de que existan:

(I) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ (II) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$ (III) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\exp\left(\sqrt{\log(x)}\right)}{x}$

(IV) $\lim_{x\to\infty} x\left(2^x-3^x\right)$ (V) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+a\,x^2}-\sqrt[3]{x^3-a\,x^2}\right)$ (VI) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\operatorname{sen}^2(x)}$

3.12 Calcular el límite cuando x tiende hacia infinito de las funciones definidas, en intervalos no acotados superiormente adecuados, por las expresiones siguientes:

(I) $a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $p\in\mathbb{N}$, $a_0,a_1,\ldots,a_p\in\mathbb{R}$ y $a_p\neq 0$.

(II) $\dfrac{a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_qx^q+b_{q-1}x^{q-1}+\ldots+b_1x+b_0}$, $p,q\in\mathbb{N}$, $a_i,b_j\in\mathbb{R}$ para todos i,j, y $a_p\neq 0$, $b_q\neq 0$.

(III) $\left(a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)^{1/\log(x)}$, $p\geq 1$, $a_p>0$. (IV) $\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$

(V) $(a^x+b^x)^{1/x}$, $a\geq b\geq 0$. (VI) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (VII) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\operatorname{sen}(x^5)}{x+1}$

(VIII) $\operatorname{sen}(\sqrt{x+1})-\operatorname{sen}(\sqrt{x})$ (IX) $\left(\dfrac{x^2+5\,x+4}{x^2-5\,x+7}\right)^x$

3.13 Problemas propuestos en examen:
2 Febrero 2001, examen del primer parcial, cuestión 3.
10 Febrero 2003, examen del primer parcial, cuestión 2.
13 Febrero 2004, examen del primer parcial, cuestión 2.
30 Junio 2006, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, cuestión 2.
27 Junio 2007, examen final, cuestión 2.
25 Noviembre 2009, prueba de evaluación continua, cuestión 4.
1 Diciembre 2010, prueba de evaluación continua, problema 2.
12 Diciembre 2011, tercera prueba de evaluación continua, completa.
10 Diciembre 2012, segunda prueba de evaluación continua, problema 2.
11 Diciembre 2013, segunda prueba de evaluación continua, problema 2.

3.14 Sean f y g dos funciones definidas en un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A.

(I) Probar que si f y g tienen límite (finito) en el punto a, entonces las funciones $\max\{f,g\}$ y $\min\{f,g\}$ tienen límite en dicho punto. De hecho,

$$\lim_{x\to a} \max\{f,g\}(x) = \max\left\{\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)\right\},$$
$$\lim_{x\to a} \min\{f,g\}(x) = \min\left\{\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)\right\}.$$

(II) Demostrar que si f y g son continuas en A, así lo son $\max\{f,g\}$ y $\min\{f,g\}$.

3.15 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

(I) $f(x)=\begin{cases} x\,e^{1/x} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$ (II) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0, \\ 2 & \text{si } x=0. \end{cases}$

(III) $f(x) = \begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right] & \text{si } x \in (0,1]\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$ (IV) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} \operatorname{sen}\left(\pi/x\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$

(V) $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0\,; \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

3.16 Estudiar la continuidad de la función f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) \;=\; \lim_{p\to\infty} \frac{\big(1+\operatorname{sen}(\pi x)\big)^p - 1}{\big(1+\operatorname{sen}(\pi x)\big)^p + 1}\,.$$

3.17 Estudiar la continuidad y dibujar la gráfica de la función $f(x) = [x] + (x-[x])^2$, $x \in \mathbb{R}$.

3.18 Estudiar la continuidad y dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3.19 Dar un ejemplo de dos funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$, no continuas en ningún punto de $\mathbb{R}$, pero tales que $f+g$ y $f\,g$ sean continuas en toda la recta.

3.20 Demostrar que si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, existe una función continua en todo $\mathbb{R}$ que coincide con f en $[a,b]$. ¿Es cierto el resultado anterior si se sustituye el intervalo cerrado por el intervalo abierto (a,b)?

3.21 Si f es una función definida y continua en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(x)$ es siempre un número racional, ¿qué se puede decir de f?

3.22 Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{I}$ y $f(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{Q}$. ¿Puede ser f continua en $\mathbb{R}$?

3.23 Demostrar que:

(I) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^{179} + \dfrac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2(x)} = 119.$

(II) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(x) = x-1$.

(III) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in (0,\infty)$ tal que $x + \log(x) = \alpha$.

3.24 Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Probar que existe un punto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

3.25 Sea f una función definida y continua en el intervalo $[a,b]$. Demostrar que existe al menos un $x \in [a,b]$ tal que

$$f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

3.26 Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Probar que para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ con $f(x) = y$.

3.27 Determinar el conjunto imagen de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.

3.28 Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales.

(I) Demostrar que si n es un número natural impar, la ecuación

$$x^n + a_1\,x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$.

(II) Probar que si n es par, existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_n \le x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n ,$$

es decir, la función $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ alcanza su mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

3.29 Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(0) = f(2)$. Demostrar que existen $x, y \in [0,2]$ tales que

$$|x-y| = 1 \qquad \text{y} \qquad f(x) = f(y) .$$

3.30 Sean X un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $f\colon X \to X$ una función tal que existe una constante $k \in (0,1)$ con

$$\big|f(x) - f(y)\big| \le k\,|x-y| \qquad \text{para todos } x, y \in X . \tag{3.1}$$

(I) Demostrar que f es uniformemente continua en X.

(II) Sean $x_0 \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por $x_n = f(x_{n-1})$, $n \ge 1$. Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente.

(III) Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Demostrar que $x \in X$ y que $f(x) = x$.

(IV) Demostrar que si $y \in X$ es tal que $y = f(y)$, entonces $y = x$.

Nota: Una función que verifique la condición (3.1) del enunciado se dice *contractiva*. El resultado obtenido en este ejercicio, conocido como *teorema del punto fijo de Banach*, muestra que para cada aplicación contractiva en un conjunto cerrado de la recta real existe un único punto x (el *punto fijo*) tal que $f(x) = x$.

En este teorema, que admite una formulación mucho más general, se fundamentan ciertos métodos iterativos para la resolución numérica de ecuaciones.

3.31 Sea $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L ,$$

donde a, $L \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es uniformemente continua.

3.32 Demostrar que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

3.33 Demostrar que la función f, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, es uniformemente continua en $[0,\infty)$.

3.34 Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica. Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Nota: Se dice que una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica* si existe un número real $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Cualquier número T que satisfaga dicha propiedad se denomina *periodo* de la función.

3.35 Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demostrar que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de A, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

3.36 Sean A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que para cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Demostrar que f es uniformemente continua.

Comprobar que la condición de acotación de A es esencial.

3.37 Sean (a,b) un intervalo abierto y acotado de $\mathbb{R}$ y $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demostrar que existen y son finitos los límites de f en a y b.

3.38 Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(1)$.

(I) Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $f(\alpha) = f\big(\alpha + 1/n\big)$.

(II) ¿Se puede garantizar que existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $f(\alpha) = f\big(\alpha + 3/4\big)$?

3.39 Determinar todas las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican la *ecuación funcional de Cauchy*:

$$f(x+y) \;=\; f(x)+f(y)\,, \qquad x,y \in \mathbb{R}\,.$$

3.40 Problemas propuestos en examen:
2 Febrero 2001, examen del primer parcial, problema 2 y cuestión 4.
29 Junio 2001, examen final, alumnos que se examinan de todo, cuestión 2.
8 Febrero 2002, examen del primer parcial, problema 2.
31 Enero 2005, examen del primer parcial, cuestión 3.
1 Febrero 2007, examen del primer parcial, problema 3.
27 Junio 2008, examen final, problema 1.
30 Enero 2009, examen del primer parcial, cuestión 2.
10 Enero 2012, cuarta prueba de evaluación continua, completa.
26 Enero 2012, examen del primer parcial, problema 2 y cuestión 2.
10 Diciembre 2012, segunda prueba de evaluación continua, problema 3.
14 Enero 2013, tercera prueba de evaluación continua, problema 2.
11 Diciembre 2013, segunda prueba de evaluación continua, problema 3.
13 Enero 2014, tercera prueba de evaluación continua, problemas 2 y 3.
6 Febrero 2014, examen del primer parcial, problema 3 y cuestión 4.

Tema 4

Funciones reales de variable real Cálculo diferencial

La necesidad de medir la rapidez con que varían las magnitudes físicas es una constante en el estudio de los fenómenos naturales. No fue hasta el siglo XVII cuando Newton y Leibnitz desarrollaron una teoría matemática que diera respuesta a esta cuestión, iniciando así lo que se conoce hoy como *Cálculo Diferencial*.

Este tema se dedica a la exposición de los resultados fundamentales del Cálculo Diferencial para funciones reales de variable real. Comenzamos estableciendo el concepto de derivada y de diferencial de una función real de variable real y sus propiedades elementales, para abordar luego los resultados clásicos relativos a estos conceptos. Nos ceñiremos al caso de funciones reales definidas en intervalos de $\mathbb{R}$, pues éste es el más significativo en el contexto de las aplicaciones prácticas, aunque no hay ninguna dificultad en extender el estudio a abiertos generales de la recta real.

4.1. Concepto de derivada. Primeras propiedades

Definición 4.1. Sea f una función real definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, y sea $a \in I$ (obsérvese que a es un punto de acumulación de I). Se dice que f es *derivable* en el punto a si existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

que puede ser expresado equivalentemente como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

En ese caso, el valor del límite se representa por '$f'(a)$' y se denomina *derivada de f en a*.

Se dice que f es *derivable* en I si es derivable en cada uno de sus puntos.

Observación 4.2. El cociente cuyo límite define el concepto de derivada se denomina *cociente incremental* de f correspondiente a los puntos a y $a+h$, pues su valor es la razón entre el incremento que experimenta la función y el correspondiente a la variable, al pasar del punto a al punto $a+h$.

Como veremos a continuación, la derivabilidad de una función en un punto permite obtener para ella una buena aproximación local (es decir, en un entorno de dicho punto) de tipo afín.

Definición 4.3. Sean f una función real definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ y $a \in I$. Se dice que f es *diferenciable* en el punto a si existen una constante $L \in \mathbb{R}$ y una función $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$, con

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) \;=\; \varepsilon(a) \;=\; 0,$$

de manera que, para cada $x \in I$, se tiene que

$$f(x)-f(a) = L\,(x-a) + \varepsilon(x)\,(x-a).$$

En este caso, la aplicación lineal definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por

$$h \in \mathbb{R} \mapsto L\,h$$

se denomina *diferencial* de f en el punto a, y se representa por '$df(a)$' o por 'df_a'.

Proposición 4.4. Sea I un intervalo abierto y $f\colon I \to \mathbb{R}$. Es condición necesaria y suficiente para que f sea derivable en el punto $a \in I$ que sea diferenciable en dicho punto.

Además, con la notación de la definición anterior, si f es derivable en a se tiene que $L = f'(a)$.

Observación 4.5. La función identidad, que denotamos por 'id', es la definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por $\mathrm{id}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Se comprueba fácilmente que $\mathrm{id}'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con lo que la diferencial de id es, en todos los puntos de la recta, la aplicación lineal identidad, que por este motivo se representa, abusando de la notación, por 'dx':

$$dx(h) \;=\; h\,, \qquad h \in \mathbb{R}\,.$$

De acuerdo con el último resultado, si f es derivable en el punto a se tiene que

$$df(a)(h) \;=\; f'(a)\,h \;=\; f'(a)\,dx(h)\,, \qquad h \in \mathbb{R}\,,$$

o bien, la igualdad de aplicaciones lineales $df(a) = f'(a)\,dx$. Esto se utiliza, falazmente, como justificación de una segunda notación para la derivada, debida a Leibnitz:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a)\,.$$

Hay que recalcar que la expresión de la derecha no es un cociente, sino simplemente una notación para representar un límite de cocientes (en principio, una indeterminación del tipo ${}^{0}\!/_{0}$), por lo que no son válidas las multiplicaciones o divisiones que se aplican a las diferenciales en ciertos textos como argumento deductivo, obviando ese paso al límite. No obstante, este cálculo simbólico es susceptible de justificación matemática en la inmensa mayoría de los casos, lo que permite llegar a conclusiones correctas.

Observación 4.6 (Interpretación geométrica de la derivada). Sean f una función definida en un intervalo abierto I y a un punto de I en el que f es derivable. Si consideramos la recta del plano de ecuación

$$y \;=\; g(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a)\,,$$

su gráfica pasa, al igual que la de f, por el punto $(a, f(a))$. Más aún, de acuerdo con la equivalencia entre derivabilidad y diferenciabilidad, $f - g$ es una $o(x-a)$ en el punto a, lo que indica que g es una "buena aproximación"de f cuando x tiende hacia a. La recta definida por g se denomina *recta tangente* a f en el punto a, y su pendiente es la derivada de f en el punto a.

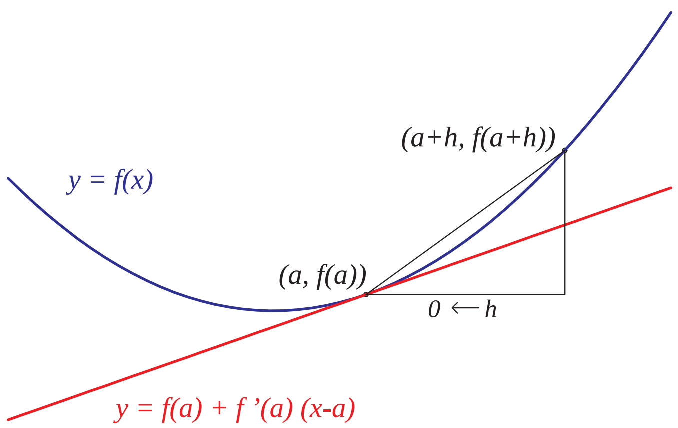

Figura 4.1: Aproximación de una función por su recta tangente en un punto.

Propiedades 4.7. Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $a \in I$, y f, g funciones reales definidas en I.

(I) Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

El recíproco es, en general, falso, como se puede comprobar, por ejemplo, con la función $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, en el punto $a = 0$.

(II) Si f es una función constante, entonces f es derivable en I y $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$.

(III) Si f y g son derivables en a y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es derivable en a y, además,

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

(IV) Si f y g son derivables en a, entonces $f g$ es derivable en a y

$$(f g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a).$$

(V) Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces $f/_g$ (que está definida en un entorno adecuado de a) es derivable en a y, además,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g(a)^2}.$$

Definición 4.8. Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, f una función real definida en I y $a \in I$. Si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty,$$

se dice que f *tiene derivada infinita en* a (sin embargo, f no es derivable en a).

Como ejemplo, considérese la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, y el punto $a = 0$.

Definición 4.9. Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b)$. Entonces tiene sentido considerar el límite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

que si existe y es finito se denomina *derivada lateral por la derecha* de f en el punto a, y se representa por '$f'(a^+)$' o '$f'_+(a)$'.

Análogamente, para una función f definida en un intervalo de la forma $(a, b]$, si existe y es finito el límite por la izquierda en el punto b de los cocientes incrementales relativos a dicho punto, dicho límite se denomina *derivada lateral por la izquierda* de f en el punto b, denotada por '$f'(b^-)$' o '$f'_-(b)$'. Así, si f es una función definida en el intervalo compacto $I = [a, b]$, decir que f es *derivable en* I significa que f es derivable en cada punto del interior de I y que existen las correspondientes derivadas laterales en a y b.

De forma similar se definen las *derivadas laterales infinitas* en caso de que los límites laterales correspondientes de los cocientes incrementales existan, pero sean infinitos.

A partir de las propiedades conocidas de los límites es sencillo obtener la siguiente

Proposición 4.10. Sean f una función real definida en un intervalo abierto I y $a \in I$. Son equivalentes:

(i) f es derivable en a.

(ii) f admite derivadas laterales en a y coinciden.

En este caso, el valor de las dos derivadas laterales coincide con $f'(a)$.

Proposición 4.11 (Regla de la cadena). Sean I y J intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to J$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ funciones tales que f es derivable en $a \in I$, y g es derivable en $b = f(a) \in J$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a) = g'(b) f'(a).$$

Proposición 4.12 (Derivación de la función inversa). Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y f una función real definida, continua e inyectiva en I (esto implica que $J = f(I)$ es un intervalo abierto y que $f^{-1}\colon J \to I$ es continua). Si f es derivable en $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y

$$(f^{-1})'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}, \qquad \text{es decir,} \quad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}.$$

Ejemplo 4.13. Puesto que la derivada de la función exponencial es ella misma, la derivada de su inversa, la función logarítmica, es

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'\big(\log(y)\big)} = \frac{1}{\exp\big(\log(y)\big)} = \frac{1}{y}, \qquad y \in (0, \infty).$$

Definición 4.14 (Derivadas sucesivas). Sea f una función derivable en un intervalo I de $\mathbb{R}$. Tiene entonces sentido considerar la *función derivada*, denotada por 'f'', que a cada punto $x \in I$ le asocia el valor $f'(x)$. Esta nueva función puede ser derivable a su vez en un punto a de I, es decir, puede existir y ser finito el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = (f')'(a),$$

que se denota por '$f''(a)$' y se denomina *derivada segunda* de f en a. Si f' es derivable en todo I, se puede considerar una nueva función, la *derivada segunda* de f, denotada por f'', que asocia a cada punto $x \in I$ el valor $f''(x)$.

Análogamente, se definen las *derivadas sucesivas* de orden $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. La *derivada de orden* k o *derivada* k*-ésima* de una función f se denota por '$f^{(k)}$'. La diferencial de la función $f^{(k-1)}$ en un punto a, denominada *diferencial de orden* k, se denota por '$d^k f(a)$'.

Definición 4.15. Sea k un número natural. Se dice que una función real f definida en el intervalo I es *de clase* $\mathcal{C}^k$ en I si f admite derivadas sucesivas hasta orden k en I y todas ellas son continuas en I (de acuerdo con la propiedad 4.7.I, esto equivale a que exista $f^{(k)}$ y sea continua).

Se dice que una función real f definida en el intervalo I es *de clase* $\mathcal{C}^\infty$ en I si f admite derivadas sucesivas de cualquier orden en I (y, por tanto, todas son continuas).

En el ejercicio 4.15 se pide probar la siguiente expresión para la derivada de orden arbitrario de un producto de funciones.

Proposición 4.16 (Fórmula de Leibnitz). Sean f, g funciones de clase $\mathcal{C}^n$ en un intervalo I. Entonces $f\,g$ es de clase $\mathcal{C}^n$ en I. Además, para cada $m \leq n$ se tiene que

$$(f\,g)^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)}(x)\, g^{(k)}(x), \quad x \in I.$$

4.2. Teoremas de valor medio. Monotonía

Los conceptos y resultados que siguen a continuación van dirigidos al estudio local de funciones y a la caracterización de los puntos relevantes en dicho estudio. El cálculo diferencial es herramienta fundamental para el conocimiento del comportamiento de una función, tanto desde el punto de vista local como desde el global.

Definición 4.17. Sean f una función real definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y x_0 un punto de A. Se dice que f *presenta un mínimo relativo en* x_0 (resp. *máximo relativo*) si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A$ se tiene que

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \big(\text{resp. } f(x) \leq f(x_0)\big).$$

Se dice entonces que $f(x_0)$ es un *mínimo* (resp. *máximo*) *relativo* de f. Los máximos y mínimos relativos reciben el nombre común de *extremos relativos*.

En los términos anteriores, si para cada $x \in A$ con $0 < |x-x_0| < \delta$ se puede asegurar la desigualdad estricta entre las correspondientes imágenes, se habla de *extremos relativos estrictos*.

Teorema 4.18 (Condición necesaria de extremo relativo). Sea f una función real definida en un intervalo I, y sea x_0 un punto interior de I en el que f presenta un extremo relativo. Si f es derivable en x_0, entonces debe ser

$$f'(x_0) = 0.$$

Observaciones 4.19.

(i) Si en el punto a, interior al dominio de definición de la función f, ésta es derivable y $f'(a) = 0$, se dice que a es un *punto crítico* de f.

(ii) Es claro que un extremo relativo no tiene por qué presentarse en un punto en el que la función sea derivable; por ejemplo, la función $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, presenta un mínimo relativo (y absoluto) en $x_0 = 0$, único punto en el que f no es derivable.

(iii) Como indica el teorema previo, en el caso de derivabilidad en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en x_0 será de pendiente cero y, por lo tanto, horizontal.

(iv) Haremos énfasis en que el resultado anterior se aplica solamente a puntos interiores del intervalo. Ya sabemos que toda función continua en un intervalo compacto alcanza el máximo y el mínimo absolutos, que son por tanto extremos relativos, pero puede que esto ocurra en los extremos del intervalo y que, aun cuando exista la derivada lateral correspondiente, ésta no sea nula. Por ejemplo, la función f definida en $[-1,1]$ por $f(x) = x^2$ alcanza su máximo absoluto, que es 1, en los puntos -1 y 1, los extremos del intervalo, y en ellos la derivada de f es -2 y 2, respectivamente.

Teorema 4.20 (de Rolle). Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$, derivable en el abierto (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 4.21 (del valor medio de Cauchy). Sean f y g dos funciones definidas y continuas en el intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) \; = \; g'(c)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Como consecuencia de este teorema, si tomamos $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, deducimos el siguiente.

Teorema 4.22 (de los incrementos finitos de Lagrange). Sea f una función real definida y continua en $[a,b]$, y derivable en (a,b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) \; = \; (b-a)\, f'(c).$$

Observación 4.23. Este último resultado tiene una interpretación geométrica clara: puesto que la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, los puntos "inicial" y "final" de la gráfica de f, tiene por pendiente el valor $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, el teorema asegura que existe un punto c en el interior del intervalo en el que la recta tangente a la gráfica de f tiene esa misma pendiente y, por lo tanto, es paralela a la recta antes considerada (véase la Figura 4.2).

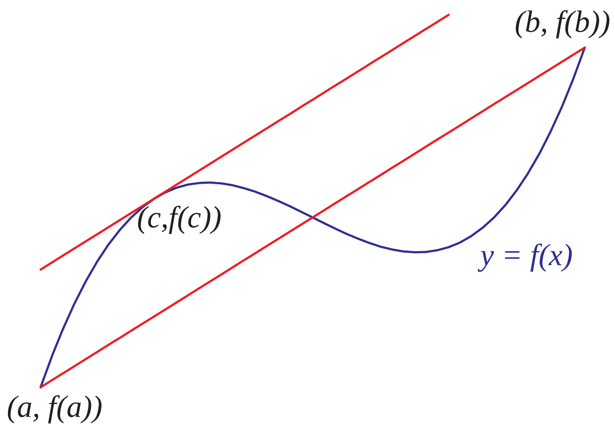

Figura 4.2: Interpretación geométrica del teorema de Lagrange.

Corolario 4.24. Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua en I y derivable en $\overset{\circ}{I}$, tal que $f'(x) = 0$ para cada $x \in \overset{\circ}{I}$. Entonces f es constante en I.

Observación 4.25. El resultado anterior es falso si se sustituye el intervalo I por un abierto cualquiera de $\mathbb{R}$, esto es, por una unión disjunta de intervalos.

Por ejemplo, la función f definida en $A = (0,1) \cup (2,3)$ por $f(x) = [x]$ tiene derivada nula en todo punto de A, pero no es constante.

Corolario 4.26. Sea f una función real definida en el intervalo $[a, a+\delta)$, con $\delta > 0$, siendo f continua en $[a, a+\delta)$ y derivable en $(a, a+\delta)$. Si existe y es finito $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, se tiene que f admite derivada lateral por la derecha en el punto a y

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

Análogo resultado se verifica para intervalos de la forma $(a-\delta, a]$.

Proposición 4.27 (Propiedad de Darboux para las derivadas). Sea f una función definida y continua en un intervalo compacto $[a,b]$ y tal que existe la derivada, finita o infinita (ver la Definición 4.8), en cada punto de $[a,b]$. Se supone además que son distintos los valores d_a y d_b de la derivada en los puntos a y b, respectivamente. Entonces, si λ es un número real comprendido entre d_a y d_b, existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\lambda$.

Proposición 4.28 (Regla de L'Hôpital). Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de I. Se supone que f y g son funciones derivables en I tales que $g'(x)\neq 0$ para cada $x\in I\setminus\{a\}$, y se verifica que, bien

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0\,,$$

bien

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ ó } -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty \text{ ó } -\infty.$$

Entonces, si existe el límite $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, finito o infinito, también existe el límite $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y toma el mismo valor L.

Observaciones 4.29.

(i) El resultado es igualmente válido para intervalos no acotados en relación a los límites en $a=+\infty$ o $a=-\infty$. Si $a\in\mathbb{R}$ el punto puede ser un extremo de I o un punto interior a I.

(ii) Este resultado se aplica directamente a la resolución de indeterminaciones ${}^0\!/_0$ e ${}^\infty\!/_\infty$, pero el resto de indeterminaciones pueden ser manipuladas hasta reescribirlas en términos de una de estas dos.

Definición 4.30. Sean f una función real definida en un intervalo I y $a\in I$. Se dice que f es *creciente* (resp. *decreciente*) *en el punto* a si existe $\delta>0$ tal que si

$$x, y\in I \qquad \text{y} \qquad a-\delta < x < a < y < a+\delta\,,$$

entonces

$$f(x)\le f(a)\le f(y) \qquad (\text{resp. } f(x)\ge f(a)\ge f(y))\,.$$

Si estas últimas desigualdades se verifican en sentido estricto se dice que f crece (resp. decrece) *estrictamente* en a.

A partir de la definición de derivada, teniendo en cuenta el signo de los cocientes incrementales en un entorno adecuado del punto, es sencillo probar lo siguiente:

Proposición 4.31. Sea f una función definida en un intervalo abierto I y derivable en $a\in I$. Se tiene que:

(I) Si $f'(a)>0$ (resp. $f'(a)<0$) entonces f crece (resp. decrece) estrictamente en a.

(II) Si f crece (resp. decrece) en a, entonces $f'(a)\ge 0$ (resp. $f'(a)\le 0$).

(III) Si $f'(a)=0$ no se puede asegurar nada a este respecto.

Observación 4.32. Es sencillo comprobar que si f es creciente en un intervalo I (ver la Definición 3.56), lo es en cada uno de sus puntos. Sin embargo, una función puede ser creciente en un punto a sin serlo en ningún entorno de la forma $(a-\delta, a+\delta)$. Como ejemplo, considérese la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\,x^2 \operatorname{sen}({}^1\!/_x) & \text{si } x\neq 0\,,\\ 0 & \text{si } x = 0\,,\end{cases}$$

y estúdiese su comportamiento en un entorno de $a=0$.

En relación con la monotonía global, como consecuencia del teorema de Lagrange se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.33. Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en el intervalo abierto $\overset{\circ}{I}$. Entonces:

(I) f es creciente (resp. decreciente) en I si, y sólo si, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) para cada $x \in \overset{\circ}{I}$.

(II) Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para cada $x \in \overset{\circ}{I}$, entonces f es estrictamente creciente (resp. decreciente) en I.

Observación 4.34. El recíproco de 4.33.II es falso. Basta considerar la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, que es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, y para la que $f'(0) = 0$.

4.3. Fórmula de Taylor. Estudio local de funciones

Si exceptuamos las funciones polinómicas y racionales (cocientes de polinómicas), las funciones que aparecen normalmente en el Cálculo Infinitesimal son de evaluación complicada, o incluso imposible, por medio de operaciones elementales. Así surge, en principio, la necesidad de sustituir la función de partida por otra, por ejemplo, polinómica, que la aproxime suficientemente, al menos en un entorno del punto alrededor del cual se está estudiando la función. Hay que hacer notar que la aproximación puede también aportar información de tipo cualitativo acerca de la función.

La fórmula de Taylor proporciona la mejor (en un sentido que se precisará) aproximación local de tipo polinómico a una función suficientemente derivable.

Definición 4.35. Sea f una función real definida en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Si f admite derivadas sucesivas hasta el orden $n \geq 1$ en el punto a, se denomina *polinomio de Taylor de grado n de f en a* al polinomio

$$T_n(f,a)(x) \;=\; f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n .$$

Observación 4.36. El polinomio de Taylor es el único polinomio P de grado menor o igual que n que satisface las relaciones

$$P(a) = f(a)\,, \quad P'(a) = f'(a)\,, \;\ldots\,,\; P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,,$$

que, de hecho, sirven para determinarlo. Así, la función dato y el polinomio coinciden, junto con sus derivadas sucesivas hasta orden n, en el punto a, con lo que se puede afirmar que se ha resuelto un problema de interpolación para f.

El siguiente resultado se obtiene a partir del teorema del valor medio de Cauchy.

Teorema 4.37 (Fórmula de Taylor). Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y f una función real definida en I que admite derivadas hasta el orden $n+1$ en cada punto de I (en particular f es de clase $\mathcal{C}^n$ en I). Si $a \in I$, para cada $x \in I \setminus \{a\}$ se tiene que

$$f(x) \;=\; T_n(f,a)(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,, \tag{4.1}$$

donde ξ_x es un punto adecuado del intervalo abierto de extremos a y x.

Observaciones 4.38.

(i) El último sumando en (4.1), que es la diferencia entre el valor de la función y el del polinomio de Taylor $T_n(f,a)$ en x, es el denominado *resto de Taylor de orden n en a*, denotado por '$R_n(f,a)(x)$', y que ha sido expresado en la forma conocida como *de Lagrange*. Una expresión más general del resto es la de *Schlömilch*:
Si $p \in \mathbb{N}$ y $p \leq n+1$, existe ξ_x situado entre a y x tal que

$$R_n(f,a)(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{p\;n!}\,(x-a)^p\,(x-\xi_x)^{n-p+1}\,.$$

Para $p = n+1$ se obtiene el resto de Lagrange ya indicado; para $p = 1$ aparece el denominado *resto de Cauchy*,

$$R_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n!}(x-a)(x-\xi_x)^n .$$

(ii) Otra forma usual de representar la fórmula de Taylor es la siguiente: dada una función f en el intervalo $I = (a-\delta, a+\delta)$ que admite derivadas hasta el orden $n+1$ en cada punto de I, para cada $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \delta$ se tiene que

$$f(a+h) \;=\; f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)}{2!}\,h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta\,h)}{(n+1)!}\,h^{n+1},$$

donde $\theta \in (0,1)$ depende de h.

Proposición 4.39. Sean f una función real definida en un intervalo abierto I y $a \in I$. Si f es $n-1$ veces derivable en I y existe $f^{(n)}(a)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0 .$$

Dicho de otro modo, existe una función $\varepsilon\colon I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in I\setminus\{a\}$ se tiene que

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + (x-a)^n \cdot \varepsilon(x), \tag{4.2}$$

y que verifica que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. De acuerdo con la notación de Landau, la igualdad (4.2) también se puede escribir como

$$f(x) - T_n(f,a)(x) \;=\; o\big((x-a)^n\big) \quad \text{en } x = a .$$

Observaciones 4.40.

(i) Cuando la función f es suficientemente regular es posible encontrar cotas sencillas del resto, explícitamente:
Si f es de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en un entorno $(a-\delta, a+\delta)$ del punto a, la derivada de orden $n+1$ de f, por ser continua, estará acotada en los intervalos compactos $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ con $0 < \varepsilon < \delta$, es decir, existe $M \geq 0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ si $|x-a| \leq \varepsilon$. En estas condiciones, para cada $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ se tiene que

$$\big|R_n(f,a)(x)\big| \;=\; \big|f(x) - T_n(f,a)(x)\big| \;\leq\; \frac{M\,|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

(ii) La expresión de f como un polinomio de grado n más un error que tiende a 0 en a más rápidamente que $(x-a)^n$, dada en (4.2), se llama *desarrollo limitado de f de orden n en a*; además, se dice que el polinomio es la parte regular de dicho desarrollo. Aunque es posible dar una teoría general para este tipo de desarrollos, aquí estudiaremos únicamente el caso de funciones suficientemente regulares, para las que la parte regular siempre es el correspondiente polinomio de Taylor. De hecho, $T_n(f,a)$ es el único polinomio de grado menor o igual que n para el que se puede escribir una relación como (4.2). En este sentido, podemos decir que es la mejor aproximación a f en un entorno de a, o la mejor aproximación local a f en a (el adjetivo *local* se utiliza, en general, para referirse a propiedades relativas a las proximidades de un punto, sin atender a lo que sucede de forma *global*, esto es, en todo el dominio de definición de la función). Esta unicidad está detrás de los siguientes resultados 4.41 y 4.42, que permiten obtener el polinomio de Taylor de una función suficientemente derivable que resulte de operar con otras más sencillas cuyo polinomio de Taylor se conozca, evitando así el cálculo de las derivadas sucesivas, que puede ser muy laborioso.

Propiedades 4.41. Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $a \in I$ y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones que admiten polinomio de Taylor de orden $n \in \mathbb{N}$ en a, digamos P y Q, respectivamente. Entonces se verifica que:

(I) Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el polinomio de Taylor de orden n en a de la función $\alpha f + \beta g$ es $\alpha P + \beta Q$.

(II) El polinomio de Taylor de orden n en a de $f\,g$ es el que resulta al despreciar en el producto $P\,Q$ las potencias de $(x-a)$ de exponente estrictamente mayor que n.

(III) Si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, la función f/g admite polinomio de Taylor de orden n en a, que se obtiene al dividir, hasta llegar al grado n, P entre Q según las potencias crecientes de $(x-a)$.

(IV) Si F es una primitiva de f en I (es decir, $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in I$), entonces el polinomio de Taylor de orden $n+1$ en a de F es el polinomio R, única primitiva de P tal que $R(a) = F(a)$.

Proposición 4.42. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ funciones definidas en sendos intervalos I y J, y sean $a \in I$ e $b \in J$ tales que:

(i) f admite polinomio de Taylor P de orden n en a.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

(iii) g admite polinomio de Taylor Q de orden n en b.

Entonces la función $g \circ f$ (definida en $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ para algún $\delta > 0$) admite polinomio de Taylor de orden n en a, que resulta al despreciar en el polinomio $Q\big(P(x)\big)$ las potencias de $(x-a)$ de exponente estrictamente mayor que n.

Proposición 4.43 (Desarrollos limitados de las funciones elementales). Los desarrollos limitados siguientes se refieren al punto $a = 0$, siendo las correspondientes funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de dicho punto. El orden del desarrollo limitado viene dado por el exponente de x en la expresión de Landau $o(x^m)$.

(I) $\exp(x) = e^x \;=\; 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

(II) $a^x \;=\; 1 + \dfrac{\log(a)}{1!}\,x + \dfrac{\log(a)^2}{2!}\,x^2 + \ldots + \dfrac{\log(a)^n}{n!}\,x^n + o(x^n)$

(III) $\operatorname{sen}(x) \;=\; x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

(IV) $\cos(x) \;=\; 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

(V) $\operatorname{tg}(x) \;=\; x + \dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{2}{15}\,x^5 + \dfrac{17}{315}\,x^7 + \dfrac{62}{2835}\,x^9 + \dfrac{1382}{155925}\,x^{11} + o(x^{12})$

(VI) $\operatorname{Sh}(x) \;=\; x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

(VII) $\operatorname{Ch}(x) \;=\; 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

(VIII) $\operatorname{Tgh}(x) \;=\; x - \dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{2}{15}\,x^5 - \dfrac{17}{315}\,x^7 + \dfrac{62}{2835}\,x^9 - \dfrac{1382}{155925}\,x^{11} + o(x^{12})$

(IX) $(1+x)^\alpha \;=\; 1 + \dfrac{\alpha\, x}{1!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\,x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^n}{n!} + o(x^n)$,

que de forma abreviada, denotando $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, se representa también

$(1+x)^\alpha \;=\; \dbinom{\alpha}{0} + \dbinom{\alpha}{1}\,x + \dbinom{\alpha}{2}\,x^2 + \ldots + \dbinom{\alpha}{n}\,x^n + o(x^n)$.

Casos particulares:

(i) Si $\alpha \in \mathbb{N}$ se reduce a la *fórmula del binomio de Newton* (nótese que $\binom{\alpha}{k} = 0$ para $k > \alpha$ y que $\binom{\alpha}{k}$ es realmente el número combinatorio indicado si $0 \le k \le \alpha$).

(ii) Para $\alpha = \dfrac{1}{2}$ se tiene que

$$\sqrt{1+x} \;=\; 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \frac{3\,x^3}{2\cdot 4\cdot 6} - \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)\,x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + o(x^n)$$

(iii) Para $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ se deduce que

(iii.a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \;=\; 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3\,x^2}{2\cdot 4} - \ldots + (-1)^n\,\dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + o(x^n)$

(iii.b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3\,x^4}{2\cdot 4}-\ldots+(-1)^n\,\dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}+o(x^{2n+1})$

(iii.c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3\,x^4}{2\cdot 4}+\ldots+\dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}+o(x^{2n+1})$

(iv) Si $\alpha=-1$ entonces

(iv.a) $\dfrac{1}{1+x} \;=\; 1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots+(-1)^n\,x^n+o(x^n)$

(iv.b) $\dfrac{1}{1-x} \;=\; 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+o(x^n)$

(iv.c) $\dfrac{1}{1+x^2} \;=\; 1-x^2+x^4-x^6+x^8+\ldots+(-1)^n\,x^{2n}+o(x^{2n+1})$

(X) Aplicando el apartado 4.41.IV se obtiene que:

(i) $\log(1+x) \;=\; x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\,\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$ (ver 4.43.IX.iv.a)

(ii) $\log(1-x) \;=\; -x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\ldots-\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$ (ver 4.43.IX.iv.b)

(iii) $\operatorname{arcsen}(x) \;=\; x+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\dfrac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)}+o(x^{2n+2})$

(ver 4.43.IX.iii.c)

(iv) $$\begin{aligned}\arccos(x) &= \frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}(x)\\ &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\ldots-\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)}+o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

(v) $\operatorname{arctg}(x) \;=\; x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{x^9}{9}+\ldots+(-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$ (ver 4.43.IX.iv.c)

(vi) $$\begin{aligned}\operatorname{ArgSh}(x) &= \log\Big(x+\sqrt{1+x^2}\Big)\\ &= x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\ldots+(-1)^n\,\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)}+o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

(ver 4.43.IX.iii.b)

(vii) $\operatorname{ArgTgh}(x) \;=\; \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$

(ver 4.43.X.i, 4.43.X.ii)

Se prosigue ahora con el estudio de la convexidad de las gráficas de funciones definidas en intervalos, de nuevo en términos de las derivadas.

Definición 4.44. Sea f una función definida en un intervalo I. Se dice que f es *convexa* (resp. *cóncava*) en I si para todos $x,y\in I$ y todo $\alpha\in(0,1)$ se tiene que

$$f\big((1-\alpha)\,x+\alpha\,y\big)\le(1-\alpha)\,f(x)+\alpha\,f(y)$$

$$\big(\text{ resp. } f\big((1-\alpha)\,x+\alpha\,y\big)\ge(1-\alpha)\,f(x)+\alpha\,f(y)\,\big).$$

Observaciones 4.45.

(I) Una función real f definida en el intervalo I es convexa en I si, y sólo si, la función $-f$ es cóncava en I.

(II) Con la notación anterior, si $x<y$, cuando α varía en el intervalo $[0,1]$ los números $(1-\alpha)\,x+\alpha\,y=x+\alpha\,(y-x)$ recorren el intervalo $[x,y]$ y los puntos

$$\big((1-\alpha)\,x+\alpha\,y\,,\,(1-\alpha)\,f(x)+\alpha\,f(y)\big) \;=\; (1-\alpha)\big(x,f(x)\big)+\alpha\big(y,f(y)\big)$$

conforman el segmento de $\mathbb{R}^2$ de extremos $\big(x,f(x)\big)$ e $\big(y,f(y)\big)$; en general, dados dos vectores $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ de un espacio vectorial, los vectores $(1-\alpha)\,\boldsymbol{v}+\alpha\,\boldsymbol{w}$, $0\le\alpha\le 1$, se denominan *combinaciones lineales convexas* de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

Si atendemos a la representación gráfica, las desigualdades de la definición anterior muestran que f es convexa (resp. cóncava) en el intervalo I si la cuerda que une dos puntos cualesquiera de su gráfica queda por encima (resp. por debajo) de dicha gráfica.

El siguiente resultado proporciona una caracterización muy útil de las funciones convexas que admite también una sencilla interpretación geométrica.

Proposición 4.46. Una función f definida en un intervalo I es convexa (resp. cóncava) en I si, y sólo si, para todos $x, y, z \in I$ con $x < y < z$ se tiene que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \qquad \Big(\text{resp. } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\Big).$$

En la Figura 4.3 se ilustra el significado geométrico de la proposición anterior en el caso convexo. Asimismo, queda patente lo expuesto en la Observación 4.45.II.

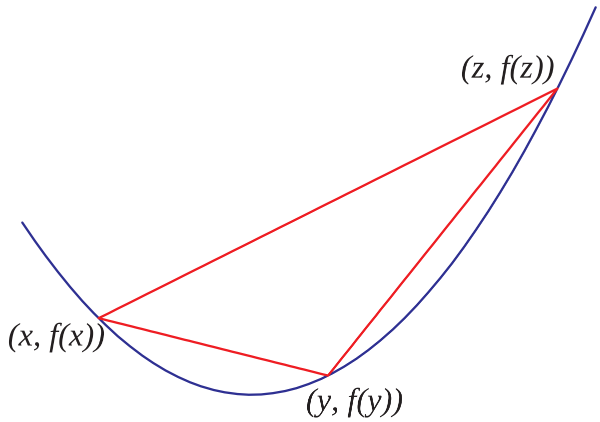

Figura 4.3: Convexidad y crecimiento de los cocientes incrementales.

A partir de la proposición anterior, pasando al límite cuando uno de los puntos se hace tender hacia otro (por ejemplo, y hacia x), se obtienen las dos proposiciones siguientes.

Proposición 4.47. Sea f una función definida y convexa (o cóncava) en un intervalo abierto I. Entonces f es continua en I.

Observación 4.48. Si el intervalo I no es abierto, el resultado no es cierto. Por ejemplo, la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (0,1], \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es convexa en $I = [0,1]$, pero no es continua en todo I (pues no lo es en $x_0 = 0$).

Proposición 4.49. Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces f es convexa (resp. cóncava) en I si, y sólo si, f' es creciente (resp. decreciente) en I.

Corolario 4.50. Sea f una función definida y dos veces derivable en un intervalo I. Entonces f es convexa (resp. cóncava) en I si, y sólo si, para cada $x \in I$ se tiene que $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$).

La idea geométrica de convexidad se puede formular de forma local, esto se precisa en la siguiente definición.

Definición 4.51. Sea f una función definida en un intervalo abierto I, y sea $a \in I$ en el que f es derivable. Tiene sentido considerar la recta tangente a f en a, de ecuación

$$y = g(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Se dice que f es *convexa* (resp. *cóncava*) en a si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$ se verifica que

$$f(x) - g(x) \geq 0 \qquad (\text{resp. } f(x) - g(x) \leq 0).$$

Es decir, f es convexa (resp. cóncava) en un punto si la gráfica de la recta tangente a f en ese punto queda, en un entorno adecuado, por debajo (resp. por encima) de la gráfica de la función.

Se dice que a es un *punto de inflexión* de f si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a)$ entonces $f(x) - g(x) \geq 0$, y si $x \in (a, a+\delta)$ entonces $f(x) - g(x) \leq 0$, o viceversa.

Proposición 4.52. Si f es convexa (resp. cóncava) y derivable en un intervalo abierto I, entonces es convexa (resp. cóncava) en cada uno de los puntos de I.

Observaciones 4.53.

(i) Notemos que un punto puede no ser de convexidad ni de concavidad ni de inflexión; basta considerar la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x - x^2 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Se tiene que $f'(0) = 1$, pero el punto $a = 0$ no es de ninguno de los tres tipos.

(i) Una función puede ser convexa en un punto sin serlo en ningún entorno de dicho punto. Como ejemplo considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(1 + \operatorname{sen}(1/x)\big) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

y estúdiese lo que sucede en el punto $a = 0$.

Proposición 4.54. Sea f una función definida y derivable en un intervalo abierto I y sea $a \in I$ en el que f es dos veces derivable. Se verifica que:

(I) Si $f''(a) > 0$, entonces f es convexa en a.

(II) Si $f''(a) < 0$, entonces f es cóncava en a.

(III) Si a es un punto de inflexión de f, ha de ser $f''(a) = 0$.

Proposición 4.55. Sean I un intervalo abierto, f una función real definida en I que admite derivadas hasta el orden $n-1$ en I, con $n \geq 2$, y a un punto de I tal que existe $f^{(n)}(a)$. Se supone además que

$$f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces:

(I) Si n es par, la función f presenta un extremo relativo en a, que será un máximo si $f^{(n)}(a) < 0$ y un mínimo si $f^{(n)}(a) > 0$.

(II) Si n es impar, la función f es estrictamente monótona en a, concretamente: creciente si $f^{(n)}(a) > 0$, y decreciente si $f^{(n)}(a) < 0$.

Proposición 4.56. Sean I un intervalo abierto, f una función real definida en I que admite derivadas hasta el orden $n-1$ en I, con $n \geq 3$, y a un punto de I tal que existe $f^{(n)}(a)$. Se supone además que

$$f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces:

(I) Si n es impar, la función f presenta un punto de inflexión en a.

(II) Si n es par, la función f es convexa en a si $f^{(n)}(a) > 0$, y cóncava si $f^{(n)}(a) < 0$.

4.3.1. Representación gráfica de funciones

A la hora de dar una representación aproximada de la gráfica de una función real dada por la expresión explícita genérica $y = f(x)$, esto es, de describir los puntos $\big(x, f(x)\big)$ del plano cartesiano, es conveniente seguir los siguientes pasos:

(I) Determinar el dominio de definición $\mathcal{D}$ de la función, es decir, el conjunto de valores reales x para los que la expresión $f(x)$ proporciona un número real. En los casos usuales $\mathcal{D}$ es un intervalo o una unión de intervalos.

(II) Hallar los cortes de la gráfica con los ejes, que serán los puntos de la forma $(a, 0)$ y $(0, b)$ que pertenezcan a la gráfica.

(III) Estudiar la simetría de la gráfica:

(i) Si para cada $x \in \mathcal{D}$ se tiene que $-x \in \mathcal{D}$ y $f(-x) = f(x)$, se dice que la función f es *par*, y su gráfica presenta simetría respecto del eje de ordenadas OY.

(ii) Si para cada $x \in \mathcal{D}$ se tiene que $-x \in \mathcal{D}$ y $f(-x) = -f(x)$, se dice que la función f es *impar*, y su gráfica presenta simetría respecto del origen de coordenadas.

(IV) Estudiar la periodicidad, es decir, la existencia de una constante $T \neq 0$, denominada *periodo* de f, tal que si $x \in \mathcal{D}$ y $x + T \in \mathcal{D}$, entonces $f(x+T) = f(x)$.

(V) Determinar las *asíntotas* de la gráfica, que pueden ser de diversos tipos:

(i) *Horizontales*: si $\mathcal{D}$ no está acotado superiormente y

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; L \in \mathbb{R},$$

la recta de ecuación $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f.
Lo mismo se puede decir si $\mathcal{D}$ no está acotado inferiormente y existe $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

(ii) *Verticales*: si a es un punto de acumulación de $\mathcal{D}$ y se tiene que alguno de los límites laterales

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

es infinito, entonces la recta de ecuación $x = a$ es asíntota vertical de la gráfica de f.

(iii) *Oblicuas*: supongamos que $\mathcal{D}$ no está acotado superiormente y que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; m \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - m\,x\big) \;=\; c \in \mathbb{R}.$$

Entonces la recta de ecuación $y = m\,x + c$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función f.
Lo mismo se puede decir si $\mathcal{D}$ no está acotado inferiormente y se verifican análogas condiciones respecto a los límites indicados cuando x tiende a $-\infty$.

(VI) Determinar los intervalos de monotonía de la función: si f es derivable en $\mathcal{D}$, este problema se reduce a estudiar el signo de f', de acuerdo con lo expuesto en los resultados 4.31, 4.33 y 4.55.II.

(VII) Determinar los extremos relativos de f. Los puntos $a \in \mathcal{D}$ en los que es posible que f presente un extremo pueden determinarse como:

(i) Puntos no interiores al dominio de definición $\mathcal{D}$, o en los que f no es derivable. En estos casos no existe un procedimiento general y es necesario un estudio particular en cada situación para determinar la presencia de extremos.

(ii) Si f presenta un extremo relativo en $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ y f es derivable en a, como se vio en el Teorema 4.18, ha de ser $f'(a) = 0$. En los puntos que satisfagan esta condición es necesario hacer un estudio como el que sugiere el apartado 4.55.I.

(VIII) Estudiar la convexidad de f: para funciones dos veces derivables en $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, esto equivale a la determinación del signo de f'', según los resultados 4.50, 4.54 y 4.56.II.

(IX) Determinar los puntos de inflexión de f: éstos pueden presentarse en puntos en los que exista f' pero no f'', en cuyo caso se requiere un estudio particular de la función en un entorno del punto para establecer su naturaleza. Si a es un punto de inflexión y existe $f''(a)$, ha de valer 0 (de acuerdo con el apartado 4.54.III), por lo que hay que determinar los puntos en los que se anule la segunda derivada, aplicándoseles el estudio que indica el apartado 4.56.I.

4.4. Funciones equivalentes

Definición 4.57. Sean f y g dos funciones reales definidas en el mismo subconjunto A de $\mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A. Se dice que f es *equivalente* a g en el punto a si existe una función h, definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, con $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$, y tal que

$$f(x) \;=\; h(x)\,g(x) \qquad \text{para cada } x \in A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big).$$

Este hecho se significa por '$f \sim_a g$'.

Análogamente se define el concepto de funciones equivalentes en ∞ ó $-\infty$ en el caso de que el conjunto A no esté acotado superior o inferiormente, utilizándose en estos casos las expresiones '$f \sim_\infty g$' o '$f \sim_{-\infty} g$'.

Proposición 4.58. Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A, y f, g, h, φ, ψ, funciones definidas de A en $\mathbb{R}$. Se verifica:

(i) $f \sim_a f$.

(ii) Si $f \sim_a g$ entonces $g \sim_a f$.

(iii) Si $f \sim_a g$ y $g \sim_a h$, entonces $f \sim_a h$.

(iv) Si $f \sim_a g$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f \sim_a \alpha g$.

(v) Si $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ para cada $x \in A$, y $f \sim_a g$, entonces $1/f \sim_a 1/g$.

(vi) Si $g(x) \neq 0$ para cada $x \in A$ y la función f/g tiene límite 1 en el punto a, entonces $f \sim_a g$.

(vii) Si $f \sim_a g$ y $\varphi \sim_a \psi$, entonces $\varphi f \sim_a \psi g$.

(viii) Si $f \sim_a g$, ambas funciones tienen el mismo comportamiento en el punto a, es decir, tienen límite o no en dicho punto simultáneamente. Además, si tienen límite, finito o infinito, dicho límite es el mismo.

Observaciones 4.59. Las siguientes observaciones son similares a las realizadas en el caso secuencial (ver las Observaciones 2.27):

(i) Los apartados (i), (ii) y (iii) en la proposición anterior implican que la relación así definida es de equivalencia en el conjunto de las funciones definidas en A.

(ii) A efectos de cálculo de límites, en un producto de funciones es lícito sustituir una de las funciones factor por otra equivalente. Sin embargo, NO es cierto en general que si $f \sim_a g$ y $\varphi \sim_a \psi$ entonces $\varphi + f \sim_a \psi + g$.

(iii) El manejo de funciones equivalentes es extremadamente útil en la resolución de indeterminaciones.

Proposición 4.60. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, a un punto de I o un extremo de I, y φ, ψ, funciones reales positivas definidas en I y equivalentes en el punto a, que tienen límite (finito ó infinito) distinto de 1 en a, entonces las funciones $\log(\varphi)$ y $\log(\psi)$ son equivalentes en el punto a.

A continuación se presenta una relación de los infinitésimos e infinitos equivalentes más comunes. La obtención de dichas equivalencias se basa fundamentalmente en la información proporcionada por los desarrollos de Taylor de las funciones elementales, que se pueden ver en la Proposición 4.43. Compárese esta lista con la relativa a las sucesiones de números reales (Proposición 2.28).

Proposición 4.61 (Infinitésimos e infinitos equivalentes). Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in A'$ (o $a = \infty$, $-\infty$ si A no está acotado superior o inferiormente, respectivamente).

(I) Sea f una función real definida en A tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

(i) Las siguientes funciones son equivalentes a f en el punto a:

$(1)\ \operatorname{sen}(f)$ $(2)\ \operatorname{Sh}(f)$ $(3)\ \operatorname{tg}(f)$ $(4)\ \operatorname{Tgh}(f)$ $(5)\ \operatorname{arcsen}(f)$

$(6)\ \operatorname{ArgSh}(f)$ $(7)\ \operatorname{arctg}(f)$ $(8)\ \operatorname{ArgTgh}(f)$ $(9)\ e^f - 1$ $(10)\ \log(1+f)$

(ii) Si $a > 0$, $a^f - 1 \sim_a \log(a)\, f$.

(iii) Si $p > 0$, $(1+f)^p - 1 \sim_a p f$.

(iv) Las funciones

(1) $1 - \cos(f)$ (2) $\operatorname{Ch}(f) - 1$

son equivalentes a la función $f^2/2$ en a.

(II) Sea g una función real definida en A tal que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 1$. Entonces:

(i) $\log(g)$ es equivalente a $g-1$ en a.

(ii) Si $p>0$, $g^{\,p}-1 \sim_a p\,(g-1)$.

(III) Sea $P(x)=a_0+a_1\,x+\ldots+a_k\,x^k$ un polinomio de grado $k\geq 1$ ($a_k\neq 0$), y sea h una función real definida en A tal que $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\infty$, entonces $P(h)$ es equivalente a $a_k\,h(x)^k$ en a.

Observación 4.62. De las equivalencias anteriores se deduce, por ejemplo, que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= O(x) \text{ en } x_0=0\,, \\ 1-\cos(x) &= o(x) \text{ en } x_0=0\,, \end{aligned}$$

y también que, si $a_k\neq 0$, $b_m\neq 0$,

$$\begin{aligned} a_k\,x^k+a_{k-1}\,x^{k-1}+\ldots+a_1\,x+a_0 &= O(x^k) \text{ en } \infty\,, \\ \frac{a_k\,x^k+a_{k-1}\,x^{k-1}+\ldots+a_1\,x+a_0}{b_m\,x^m+b_{m-1}\,x^{m-1}+\ldots+b_1\,x+b_0} &= O(x^{k-m}) \text{ en } \infty\,. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

4.1 Determinar los números a y b para que la función f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\geq 1, \\ ax+b & \text{si } x<1, \end{cases}$$

sea derivable en el punto $x=1$.

4.2 La curva $y=ax^2+bx+c$ pasa por el punto $(1,3)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar a, b y c.

4.3 Demuéstrese que la curva $y=2x^3+6x+7$ no tiene tangentes paralelas a la recta $y=5x+3$.

4.4 Sea $c>0$. Se traza la recta tangente a la hipérbola $xy=c$ en un punto P. Probar que P es el punto medio del segmento de la recta tangente comprendido entre los ejes de coordenadas.

4.5 ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y=\dfrac{x}{x+1}$ pasan por el punto $(1,2)$?

4.6 Determinar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2,-3)$ y son tangentes a la parábola $y=x^2+x$.

4.7 Estudiar la derivabilidad, en su campo de definición, de las siguientes funciones:

(I) $f(x)=e^{-|x|},\quad x\in\mathbb{R}$ (II) $f(x)=|\log(1+x)|,\ x\in(-1,\infty)$ (III) $f(x)=|x|^{1/2},\quad x\in\mathbb{R}$

(IV) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x\in\mathbb{I}, \\ \cos(x) & \text{si } x\in\mathbb{Q} \end{cases}$ (V) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[5]{x}\,\operatorname{sen}(1/x)}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ (VI) $f(x)=|\sqrt[3]{x}|,\ x\in\mathbb{R}$

(VII) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ (VIII) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } |x|<1, \\ 0 & \text{si } |x|\geq 1 \end{cases}$

(IX) $f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\in\mathbb{I}, \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{Q} \end{cases}$ (X) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(|x|)}{x} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0\,. \end{cases}$

(XI) $f(x)=\sqrt{x^3+x^2},\ x>-1$ (XII) $f(x)=(x-2)\sqrt{|x-2|},\ x\in\mathbb{R}$

4.8 Calcular la derivada de las funciones definidas por las expresiones siguientes, en sus dominios de definición:

(I) $\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}\,)-\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\right)$ (II) $\log\left(\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$

(III) $\log\Big(\cos\Big(\mathrm{arctg}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\Big)\Big)\Big)$ (IV) $(x^3+1)^{\mathrm{sen}(x)}$ (V) $\big(x^2e^{3x}\cos(2x)\big)^x$

(VI) $\sqrt[3]{\big(1+xe^{\sqrt{x}}\big)^4}$ (VII) $\big(\mathrm{arctg}(x)+\mathrm{arcsen}(x)\big)^n$ (VIII) $\sqrt{1+\mathrm{tg}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)}$

(IX) $\log_5\big(\mathrm{arctg}\sqrt{1+\cos^2(x)}\,\big)$ (X) $\exp\big(\sqrt{\log(5x^2+7x+10)}\,\big)$ (XI) $\sqrt[4]{\dfrac{1+\mathrm{Tgh}(x)}{1-\mathrm{Tgh}(x)}}$

(XII) $x\,\mathrm{arcsen}\big(\log(x)\big)$ (XIII) $\mathrm{sen}(x)\,e^{\mathrm{tg}(x)}$ (XIV) $\cos^n(x)\,\cos(n\,x)\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.$

4.9 Sea f una función real definida en el intervalo abierto $I\subset\mathbb{R}$ y derivable en el punto $a\in I$.

(i) Probar que el límite
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$
existe y coincide con $f'(a)$.

(ii) Dar un ejemplo de una función f no derivable en a y para la cual exista ese límite.

4.10 Demostrar que la función
$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2+1}+\log\Big(\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\,\Big)$$
verifica la ecuación
$$2\,y=x\,y'+\log(y')\,.$$

4.11 Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $(0,\infty)$ a valores estrictamente positivos. Si $x\in(0,\infty)$, calcular
$$\lim_{h\to 0}\log_{\frac{x+h}{x}}\Big(\frac{f(x+h)}{f(x)}\Big)\,.$$

4.12 Demostrar que la función $y=\log\big(\dfrac{1}{1+x}\big)$ satisface en su campo de definición la igualdad
$$xy'+1=\frac{1}{1+x}.$$

4.13 Demostrar que la función $y=e^{\alpha\,\mathrm{arcsen}(x)}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$, satisface en su campo de definición la igualdad
$$(1-x^2)y''-xy'-\alpha^2y=0.$$

4.14 Estudiar, según los valores del parámetro $\alpha\in\mathbb{N}$, la existencia de derivadas sucesivas en $x=0$ para la función
$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha\,\mathrm{sen}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) & \text{si } x\neq 0\,,\\ 0 & \text{si } x=0\,.\end{cases}$$

4.15 Sean f y g funciones n veces derivables en un intervalo abierto I. Demostrar la *fórmula de Leibnitz*:
$$(f\,g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)\,g^{(k)}(x)\,,\quad x\in I\,.$$

4.16 Calcular la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

(I) $f(x)\;=\;x^2e^{4x}$ (II) $f(x)\;=\;(x^3+1)\cos(x)$ (III) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

(IV) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ (V) $f(x)=\mathrm{sen}^3(x)+\cos^3(x)\,.$

4.17 Se considera la función definida en $(0,\infty)$ por $f(x) = e^{-1/x}$. Demostrar, razonando por inducción sobre el natural n, que

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\, e^{-1/x}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

donde P_n es un polinomio de grado $2n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿existe $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)$?

4.18 Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \;\le\; (x-y)^2,$$

cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es constante.

4.19 Sean a y b números reales con $a > 0$. Demostrar que el polinomio $P(x) = x^3 + ax + b$ tiene una única raíz real.

4.20 Para cada $\mu \in \mathbb{R}$ se considera la función definida por

$$f_\mu(x) = x^3 - 3x + \mu.$$

(i) Estudiar para qué valores de μ se puede garantizar la existencia de raíces de f_μ en $[0,1]$.

(ii) Demostrar que, cualquiera que sea μ, f_μ nunca tiene dos raíces en $[0,1]$.

4.21 Probar que si f es un polinomio de grado n y la ecuación $f(x) = 0$ tiene n raíces simples, entonces la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente $n-1$ raíces simples.

4.22 Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$, tales que:
(i) $g(0) = g(1) = 0$.
(ii) f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x)\,g(x) + f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Probar que existen infinitos puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 1$.

4.23 Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$, derivable en (a,b), y tal que

$$f(a) = f(b) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(x) \neq 0 \quad \text{para cada } x \in (a,b).$$

Demostrar que, dado $k \in \mathbb{R}$ cualquiera, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)/f(c) = k$.
Indicación: estudiar la función $F(x) = f(x)\, e^{-kx}$.

4.24 Sea f una función que admite derivada tercera en $[a,b]$ y tal que

$$f(a) \;=\; f(b) \;=\; f'(a) \;=\; f'(b) \;=\; 0.$$

Probar que existe $c \in (a,b)$ para el cual $f'''(c) = 0$.

4.25 Sea f una función definida, positiva y tres veces derivable en el intervalo $(0,1)$. Se supone que existen $a, b \in (0,1)$ con $a < b$, y $f(a) = f(b) = 0$. Probar que existe un punto $c \in (0,1)$ de manera que $f'''(c) = 0$.

4.26 Sean $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ y $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$. Demostrar que para todo $x \in (0,1]$ se tiene que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}.$$

¿Contradice este hecho el teorema de Cauchy del valor medio?

4.27 Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (3-x^2)/2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 1/x & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Estudiar si existe un punto $c \in (0,2)$ tal que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$. ¿Cuántos puntos $c \in (0,2)$ verifican la igualdad anterior?

4.28 Probar las siguientes desigualdades:

(I) Para $x \in (0,1)$, $\operatorname{arcsen}(x) < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(II) Para $x > 0$, $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ y $\dfrac{1}{1+x} < \log(1+x) - \log(x) < \dfrac{1}{x}$.

(III) Si $x \geq 0$, $\mathrm{Tgh}(x) \leq x \leq \mathrm{Sh}(x)$. (IV) Si $x > 0$, $\mathrm{sen}(x) < x$.

(V) Si $0 < \alpha < 1$, para cada número natural n se verifica que

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

(VI) Si $x > 0$, $e^x > 1 + \log(1+x)$. (VII) Para todo $x \geq 1$, $\log(x) \geq \dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

4.29 Calcular:

(I) $\lim\limits_{x\to\infty} \big((x+1)\,\mathrm{arctg}(x+1) - x\,\mathrm{arctg}(x)\big)$ (II) $\lim\limits_{x\to\infty} \left((x+1)^2 \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x+1}\right) - x^2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

4.30 Se consideran las funciones $f(x) = \mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{sen}(1/x)$ y $g(x) = e^x - 1$.

(i) Calcular, sin recurrir a la regla de L'Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(ii) Probar que no existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. ¿Contradice esto la citada regla?

4.31 Calcular, haciendo uso de la regla de L'Hôpital, los siguientes límites:

(I) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\pi - 2\,x)\,\mathrm{tg}(x)$ (II) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$ (III) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)}\right)$

(IV) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}(x)\right)^x$. (V) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(ae^x + P(x)\big)$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y P es un polinomio.

(VI) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\log(x) - x\big)$ (VII) $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(2^{1/x} - 1\big)$ (VIII) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log(x)\log(1-x)$

(IX) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \log(x)$ (X) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1/x)^{\mathrm{tg}(x)}$

4.32 Sea f la función definida en $(0,\infty)$ por

$$f(x) = (x+1)\log(x+1) - x\log(x) - \log(2\,x+1).$$

Probar que f es estrictamente creciente en $(0,\infty)$.

4.33 Estudiar la variación de la función f definida en $(0,\infty)$ por $f(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$. ¿Qué número es mayor, e^π o π^e? Determinar todos los pares de números naturales distintos, m y n, tales que $m^n = n^m$.

4.34 Se considera la función f definida en $(0,\infty)$ por $f(x) = x^{1/x}$.

(i) Basándose en la monotonía de f, hallar el extremo superior del conjunto $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, probar que uno de los números $\sqrt[m]{n}$ o $\sqrt[n]{m}$ es menor o igual que $\sqrt[3]{3}$.

4.35 Calcular los extremos de la función $f(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos(x)$.

4.36 Sea f una función real que admite derivada segunda en el intervalo $[-1,1]$. Se supone que:
(i) $|f(x)| \leq 1$ para cada $x \in [-1,1]$.
(ii) $|f''(x)| \leq 1$ para cada $x \in [-1,1]$.
Demostrar que $|f'(x)| \leq 2$ para cada $x \in [-1,1]$.

4.37 Calcular aproximaciones decimales de:
(i) $\sqrt[3]{7}$ con un error menor que 10^{-4}.
(ii) $\mathrm{sen}(51^\circ)$ con un error menor que $2 \cdot 10^{-4}$.

4.38 Calcular los desarrollos limitados siguientes:
(I) De orden 4 en $x = 0$ para la función $f(x) = \mathrm{sen}(x)\,e^x$.
(II) De orden 4 en $x = 0$ para la función $f(x) = \log(e+x)$.
(III) De orden 3 en $x = 5$ para la función $f(x) = \sqrt[3]{3+x}$.
(IV) De orden 4 en $x = 0$ para la función $f(x) = x/\cos(x)$.
(V) De orden 4 en $x = 0$ para la función $f(x) = 1 - \cos(x) + \log\big(\cos(x)\big)$.
(VI) De orden 3 en $x = \pi/4$ para la función $f(x) = \log\big(\mathrm{tg}(x)\big)$.

4.39 Calcular los límites siguientes:

(I) $\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$ (II) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x\,e^x)-\cos(x\,e^{-x})}{x^3}$

(III) $\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(2\,x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$ (IV) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3(x^2)-\operatorname{sen}^2(x^3)}{x^{10}}$

(V) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)-\operatorname{arcsen}(x^2)}{x^4}$ (VI) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\operatorname{tg}(\pi\,x/4)}$

(VII) $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{2}{n^2+3n}}\right)^{n^2+3n}$ (VIII) $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)-\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)}$

(IX) $\lim_{x\to 0}\big(x+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)\big)^{\operatorname{cotg}(x)}$ (X) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\big(1-\cos(x)\big)}{x^4}$

(XI) $\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)\log(1-x^2)}{\big((1-x^2)^p-1\big)\operatorname{arcsen}(x)}$, donde $a>0$, $p\in\mathbb{N}$. (XII) $x\Big((x+1)^{1/x}-x^{1/x}\Big)$

(XIII) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\big(\operatorname{tg}^2(x)\big)}{2\operatorname{sen}^4(x)+\operatorname{sen}^5(x)}$ (XIV) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\alpha\,x)-\alpha\operatorname{tg}(x)}{\alpha\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(\alpha\,x)}$

(XV) $\lim_{x\to 0}\frac{\big(\operatorname{sen}(x)-x\big)^4}{\big(\log(x+1)-x\big)^6}$ (XVI) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{v}{\sqrt{n}}-\frac{v^2}{2n}-\log\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}$ $(v\in\mathbb{R})$

(XVII) $\lim_{x\to 0^+}\left(1+x^7\right)^{\frac{1}{15\,x-5\,x^3+3\,x^5-15\operatorname{arctg}(x)}}$. (XVIII) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}\big(\operatorname{tg}\big(x^2/2\big)\big)\big)}{\log\big(\cos(3x)\big)}$

(XIX) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)-1}{2\,\log(1+x)}$ (XX) $\lim_{x\to a}\left(4-\frac{3\,x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\,x}{2\,a}\right)}$

(XXI) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$, $a>0$ (XXII) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$, $a,b,c>0$.

(XXIII) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}(x)}\right)^{1/x}$ (XXIV) $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\operatorname{tg}^2(x)}{x\,\big(1-\cos(x)\big)}$

(XXV) $\lim_{x\to 0}\frac{x\Big(1-\cos(2x)\Big)\log(1+x)}{\big(e^x-1\big)\operatorname{tg}^2(x)\operatorname{sen}(2x)}$ (XXVI) $\lim_{x\to 1/2}(2x^2-3x+1)\operatorname{tg}(\pi x)$

(XXVII) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos\left(\theta+x\right)}{\cos(\theta)}\right)^{1/x}$, $\cos(\theta)\neq 0$.

4.40 Sea $P(x)=a_p\,x^p+a_{p-1}\,x^{p-1}+\ldots+a_1\,x+a_0$, con $a_p>0$. Demostrar que los infinitos $\log\big(P(x)\big)$ y $p\log(x)$ son equivalentes cuando x tiende a ∞.

Como aplicación, calcular los siguientes límites:

(I) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(3\,x^4+x^2+1)}{\log(7\,x^9+3\,x^6)}$ (II) $\lim_{x\to\infty}\left(3\,x^2+6\,x^5\right)^{\frac{1}{2+\log(4\,x^2+5)}}$.

4.41 Demostrar que la función

$$f(x)=\begin{cases}x^3\log(x) & \textbf{si } x>0\,,\\ 0 & \textbf{si } x\le 0\,,\end{cases}$$

admite desarrollo limitado de orden 2 en el punto $x_0=0$. Probar que, sin embargo, la función f no admite desarrollo limitado de orden 3 en dicho punto.

4.42 Representar gráficamente la curva de ecuación $y=f(x)$, determinando el dominio de definición más grande posible de la función f, en los siguientes casos:

(I) $y=x^3-5\,x^2+5\,x-1$ (II) $y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+1)^2}$ (III) $y=\sqrt{x^3+2\,x^2-x-2}$

(IV) $y=(x-1)\,\sqrt[3]{x^2}$ (V) $y=x\,\exp(1/x)$ (VI) $y=x\,\exp\left(\frac{2\,x}{x^2-1}\right)$

(VII) $y = \dfrac{-1}{4}\, x^2 \log(x)$ (VIII) $y = \dfrac{2\cos(4\,x)}{1+x^2}$. (IX) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

(X) $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$ (XI) $y = \dfrac{\log(x)}{x}$ (XII) $y = x^{1/x}$

(XIII) $y = \log(\cos(x))$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (XIV) $y = \mathrm{Sh}^2(x) + \mathrm{Ch}^2(x)$

4.43 Para cada número real λ se define la función

$$f_\lambda(x) = \frac{x^2 + 5\,x + \lambda}{x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\,.$$

(i) Determinar los valores de λ para los que f_λ no presenta extremos relativos, y para los restantes valores de λ determinar los extremos relativos de f_λ.

(ii) Hacer un esbozo de la representación gráfica de f_λ en función de λ.

(iii) Para $\lambda \neq 0$ la recta de ecuación $y = x + 4$ corta a la gráfica de f_λ en un punto P_λ. Probar que existe un punto Q, independiente de λ, tal que la tangente a f_λ en el punto P_λ pasa por Q.

4.44 Se considera la función f definida por

$$f(x) = \log(x) - x + 3, \quad x \in (0, \infty)\,.$$

(i) Probar que existen dos únicos valores a y b, con $0 < a < 1 < b$, tales que $f(a) = f(b) = 0$.

(ii) Demostrar que para cada $x \in (1, b)$ se tiene que $x < \log(x) + 3 < b$.

(iii) Sea $c \in (1, b)$. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_1 = c, \qquad x_{n+1} = \log(x_n) + 3, \quad n \geq 1\,.$$

Estudiar la convergencia de la sucesión y, si es el caso, calcular su límite.

4.45 Dos móviles permanecen constantemente sobre un mismo plano vertical, describiendo, respectivamente, las trayectorias parametrizadas por

$$(t, t^2 + t - 6) \qquad \text{y} \qquad (t, t^2/2 - t + 4)\,,$$

siendo t el tiempo. Determinar en qué instantes se desplazan paralelamente y en qué instantes se desplazan sobre direcciones perpendiculares.

4.46 Un canal abierto, de fondo horizontal y cuyas paredes laterales tienen una inclinación de 45°, ha de tener una sección de $12\,\mathrm{m}^2$. Determinar las dimensiones de la sección que hacen mínimo el perímetro que se encuentra en contacto con el fluido.

4.47 La ecuación de la transformación *adiabática* (es decir, sin intercambio de calor) para el aire es $P \cdot V^{7/5} = C$, siendo P la presión, V el volumen y C una constante. Se desea saber la variación instantánea de la presión respecto al tiempo, si V decrece de manera uniforme a razón de $1\,\mathrm{m}^3$ por minuto.

4.48 Al caer cierta cantidad de arena en el suelo a razón de $12\,\mathrm{cm}^3$ por segundo, se forma un montón cónico cuya altura es $2/3$ del radio de su base. ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la altura cuando ésta ha alcanzado un valor de $10\,\mathrm{m}$?

4.49 Se denota por $f(t)$ la cantidad de una substancia radiactiva en el instante de tiempo t. Se sabe que dicha substancia se descompone a una velocidad proporcional en cada instante a la cantidad de la materia presente, es decir, $f'(t) = -k\,f(t)$.
(i) Demostrar que $f(t) = f(0)\,e^{-k\,t}$, $t \in \mathbb{R}$.
(ii) ¿Cuánto tiempo tardará en reducirse la masa inicial a la mitad?

4.50 Partiendo de una cierta cantidad p de una sustancia A, mediante una reacción monomolecular se obtiene otra sustancia B, que al mismo tiempo se descompone por vía monomolecular en otra sustancia C. Si las constantes de estas reacciones son respectivamente k_1 y k_2, la cantidad $x(t)$ de sustancia B presente al cabo del tiempo t viene dada por la ecuación

$$x(t) \;=\; \frac{k_1\,p}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right), \qquad k_1\,,\, k_2\,,\, p > 0\,.$$

¿Cuál es el momento en que debe detenerse la reacción para obtener una máxima cantidad de la sustancia B?

4.51 Sobre un pedestal de altura h se halla una estatua de altura a. Determínense los puntos del suelo desde los cuales se ve la estatua bajo un ángulo máximo.

4.52 Una ventana está formada por un rectángulo y un triángulo isósceles cuya base es el lado superior del rectángulo y cuya altura es igual a $3/8$ de la longitud de la base. Si el perímetro de la ventana es de $9\,\mathrm{m}$, determinar las dimensiones de los lados para que el flujo de luz sea máximo.

4.53 Una fábrica de cajas de cartón dispone de láminas rectangulares cuyos lados tienen longitudes a y b. Las cajas (sin tapa) se construyen eliminando de cada una de las esquinas un cuadrado de lado x. Determinar la longitud de x para que el volumen de la caja sea máximo.

4.54 Sean A y B dos puntos del semiplano superior con abscisas distintas. Un rayo luminoso pasa por A y, tras reflejarse en el eje OX, llega al punto B. Sabiendo que la trayectoria trazada por el rayo es la que exige un tiempo mínimo (principio de Fermat), demostrar la *ley de reflexión de la luz* (es decir, el rayo se refleja con el mismo ángulo con el que incide).

4.55 Un barco se acerca a un puerto con celeridad constante v_1, y otro se aleja del puerto con celeridad constante v_2. Las trayectorias de ambas naves son rectilíneas y forman entre sí un ángulo de amplitud α. Hallar la distancia de los dos barcos al puerto en el instante en que la distancia entre ambos sea mínima.

4.56 Dada la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, determinar las longitudes de los lados del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse, teniendo sus lados paralelos a los ejes.

4.57 Un triángulo isósceles de perímetro 50 metros gira alrededor de la altura relativa al lado no igual, engendrando un cono. Determinar las longitudes de los lados del triángulo para que el cono tenga volumen máximo.

4.58 En una circunferencia de radio r se consideran dos ángulos consecutivos y complementarios. Hallar el valor máximo de la suma de sus respectivas cuerdas.

4.59 Se sabe que el precio de un diamante es proporcional al cubo de su peso. Demostrar que al partir un diamante en dos partes se deprecia, y averiguar cómo ha de partirse para que la depreciación sea máxima.

4.60 Se desea construir un sólido, de volumen prefijado, formado por un cilindro rematado por una semiesfera. Determinar las dimensiones de dicho sólido para que tenga la menor superficie posible.

4.61 De un círculo de papel se recorta un sector circular de ángulo central α y se forma con el papel sobrante un cucurucho. Hallar el valor de α para el que el cucurucho (de forma cónica) tiene volumen máximo.

4.62 Determinar los puntos de la parábola $y=4-x^2$ más cercanos al punto $(0,1)$.

4.63 Una cuerda de 1 metro de longitud se corta en dos partes para construir un cuadrado con una y una circunferencia con la otra. Determinar cómo se ha de realizar el corte para que la suma de las áreas de ambas figuras sea mínima.

4.64 Problemas propuestos en examen:
11 Febrero 2000, examen del primer parcial, problema 3 y cuestiones 3 y 4.
24 Junio 2000, examen final, problema 2 y cuestión 1.
16 Septiembre 2000, examen extraordinario, problema 1 y cuestión 2.
2 Febrero 2001, examen del primer parcial, problema 4.
18 Junio 2001, examen del segundo parcial, problemas 1 y 2.
29 Junio 2001, examen final, alumnos que se examinan de todo, problema 1.
29 Junio 2001, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 3 y cuestión 3.
14 Septiembre 2001, examen extraordinario, problema 1.
8 Febrero 2002, examen del primer parcial, cuestión 3.
29 Junio 2002, examen final, alumnos que se examinan de todo, problema 1 y cuestión 3.
29 Junio 2002, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 3 y cuestión 2.

11 Septiembre 2002, examen extraordinario, problema 2 y cuestión 3.
10 Febrero 2003, examen del primer parcial, problema 3 y cuestión 3.
30 Junio 2003, examen final, alumnos que se examinan de todo, problema 2 y cuestión 2.
30 Junio 2003, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problemas 1 y 3 y cuestión 3.
11 Septiembre 2003, examen extraordinario, problemas 1 y 2 y cuestión 3.
13 febrero 2004, examen del primer parcial, problema 3 y cuestión 3.
29 Junio 2004, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 3 y cuestión 3.
29 Junio 2004, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 1.
11 Septiembre 2004, examen extraordinario, cuestión 1.
31 Enero 2005, examen del primer parcial, problema 3.
4 Junio 2005, examen del segundo parcial, cuestión 1.
30 Junio 2005, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problemas 1 y 3 y cuestiones 2 y 3.
12 Septiembre 2005, examen extraordinario, cuestión 2.
1 Febrero 2006, examen del primer parcial, problema 3 y cuestiones 2 y 3.
10 Mayo 2006, examen parcial, problema 1.
10 Junio 2006, examen parcial, cuestión 1.
30 Junio 2006, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problemas 1 y 3 y cuestión 3.
12 Septiembre 2006, examen extraordinario, problema 1 y cuestiones 1 y 2.
1 Febrero 2007, examen del primer parcial, cuestión 3.
8 Junio 2007, examen del segundo parcial, problema 1.
29 Junio 2007, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problemas 1 y 3 y cuestiones 2 y 3.
29 Junio 2007, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 1.
11 Septiembre 2007, examen extraordinario, problemas 1 y 2.
31 Enero 2008, examen del primer parcial, problemas 1 y 2 y cuestiones 2 y 3.
6 Junio 2008, examen del segundo parcial, problema 1 y cuestión 1.
9 Septiembre 2008, examen extraordinario, cuestión 1.
30 Enero 2009, examen del primer parcial, problemas 1 y 3 y cuestión 3.
5 Junio 2009, examen del segundo parcial, problema 1.
29 Junio 2009, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problemas 1 y 2 y cuestión 2.
9 Septiembre 2009, examen extraordinario, problema 1 y cuestión 2.
9 Febrero 2010, examen del primer parcial, problemas 1, 2 y 4 y cuestiones 2 y 3.
19 Abril 2010, prueba de evaluación continua, cuestiones 1 y 2.
18 Junio 2010, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 3 y cuestión 3.
18 Junio 2010, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 1.
13 Septiembre 2010, examen extraordinario, cuestión 2.
11 Enero 2011, examen del primer parcial, completo.
2 Marzo 2011, prueba de evaluación continua, completa.
26 Enero 2012, examen del primer parcial, problema 3 y cuestión 3.
28 Febrero 2012, quinta prueba de evaluación continua, completa.
19 Junio 2012, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, cuestión 1.
18 Julio 2012, examen extraordinario, cuestiones 2 y 4.
14 Enero 2013, tercera prueba de evaluación continua, problema 3.
7 Febrero 2013, examen del primer parcial, problemas 2 y 3 y cuestión 3.
13 Marzo 2013, cuarta prueba de evaluación continua, completa.
6 Junio 2013, examen final, alumnos que se examinan de todo, problema 1 y cuestión 1.
1 Julio 2013, examen extraordinario, problema 2 y cuestión 1.
6 Febrero 2014, examen del primer parcial, problema 2 y cuestiones 2 y 3.
20 Marzo 2014, cuarta prueba de evaluación continua, completa.
5 Junio 2014, examen final, alumnos que se examinan de todo, problema 1.
2 Julio 2014, examen extraordinario, cuestión 2.

Tema 5

Series de números reales

El concepto de serie numérica, que generaliza el de sumas finitas, aparece ya en la Matemática de la Grecia clásica; sin embargo, el tratamiento riguroso de esta teoría y, especialmente, de la de series de funciones, surge en el siglo XIX de la necesidad de dar respuesta a ciertos problemas, relacionados principalmente con ecuaciones diferenciales de la Física Matemática que no admiten una resolución elemental (citemos como ejemplo los trabajos de Fourier sobre el calor).

Los principales resultados sobre convergencia de series, tales como el criterio de la raíz y el del cociente, se deben a Cauchy, así como el criterio general de convergencia que lleva su nombre.

5.1. Definiciones y terminología

Definición 5.1. Una *serie de números reales* es un par ordenado de sucesiones de números reales

$$\big(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\,,\,\{S_n\}_{n=1}^{\infty}\big)\,, \tag{5.1}$$

donde la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ viene dada por

$$S_n \;=\; a_1 + a_2 + \ldots + a_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

El número a_n se llama *término n-ésimo* de la serie y el número S_n se denomina *suma parcial n-ésima* de la serie. Tradicionalmente se utiliza la notación $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar la serie (5.1).

Todas las series que consideraremos en este tema son de números reales, aunque muchos de los conceptos y resultados que presentaremos son válidos para series de números complejos, o incluso en situaciones más generales.

Definición 5.2. Se dice que una serie es *convergente* si la sucesión de sumas parciales de la misma es una sucesión convergente. En este caso el número real $\lim_{n\to\infty} S_n$ se denomina *suma* de la serie y se denota por

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

En caso contrario se dice que la serie *no converge*.

Observaciones 5.3. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y designemos por $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales de la misma.

(i) Nótese que, abusando de la notación, se ha denotado igual a la serie y a su suma en el caso de que sea convergente. La diferencia viene dada por el contexto.

(ii) *Estudiar la naturaleza, o carácter*, de la serie consiste en determinar su convergencia o su no convergencia. Si la serie es convergente, el problema de *sumar* la serie es encontrar la suma de la misma, es decir, determinar el número $\lim_{n\to\infty} S_n$.

(iii) Por diversas razones, en algunas ocasiones las series se indizan a partir de un número entero distinto de 1, por ejemplo

$$\sum_{p=-1}^{\infty} a_p\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,, \qquad \sum_{m=2}^{\infty} a_m,\ \ldots$$

(iv) Se puede decir que uno de los principales problemas de la teoría de las series numéricas, que formalizan el concepto de *suma infinita*, consiste en el estudio de la generalización de las propiedades de las sumas finitas (asociatividad, conmutatividad, distributividad, etc.).

Del hecho de que las sucesiones convergentes son, precisamente, las sucesiones de Cauchy se deducen fácilmente los dos resultados siguientes.

Proposición 5.4 (Criterio de convergencia de Cauchy). Es condición necesaria y suficiente para que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente que para cada número real $\varepsilon > 0$ exista un número natural n_0 (que depende de ε), tal que para cada par de números naturales p y q con $p > q \geq n_0$, se verifique que

$$|S_p - S_q| = |a_{q+1} + \ldots + a_p| < \varepsilon \,.$$

En particular, tomando $p = q + 1$ en la relación anterior, se deduce:

Corolario 5.5 (Condición necesaria de convergencia). Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observación 5.6. El recíproco de la condición anterior es, en general, falso. Como ejemplo, basta considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, denominada *serie armónica* (ver el ejercicio 2.6, y también el ejercicio 5.32 para más información).

A continuación se presentan varios ejemplos en los que la forma del término general permite estudiar fácilmente el carácter y la suma de la serie.

Ejemplos 5.7.

(I) **Series geométricas**: Se llama *serie geométrica* de razón r a una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^n$. Si $r \neq 1$ las sumas parciales de tal serie resultan ser

$$S_n \;=\; a \sum_{k=1}^{n} r^k \;=\; a\,\frac{r - r^{n+1}}{1 - r}\,,$$

de donde se deduce fácilmente que:

1.- Si $a = 0$ la serie converge y su suma es 0.

2.- Si $a \neq 0$ y $|r| < 1$, la serie converge. En este caso la suma S de la serie viene dada por

$$S \;=\; \lim_{n\to\infty} a\,\frac{r - r^{n+1}}{1 - r} \;=\; \frac{a\, r}{1 - r}\,.$$

3.- Si $a \neq 0$ y $|r| \geq 1$, la serie no converge.

(II) **Series aritmético-geométricas**: Se llama *serie aritmético-geométrica* a una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$, donde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una progresión aritmética y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una progresión geométrica. La serie converge si, y sólo si, la razón de la progresión geométrica tiene valor absoluto estrictamente menor que 1 (ver el ejercicio 5.3).

(III) **Series telescópicas**: Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *telescópica* o, de forma más precisa, que está escrita en forma telescópica, si es posible encontrar una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$a_n = b_{n+1} - b_n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Puesto que las sumas parciales vienen dadas por $S_n = b_{n+1} - b_1$, $n \in \mathbb{N}$, la serie converge si, y sólo si, la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. En este caso, la suma S de la serie viene dada por

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1\,.$$

Nota: Toda serie puede ser escrita en forma telescópica; basta observar que, si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ denota la sucesión de sus sumas parciales, y se define $b_1 = S_0 = 0$ y $b_n = S_{n-1}$, $n \geq 2$, entonces

$$a_n \;=\; S_n - S_{n-1} = b_{n+1} - b_n\,.$$

Obviamente, los casos de interés son aquéllos en los que se puede escribir en términos de una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ fácil de estudiar.

Propiedades 5.8. Las siguientes propiedades se deducen de las adecuadas relativas a sucesiones convergentes, cuando se aplican a las sucesiones de sumas parciales:

(I) El carácter de una serie no se altera cuando se suprimen o modifican los p primeros términos de la misma (o un número finito de ellos). Concretando más:

(I.a) Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que existe $p \in \mathbb{N}$ de manera que $a_n = b_n$ para cada $n > p$. Entonces ambas series tienen el mismo carácter. Además, si son convergentes se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{j=1}^{p} a_j - \sum_{j=1}^{p} b_j .$$

(I.b) Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y $p \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ tiene el mismo carácter que la anterior. Además, si son convergentes se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{j=1}^{p} a_j + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n .$$

Nota: La serie $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$, obtenida a partir de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suprimiendo los p primeros términos de ésta, se denomina *resto de orden* p. Por lo anterior, una serie converge si, y sólo si, converge uno cualquiera de sus restos. En este caso, si R_p denota la suma del resto de orden p, se tiene que $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$.

(II) El carácter de una serie no se altera cuando sus términos se multiplican por una constante no nula, es decir, si $c \neq 0$ las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ tienen el mismo carácter.

(III) Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Si α y β son números reales, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$ es convergente. Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\, a_n + \beta\, b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

(IV) Si en una serie convergente se sustituyen grupos de términos consecutivos por sus correspondientes sumas, se obtiene otra serie convergente con la misma suma. Explícitamente, sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente y $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ definida por

$$b_1 = \sum_{j=1}^{n_1} a_j ; \qquad b_k = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j , \quad k \geq 2 ,$$

es convergente y tiene la misma suma que la primera. De hecho, si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es la subsucesión $\{S_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, cuya convergencia se deduce de la de $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Este resultado generaliza la propiedad asociativa para sumas finitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots$$

Nota: El recíproco no es cierto en general, es decir, existen series no convergentes tales que, al sustituir grupos de términos consecutivos por sus correspondientes sumas, se obtiene una serie convergente. Como ejemplo basta considerar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad \text{y} \qquad n_k = 2\,k , \quad \text{en cuyo caso} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 .$$

En el ejercicio 5.31 se presentan casos en los que, bajo ciertas condiciones, la convergencia de la serie obtenida al agrupar términos sí implica la convergencia de la serie original.

5.2. Series de términos positivos

Esta sección se dedica al estudio de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tales que $a_n \geq 0$ para cada n. Aunque en rigor sus términos son no negativos, adoptaremos la terminología comúnmente aceptada en este contexto y las denominaremos de forma genérica *series de términos positivos*.

Proposición 5.9. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Designemos por $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de sumas parciales de la misma. Entonces:

(i) La sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente.

(ii) Si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente, la serie converge.

(iii) Si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, la serie no converge; de hecho $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

En la situación del apartado (iii) se dice que la serie *diverge* a ∞.

Proposición 5.10 (Criterio de comparación, primera versión). Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Se supone que existe un número natural n_0 tal que

$$a_n \le b_n \qquad \text{para cada } n \ge n_0 \,. \tag{5.2}$$

Entonces:

(i) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge, tampoco converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Habitualmente la comparación de dos series, es decir, la obtención de las desigualdades (5.2), se efectúa mediante el estudio de los cocientes a_n/b_n, a veces por un paso al límite. Esto se concreta en el siguiente resultado.

Corolario 5.11 (Criterio de comparación, segunda versión). Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Se supone que $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que existe, finito o infinito, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \,.$$

Entonces:

(i) Si L es finito y no nulo, ambas series tienen el mismo carácter.

(ii) Si $L = \infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge, tampoco converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) Si $L = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ya conocemos el carácter de algunas series (geométricas, aritmético-geométricas) que pueden servir como modelos para comparar con otras bajo estudio. Con vistas a la ampliación de este pequeño catálogo es interesante el siguiente resultado.

Proposición 5.12 (Criterio de condensación de Cauchy). Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente hacia 0, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ tienen el mismo carácter.

Nota: Como se pide comprobar en el ejercicio 5.5, este criterio resuelve el carácter de las series del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad (\textit{serie de Riemann de exponente } \alpha > 0),$$

que resultan ser convergentes si, y sólo si, $\alpha > 1$, y el de las series

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta} \qquad (\textit{serie de Bertrand de exponentes } \alpha, \beta > 0),$$

que son convergentes sólo cuando se verifica una de las dos condiciones siguientes:

$$\alpha > 1 \ (\text{y } \beta \text{ arbitrario}), \qquad \text{ó} \qquad \alpha = 1 \ \text{y} \ \beta > 1 \,.$$

El criterio de comparación adopta múltiples formas más o menos generales, entre otras, las que se citan a continuación. En particular, los criterios del cociente y de la raíz se deducen de la comparación con series geométricas y de la condición necesaria de convergencia (ver el Corolario 5.5). En lo que sigue de esta sección $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será una serie de términos positivos.

Proposición 5.13 (Criterio de d'Alembert o del cociente). Si $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\mu < 1$ (respectivamente, $\mu \geq 1$) de modo que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \mu \qquad (\text{resp. } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \mu),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (resp. diverge).

En particular, si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \text{ (finito o infinito)},$$

la serie converge si $\lambda < 1$, y diverge si $\lambda > 1$ o $\lambda = \infty$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

Proposición 5.14 (Criterio de Raabe). Si $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\mu > 1$ (respectivamente, $\mu \leq 1$) tales que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \mu \qquad (\text{resp. } n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \mu),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (resp. diverge).

En particular, si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda \text{ (finito o infinito)},$$

la serie converge si $\lambda > 1$ o $\lambda = \infty$, y diverge si $\lambda < 1$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

Nota: A este criterio se suele recurrir cuando el del cociente lleva al caso dudoso $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Por ejemplo, este criterio resuelve el carácter de las series hipergeométricas, descritas en el siguiente ejemplo y en el ejercicio 5.4.

Ejemplo 5.15. Series hipergeométricas: Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, es *hipergeométrica* si es posible determinar números reales α, β, γ, con $\alpha > 0$ y tales que $\alpha n + \gamma \neq 0$, $n \geq 1$, y

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Las sumas parciales S_n de la serie verifican la igualdad

$$(\alpha + \beta - \gamma)\, S_n = a_n\,(n\,\alpha + \beta) - a_1\,\gamma\,.$$

La serie converge si, y sólo si, $\gamma > \alpha + \beta$, y en este caso su suma se obtiene pasando al límite en la relación anterior; resulta que si la serie converge ha de ser $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a_n = 0$ y, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\gamma\, a_1}{\gamma - \alpha - \beta}\,.$$

Proposición 5.16 (Criterio de la raíz). Si existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\mu < 1$ (resp. $\mu \geq 1$) de modo que para cada $n \geq n_0$ se tiene que

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \mu \quad \bigl(\text{resp. } \sqrt[n]{a_n} \geq \mu\bigr),$$

entonces la serie converge (resp. diverge).

En particular, si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \text{ (finito o infinito)},$$

la serie converge si $\lambda < 1$, y diverge si $\lambda > 1$ o $\lambda = \infty$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

Nota: Si el criterio del cociente determina el carácter de una serie, también lo hace el de la raíz, pero no recíprocamente (ver los apartados (III) y (IV) del ejercicio 2.25). Además, este último puede ser aplicado a series con términos nulos.

Cuando el criterio de comparación se usa tomando como referencia las series de Riemann y de Bertrand se obtienen los siguientes criterios:

Proposición 5.17 (Criterio de Pringsheim o del producto). Si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lambda$$

y es finito y no nulo, entonces la serie converge si $\alpha > 1$ y no converge si $\alpha \leq 1$.

Proposición 5.18 (Primer criterio logarítmico). Si $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\mu > 1$ (respectivamente, $\mu \leq 1$) tales que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$-\frac{\log(a_n)}{\log(n)} \geq \mu \qquad (\text{resp. } -\frac{\log(a_n)}{\log(n)} \leq \mu),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge (resp. diverge).

En particular, si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log(a_n)}{\log(n)} = \lambda \text{ (finito o infinito)},$$

la serie converge si $\lambda > 1$ o $\lambda = \infty$, y no converge si $\lambda < 1$ o $\lambda = -\infty$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

Proposición 5.19 (Segundo criterio logarítmico). Si $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\mu > 1$ (respectivamente, $\mu \leq 1$) tales que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{-\log(n\, a_n)}{\log\big(\log(n)\big)} \geq \mu \qquad (\text{resp. } \frac{-\log(n\, a_n)}{\log\big(\log(n)\big)} \leq \mu),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge (resp. diverge).

En particular, si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log(n\, a_n)}{\log\big(\log(n)\big)} = \lambda \text{ (finito o infinito)},$$

la serie converge si $\lambda > 1$ o $\lambda = \infty$, y diverge si $\lambda < 1$ o $\lambda = -\infty$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

5.3. Convergencia absoluta

Dada una serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$, la serie $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ es de términos positivos y, por tanto, le son aplicables los criterios de convergencia enunciados en la sección anterior. Por ello, para el estudio del carácter de una serie de términos de signo arbitrario puede ser útil analizar la serie de los valores absolutos de sus términos.

Definición 5.20. Se dice que una serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ es convergente.

Observación 5.21. Dado un número real a se definen los números

$$a^+ = \frac{|a| + a}{2} \qquad \text{y} \qquad a^- = \frac{|a| - a}{2},$$

que verifican las siguientes propiedades:

(i) $a^+ = \text{máx}\{a, 0\} \geq 0$. (ii) $a^- = \text{máx}\{-a, 0\} \geq 0$.
(iii) $a = a^+ - a^-$. (iv) $|a| = a^+ + a^-$.

Teorema 5.22. Sea $\sum_{n=1}^\infty a_n$ una serie. Entonces:

(i) Las series $\sum_{n=1}^\infty a_n^+$ y $\sum_{n=1}^\infty a_n^-$ son convergentes si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es absolutamente convergente.

(ii) Si la serie es absolutamente convergente, también es convergente, y además,

$$\left| \sum_{n=1}^\infty a_n \right| \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n|.$$

Definición 5.23. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie. Si $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación biyectiva (una *permutación* del orden), se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ es una *reordenación* de la serie dada.

Teorema 5.24. Cualquier reordenación de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente es también absolutamente convergente. Además, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ es una reordenación de la serie original, las sumas de ambas series coinciden.

Observaciones 5.25.

(i) En particular, la reordenación de una serie de términos positivos no altera su carácter ni, en caso de convergencia, su suma.

(ii) Este teorema representa para las series absolutamente convergentes el análogo de la propiedad conmutativa de las sumas finitas. En otras palabras, dada una familia de números reales $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente es posible definir la suma de los elementos de la familia sin ambigüedad.

(iii) En general el teorema anterior no es válido para series convergentes de términos cualesquiera. De hecho, se verifica el siguiente resultado:

Teorema 5.26 (de reordenación de Riemann). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente, pero no absolutamente convergente. Entonces, para todo número real x existe una reordenación de la serie cuya suma es x. Análogamente, existen reordenaciones de la serie que divergen hacia ∞ ó $-\infty$.

(iv) Por las razones expuestas anteriormente, las serie convergentes pero no absolutamente convergentes se denominan también *condicionalmente convergentes*.

5.4. Criterios de Dirichlet y Abel

Hasta ahora los únicos criterios de convergencia que se han proporcionado se refieren a series de términos positivos (o lo que es lo mismo, absolutamente convergentes) o a ciertos tipos de series muy concretos (telescópicas, geométricas, etc.) para las que es posible determinar fácilmente la sucesión de sumas parciales y su comportamiento. Los resultados de este apartado, sobre series de términos de signo arbitrario, están basados en el siguiente

Lema 5.27 (Fórmula de sumación por partes de Abel). Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se denota por S_n a

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,,$$

y se conviene que $S_0 = 0$. Entonces, para cada par de números naturales p y q, con $p > q \geq 1$, se verifica la identidad

$$\sum_{k=q}^{p} a_k\, b_k \;=\; S_p\, b_{p+1} - S_{q-1}\, b_q \;+\; \sum_{k=q}^{p} S_k\,(b_k - b_{k+1})\,.$$

Proposición 5.28 (Criterio de Abel). Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona convergente, entonces también es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$.

Proposición 5.29 (Criterio de Dirichlet). Si la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una sucesión acotada y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y converge hacia cero, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$ es convergente.

Definición 5.30. Se dice que una serie es *alternada* si sus términos son alternativamente positivos (o nulos) y negativos (o nulos).

En otras palabras, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es alternada si todos los términos de índice par son mayores o iguales que 0 y todos los términos de índice impar son menores o iguales que 0, o viceversa. Esto se representa de forma compacta por

$$a_n = |a_n|\,(-1)^n \qquad \text{o} \qquad a_n = |a_n|\,(-1)^{n+1}\,,$$

respectivamente.

Corolario 5.31 (Criterio de Leibnitz). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie alternada tal que la sucesión $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. Entonces la serie converge si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observaciones 5.32.

(i) De acuerdo con este último criterio y bajo las hipótesis señaladas, la condición necesaria de convergencia 5.5 es también en este caso suficiente.

(ii) En las condiciones del criterio de Leibnitz, si la serie converge es posible acotar la diferencia entre la suma de la serie y una de sus sumas parciales S_n por

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \le |a_{n+1}|\,,$$

y en particular

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le |a_1|\,.$$

5.5. Producto de Cauchy de series

Definición 5.33. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$, se define el número real c_n por

$$c_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \;=\; \sum_{k+j=n} a_k\, b_j \;=\; a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_0\,.$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)$$

se denomina (*serie*) *producto de Cauchy* de las series dadas.

Observaciones 5.34.

(i) Para ilustrar el sentido de la definición anterior comencemos considerando el caso de series finitas (todos los a_n son nulos excepto para una cantidad finita de índices, y lo mismo respecto de los b_n); en esta situación las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas de la aritmética real permiten desarrollar el producto

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p)&(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_q)\\ &= a_0\, b_0 + (a_0\, b_1 + a_1\, b_0) + (a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0) + (a_0\, b_3 + a_1\, b_2 + a_2\, b_1 + a_3\, b_0) + \ldots\\ &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\,,\end{aligned}$$

donde en la última línea se ha utilizado la notación de la definición anterior.

El caso que nos ocupa se refiere al producto de dos sumas con infinitos sumandos cada una. Formalmente se deben sumar todos los números de la forma $a_n\, b_m$ cuando n y m recorren el conjunto de los enteros no negativos; esto se representa disponiendo estos elementos en la siguiente tabla (doblemente infinita):

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_n	$\cdots$
b_0	$a_0\,b_0$	$a_1\,b_0$	$a_2\,b_0$	$a_3\,b_0$	$a_4\,b_0$	$\cdots$	$a_n\,b_0$	$\cdots$
b_1	$a_0\,b_1$	$a_1\,b_1$	$a_2\,b_1$	$a_3\,b_1$	$a_4\,b_1$	$\cdots$	$a_n\,b_1$	$\cdots$
b_2	$a_0\,b_2$	$a_1\,b_2$	$a_2\,b_2$	$a_3\,b_2$	$a_4\,b_2$	$\cdots$	$a_n\,b_2$	$\cdots$
b_3	$a_0\,b_3$	$a_1\,b_3$	$a_2\,b_3$	$a_3\,b_3$	$a_4\,b_3$	$\cdots$	$a_n\,b_3$	$\cdots$
b_4	$a_0\,b_4$	$a_1\,b_4$	$a_2\,b_4$	$a_3\,b_4$	$a_4\,b_4$	$\cdots$	$a_n\,b_4$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
b_n	$a_0\,b_n$	$a_1\,b_n$	$a_2\,b_n$	$a_3\,b_n$	$a_4\,b_n$	$\cdots$	$a_n\,b_n$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

El término c_n de la serie producto de Cauchy se obtiene sumando todos los elementos que figuran en la diagonal que va desde $a_0\,b_n$ hasta $a_n\,b_0$. Obviamente, al considerar todas las diagonales, es decir, todos los términos c_n, se incluyen todos los sumandos $a_n\,b_m$ (una y sólo una vez).

(ii) El que se utilice en este contexto el conjunto de índices $\{0, 1, 2, \ldots\}$ para representar las series se debe a que esto simplifica en gran medida la notación. Por otra parte, no se resta generalidad ya que, dada una serie numérica escrita en la forma habitual $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siempre es posible representarla de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, bien poniendo

$$\alpha_n = a_{n+1}\,, \qquad n \geq 0\,,$$

bien definiendo

$$\alpha_0 = 0\,; \qquad \alpha_n = a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

En ningún caso se modifica ni el carácter ni la suma, si ha lugar, de la serie.
Además, esta elección de los índices es la idónea en el tratamiento de series de potencias. Puesto que el estudio de estas series se realizará más adelante, de momento lo ilustraremos en el caso de dos sumas finitas: si P y Q son polinomios,

$$P = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n\,, \qquad Q = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_m\,x^m\,,$$

su producto es el polinomio dado por

$$P\,Q \;=\; a_0\,b_0 + (a_0\,b_1 + a_1\,b_0)\,x + (a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0)\,x^2 + \ldots$$

y los números c_n aparecen de forma natural como los coeficientes del polinomio $P\,Q$.

(iii) Obviamente, el producto de Cauchy es conmutativo, es decir, el producto de Cauchy de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es el mismo que el de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

En cuanto al problema de la convergencia de la serie producto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.35 (de Mertens). Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ su producto de Cauchy.

(i) Si una serie es convergente y la otra es absolutamente convergente, el producto de Cauchy de ambas es convergente.

(ii) Si ambas series son absolutamente convergentes, su producto de Cauchy es absolutamente convergente.

Además, en los dos casos la suma del producto de Cauchy es el producto de las sumas de las series factores:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big)\,.$$

Observaciones 5.36.

(i) La igualdad de las sumas anteriores generaliza, para series absolutamente convergentes, la propiedad análoga para sumas finitas, que se deduce de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

(ii) El producto de Cauchy de dos series condicionalmente convergentes puede ser una serie no convergente. Por ejemplo, considérese la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},$$

que es convergente, pero no absolutamente convergente. El producto de Cauchy de la serie por sí misma no es convergente (ver también el ejercicio 5.27).

Ejercicios propuestos

5.1 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos.

(I) Demostrar que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}\, a_n$$

son convergentes.

(II) ¿Qué se puede decir de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+a_n}$?

5.2 Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ son convergentes. Demostrar que también es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$.

5.3 Sean P un polinomio de grado $d \geq 1$, y $r \in \mathbb{R}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)\, r^n$ se denomina *aritmético-geométrica de orden* d.

(I) Probar que la serie anterior converge si, y sólo si, $|r| < 1$.

(II) Se denota por S_n la suma parcial n-ésima de la serie. Escribir las diferencias $S_n - r\, S_n$ en términos de sumas parciales de otra serie aritmético-geométrica pero de orden inferior.

(III) Aplicar el procedimiento descrito en el apartado anterior para calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{7^n}.$$

5.4 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie hipergeométrica y sean α, β, γ números reales tales que $\alpha > 0$, $\alpha\, n + \gamma \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha\, n + \beta}{\alpha\, n + \gamma}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(I) Demostrar que existe un número natural n_0 tal que, o $a_n > 0$ para cada $n \geq n_0$, o $a_n < 0$ para cada $n \geq n_0$.

(II) Demostrar que la serie converge si, y sólo si, $\gamma > \alpha + \beta$.

(III) Designando por S_n la n-ésima suma parcial de la serie, probar que

$$(\alpha + \beta - \gamma)\, S_n = a_n\, (n\, \alpha + \beta) - a_1\, \gamma.$$

Deducir que si la serie converge, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\gamma\, a_1}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

5.5 Estudiar, según los valores de α y β, con $\alpha, \beta > 0$, el carácter de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}\, \log(n)^{\beta}}.$$

5.6 Estudiar el carácter de las siguientes series y sumarlas cuando corresponda:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$ (III) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)$

(IV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1+\frac{2}{n(n+3)}\Big)$ (V) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{2\,n+1}{n^2+n}\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{1}{n^2+n}\Big)$ (VI) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$

(VII) $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2-6\,n+5}$ (VIII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{2n-1}$, con $|a|<1$ (IX) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(X) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ (XI) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$, $k\in\mathbb{N}$ (XII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+n^2+n}{5^{n+1}\,n\,(n+1)}$

(XIII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\big)$ (XIV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ (XV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n-2}$

(XVI) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, $-x\notin\mathbb{N}$.

5.7 Estudiar el carácter de las series siguientes en función del parámetro real α:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$ (II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2\alpha^{2n}}{(2n)!}$ (III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cos^{2n}(\alpha)}{1+\cos^{2n}(\alpha)}$.

5.8 Determinar para qué valores del número real $a>0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{-\log(n)}$$

es convergente.

5.9 ¿Para qué valores de $\alpha<1$ es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(1-\frac{\alpha}{1}\Big)\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{\alpha}{n}\Big)\,?$$

5.10 Estudiar, en función del parámetro real α, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\Big(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\Big).$$

5.11 Sean a y b dos números reales positivos. Estudiar según los valores de a y b el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n\,a^{(1+1/2+\ldots+1/n)}.$$

5.12 Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en los siguientes casos:

(I) $a_n=\begin{cases} 1/n^2 & \text{si } n \text{ es par,}\\ 1/n & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases}$ (II) $a_n=\begin{cases} 1/n^2 & \text{si } n \text{ no es cuadrado perfecto,}\\ 1/n & \text{si } n \text{ es cuadrado perfecto.}\end{cases}$

5.13 Estudiar el carácter de las siguientes series:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log\Big(1+\frac{1}{n^3}\Big)$ (II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(n\,x)}{n^n}$ (III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n+1}{n!\,e^n}$

(IV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt[n]{n}-1\big)^n$ (V) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+\sqrt{n}}$ (VI) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\,\log\big(\log(n)\big)}$

(VII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\Big(\frac{n}{1+n^2}\Big)$ (VIII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$ (IX) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n^2+\log(n)+5^n}$

(X) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{n}\right)$ (XI) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$ (XII) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-n}}$

(XIII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}$ (XIV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (XV) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$

(XVI) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3\log(n)}$ (XVII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2\,2^n}$ (XVIII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

5.14 Demostrar que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2+1)\left(\operatorname{sen}(n)-\cos(n)\right)\,\log(n!)}{(n^4+1)\,\log(n)^3}$$

es convergente.

5.15 Estudiar si las siguientes series son condicionalmente convergentes, absolutamente convergentes o ninguna de las dos cosas:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$ (II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n}{n+1}$ (III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n}{n^3+1}$ (IV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{n+1}{n!}$

(V) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos\left(n\pi/3\right)}{2^n}$ (VI) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ (VII) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+(-1)^n\right)\sqrt{n}}{n}$.

5.16 Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y la sucesión de términos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente (hacia 0 necesariamente), entonces

$$\lim_{n\to\infty} n\,a_n = 0\,.$$

5.17 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie no convergente. Demostrar que tampoco converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n$.

5.18 Sea x un número real.

(I) Probar que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\,x)$ están acotadas. Deducir que es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n}\,.$$

(II) Probar que, si $\cos(x) \neq 1$, entonces las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\,x)$ están acotadas. Deducir que es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n}\,.$$

5.19 Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2}\right)$$

es convergente. ¿Es absolutamente convergente?

5.20 Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(I) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right)}{\log(n)}$ (II) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{\log(n)}$ (III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{(n^2+1)^2\pi}{n^3}\right)$.

5.21 Sean $x>0$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de números reales positivos tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{(x+a_1)(2\,x+a_2)\cdots(n\,x+a_n)}\,.$$

5.22 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de números reales positivos con $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda$. Se considera la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{x_1\, x_2 \cdots x_n}\,.$$

Estudiar el carácter de la serie en las siguientes situaciones:

(i) $\lambda \neq 1$.

(ii) $\lambda = 1$ y $x_n < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $x_n = \sqrt[n]{a}$, $n = 1, 2, \ldots$, siendo a un número real con $a > e$.

5.23 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números reales definida por recurrencia de la siguiente forma:

$$x_1 = a > 0\,, \qquad x_n = \sqrt{1 + 2\,x_{n-1}} - 1\,, \quad n \geq 2\,.$$

(i) Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y calcular su límite.

(ii) Sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

(iii) Calcular el límite de las sucesiones $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{n\, x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(iv) Estudiar la naturaleza de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

5.24 Sean a y b números reales tales que $a \geq b \geq 0$.

(I) Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n+1}\Big)$$

es convergente si, y sólo si, $a = b$. Si $a = b$ calcular su suma.

(II) Determinar los números reales $\alpha \geq 0$ para los que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^{\alpha}} \Big(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n+1}\Big)$$

es convergente. Estudiar por separado los casos $a = b$, $a > b$.

(III) Determinar los números reales $\alpha \geq 0$ para los que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)^{\alpha}} \Big(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n+1}\Big)$$

es convergente.

5.25 Asumiendo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

calcular la suma de las series:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ (II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)^2}$.

5.26 Calcular el producto de Cauchy de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b^n\,, \qquad |a| < 1\,,\ |b| < 1\,.$$

5.27 Comprobar que, aun cuando las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\alpha}}\,, \quad 0 < \alpha < 1\,, \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$$

son convergentes, su producto de Cauchy no es convergente.

5.28 Sean f una función definida y continua en el intervalo $[a,b]$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $[a,b]$. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \big(f(x_{n+1}) - f(x_n) \big)$$

es convergente. ¿Sigue siendo cierto el resultado anterior si se substituye el intervalo $[a,b]$ por otro no compacto?

5.29 Estudiar, en función del parámetro real a, el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \operatorname{Sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{a^2}{n}\right) \right).$$

5.30 Expresión decimal de los números reales. Sean $a_0, a_1, \dots, a_k$ números enteros y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión, también de números enteros, tales que $0 \le a_m \le 9$ para todo $m = 0, 1, \dots, k$, y $0 \le b_n \le 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Una expresión del tipo

$$\sigma\ a_k\, a_{k-1}\, \dots\, a_1\, a_0\,'\, b_1\, b_2\, b_3\, \dots\, b_n\, \dots,$$

donde σ es uno de los dos signos '$+$' o '$-$', recibe el nombre de *expresión decimal* (si el signo es '$+$' es habitual omitirlo). Se dice que una expresión decimal es *periódica* si existen números naturales n_0 y P (el *periodo*) tales que

$$b_{n+P} = b_n \quad \text{para cada } n \ge n_0 .$$

(I) Probar que una expresión decimal define un único número real x dado por

$$x = \sigma \left(\sum_{m=0}^{k} a_m\, 10^m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{10}\right)^n \right).$$

(II) Recíprocamente, el teorema del encaje de intervalos garantiza que, si $x \in \mathbb{R}$, existe una expresión decimal que lo define según la fórmula anterior.

(III) Probar que un número real es racional si, y sólo si, admite una expresión decimal periódica.

(IV) Determinar los números reales que admiten más de una expresión decimal.

5.31 Propiedad asociativa de sumas infinitas. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Se considera la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ definida por

$$b_1 = \sum_{j=1}^{n_1} a_j\,; \qquad b_k = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j\,, \quad k \ge 2 .$$

(I) Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos, entonces esta serie converge si, y sólo si, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente, en cuyo caso tienen la misma suma.

(II) Se supone que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k+1} - n_k \le p$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y sólo si, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, y en este caso tienen la misma suma.

5.32 Sumas parciales de la serie armónica. Se considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \log(2) + \frac{1}{2} - \log\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} - \log\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n} - \log\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} + \dots$$

cuyo término general viene dado, de forma más precisa, por

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \qquad a_{2n} = -\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\frac{n}{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(I) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Nota: La suma de esta serie se denomina *constante de Euler*, y se denota habitualmente por γ. Su valor aproximado es $\gamma \simeq 0'57721566490\dots$

(II) Si se denotan por A_n las sumas parciales de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} {}^1\!/_n$, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \big(A_n - \log(n)\big) = \gamma\,,$$

y deducir que $A_n = \log(n) + \gamma + \epsilon_n$, donde $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un infinitésimo.

(III) Se considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \ldots + \frac{1}{3\,n-2} + \frac{1}{3\,n-1} - \frac{2}{3\,n} + \ldots,$$

donde $b_n = {}^1\!/_n$ si n no es múltiplo de 3 y $b_n = {}^{-2}\!/_n$ si n es múltiplo de 3. Utilizando el ejercicio 5.31 y los apartados anteriores, comprobar que esta serie es convergente y calcular su suma.

(IV) Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

5.33 La función exponencial.

Si $x \in \mathbb{R}$ comprobar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente (en este ejercicio se conviene que $x^0 = 1$ incluso para $x = 0$). Su suma se denota por '$\exp(x)$' y se denomina *exponencial* del número x. Demostrar que:

(I) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.
Indicación: Calcular el producto de Cauchy de las dos series que definen $\exp(x)$ y $\exp(y)$.

(II) $\exp(0) = 1$ y, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \exp(x)^{-1} = {}^1\!/_{\exp(x)}$.

(III) $\exp(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(IV) $1 + x \le \exp(x) \le 1 + x\,\exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
Indicación: Probarlo primero para $x \ge 0$ y luego deducirlo para $x < 0$ del apartado (II).

(V) $\exp(x) > 1$ si $x > 0$; $0 < \exp(x) < 1$ si $x < 0$.

(VI) Si $x > y$ entonces $\exp(x) > \exp(y)$.

(VII) Probar que $\exp$ es continua y derivable en $x_0 = 0$. Deducir que $\exp$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $\exp'(x) = \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(VIII) Sea $\beta \in \mathbb{R}$. Obtener todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivables en $\mathbb{R}$ y tales que $f'(x) = \beta\, f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5.34 Problemas propuestos en examen:
11 Febrero 2000, examen del primer parcial, problemas 2 y 4 y cuestión 2.
16 Septiembre 2000, examen extraordinario, cuestión 1.
2 Febrero 2001, examen del primer parcial, problema 3 y cuestión 2.
29 Junio 2001, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problemas 2 y 4.
14 Septiembre 2001, examen extraordinario, problema 2.
8 Febrero 2002, examen del primer parcial, problema 3 y cuestión 2.
29 Junio 2002, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 2.
11 Septiembre 2002, examen extraordinario, cuestión 1.
10 Febrero 2003, examen del primer parcial, problemas 1 y 2.
30 Junio 2003, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 2 y cuestión 2.
11 Septiembre 2003, examen extraordinario, cuestión 1.
13 febrero 2004, examen del primer parcial, problema 2 y cuestión 1.
29 Junio 2004, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 2.(b) y cuestión 2.
11 Septiembre 2004, examen extraordinario, problema 1.
31 Enero 2005, examen del primer parcial, cuestión 2.
30 Junio 2005, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 2.(b) y cuestión 1.
1 Febrero 2006, examen del primer parcial, problemas 1 y 2.

30 Junio 2006, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 2.(b) y cuestión 1.

1 Febrero 2007, examen del primer parcial, problema 2 y cuestión 2.

29 Junio 2007, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 2.(b).

11 Septiembre 2007, examen extraordinario, cuestión 1.

23 Noviembre 2007, problema 4.

31 Enero 2008, examen del primer parcial, problema 3.

27 Junio 2008, examen final, cuestión 1.

9 Septiembre 2008, examen extraordinario, problema 1.

21 Noviembre 2008, problema 3.

30 Enero 2009, examen del primer parcial, problema 2 y cuestión 1.

29 Junio 2009, examen final, alumnos que se examinan del primer parcial, problema 3 y cuestión 1.

19 Abril 2010, prueba de evaluación continua, problema 3.

13 Septiembre 2010, examen extraordinario, problemas 1 y 2.

27 Abril 2011, problema 1.

3 Abril 2012, sexta prueba de evaluación continua, completa.

19 Junio 2012, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 1 y cuestión 2.

18 Julio 2012, examen extraordinario, problema 1 y cuestión 3.

19 Abril 2013, quinta prueba de evaluación continua, completa.

6 Junio 2013, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 1 y cuestión 1.

1 Julio 2013, examen extraordinario, problema 1 y cuestión 2.

12 Mayo 2014, prueba de evaluación continua, problema 2.

5 Junio 2014, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 1 y cuestión 1.

2 Julio 2014, examen extraordinario, problema 1 y cuestión 3.

Tema 6

Cálculo de primitivas

El cálculo de primitivas o integración indefinida es una materia de especial importancia práctica, siendo la base teórica sobre la que se fundamenta relativamente sencilla en cuanto a conceptos. Esta importancia se pone de manifiesto si se observa, entre otras muchas cosas, que la inmensa mayoría de los fenómenos físicos vienen descritos por ecuaciones diferenciales, cuya resolución teórica necesita de esta materia.

La clase de funciones definidas en un intervalo que admiten primitiva en él es muy amplia; en particular, contiene a las funciones continuas (esto lo garantiza el teorema fundamental del cálculo integral, que se presenta en el tema siguiente). No obstante, el problema de calcular primitivas de una función es en general irresoluble, es decir, existen funciones cuya primitiva no puede ser expresada de forma elemental; como ejemplo tenemos la clásica función de Gauss e^{-x^2}, de uso frecuente en Estadística.

A partir de la sección 2 nos centramos en el cálculo de las primitivas de ciertas clases muy concretas de funciones. Como se puede comprobar a lo largo de estas notas, la mayoría de los métodos reducen el problema original al de las fracciones racionales, que estudiamos en dicha sección.

6.1. Definiciones y primeras propiedades

Definición 6.1. Sea f una función real definida en un intervalo I de la recta real. Se dice que la función F, definida y derivable en el mismo intervalo, es una *primitiva* de f en I si se verifica que

$$F'(x) \;=\; f(x) \qquad \text{para cada } x \in I\,.$$

El conjunto de todas las primitivas de f se denomina *integral indefinida* de f, y se denota por

$$\int f \qquad \text{o} \qquad \int f(x)\,dx\,.$$

Observaciones 6.2.

(i) La propia definición y el conocimiento de las derivadas de las funciones elementales proporcionan las primitivas de gran número de funciones (ver la sección 6.9). Por ejemplo, dado que $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, la función seno es una primitiva del coseno en $\mathbb{R}$.

(ii) En la última expresión de la definición anterior la variable x es irrelevante, lo mismo se podría escribir $\int f(y)\,dy$; la variable de integración adquiere un papel destacado, por ejemplo, cuando la función depende de dos o más variables, como en

$$\int y\,x\,\operatorname{sen}(z^3x^2)\,dx\,.$$

De las fórmulas básicas de derivación y de la regla de la cadena se deducen los siguientes resultados, que proporcionan las primeras reglas prácticas para la integración. Aunque no se mencione explícitamente, al referirnos en lo sucesivo a primitivas de funciones, se entenderá que lo son en todo el intervalo donde están definidas tales funciones.

Proposición 6.3. Sea f una función real definida en un intervalo I. Si F es una primitiva de f y C es un número real, entonces la función $F+C$ es también una primitiva de f.

De hecho, si G es otra primitiva de f, se tiene que $F-G$ es constante en I.

Observación 6.4. Según este resultado la integral indefinida de f se obtiene sumando constantes a una primitiva arbitraria F, por lo que es usual escribir

$$\int f(x)\,dx \;=\; F(x)+C\,.$$

Proposición 6.5. Sean f y g dos funciones definidas en un mismo intervalo. Si las funciones F y G son primitivas de f y g, respectivamente, y α, β son números reales, entonces $\alpha F+\beta G$ es una primitiva de $\alpha f+\beta g$. Escrito de otra forma,

$$\int \big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\,dx \;=\; \alpha\int f(x)\,dx \;+\; \beta\int g(x)\,dx\,.$$

Proposición 6.6 (Fórmula de integración por partes). Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un mismo intervalo. Entonces

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx \;=\; f(x)\,g(x)-\int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Observación 6.7. La fórmula de integración por partes se suele escribir de forma más compacta como

$$\int u\,dv \;=\; u\,v-\int v\,du,$$

donde $u=f(x)$, $du=f'(x)\,dx$, $v=g(x)$ y $dv=g'(x)\,dx$.

Aunque la expresión '$\gamma(x)\,dx$' tiene perfecto sentido desde el punto de vista de las aplicaciones lineales (para ser más precisos, de las *formas diferenciales*), aquí sólo nos preocupa como formalismo de cálculo.

Proposición 6.8 (Método de sustitución). Sean f y φ funciones de variable real tales que φ es derivable y la imagen de φ está contenida en el dominio de f. Si F es una primitiva de f, entonces

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \;=\; F(\varphi(x))+C\,.$$

Proposición 6.9 (Cambio de variable). Sean f y φ funciones definidas en los intervalos (a,b) y (c,d), respectivamente, tales que φ transforma biyectivamente el intervalo (c,d) en (a,b) y tanto φ como φ^{-1} son derivables. Si la función g definida por

$$g(y) \;=\; f\big(\varphi(y)\big)\,\varphi'(y)\,, \qquad y\in(c,d)\,,$$

admite una primitiva G, entonces se tiene que

$$\int f(x)\,dx \;=\; G\big(\varphi^{-1}(x)\big)+C\,.$$

Observaciones 6.10. Con la notación de la proposición anterior:

(i) La función φ es el denominado *cambio de variable*. Es usual representar, abusando de la notación, las identidades de aplicaciones lineales $d\varphi(y)=\varphi'(y)\,dy$ por

$$dx(y)=\varphi'(y)\,dy, \qquad \text{e incluso} \qquad dx=\varphi'\,dy \qquad \text{o} \qquad dy=(\varphi^{-1})'\,dx\,.$$

También es habitual, por brevedad, representar la relación entre las primitivas de f y de g como

$$\int f(x)\,dx=\int g(y)\,dy\,.$$

Éstos serán los criterios que seguiremos en adelante sin hacer más comentarios.

(ii) Obviamente, este método es útil cuando la primitiva de la función g es conocida o más sencilla de obtener que la de f. Nótese que el argumento utilizado, basado en la regla de la cadena, es exactamente el mismo que en el método de sustitución, pero aplicado en sentido inverso.

6.2. Integración de fracciones racionales

Definición 6.11. Se dice que una función f es una *función* o *fracción racional* si se escribe en su dominio de definición como cociente de dos polinomios, es decir, $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde P y Q son polinomios.

Observación 6.12. En relación con el problema de calcular primitivas de fracciones racionales cabe mencionar los siguientes aspectos de índole algebraica:

(i) **Algoritmo de división**: Si el grado de P es mayor o igual que el grado de Q, entonces se escribe de forma única como $P(x) = C(x)\,Q(x) + R(x)$, por tanto,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde C es el polinomio cociente y R es el resto, de grado estrictamente menor que el de Q.

(ii) **Descomposición en factores irreducibles**: Todo polinomio Q con coeficientes reales se puede descomponer de forma única como un producto

$$Q(x) \;=\; \gamma\,(x-r_1)^{m_1}\cdots(x-r_k)^{m_k}\,q_1(x)^{n_1}\cdots q_j(x)^{n_j}\,,$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ es el coeficiente del término de mayor grado, $r_1,\dots,r_k$ son las raíces reales de Q y $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ sus multiplicidades respectivas, y $q_1,\dots,q_j$ son polinomios mónicos de grado 2 sin raíces reales y con multiplicidades $n_1,\, n_2,\, \dots,\, n_j \in \mathbb{N}$.
El grado del polinomio Q es $m_1+\ldots+m_k+2\,n_1+\ldots+2\,n_j$. El hecho de que los poliomios q_i de la descomposición anterior no tengan raíces reales significa que $q_i(x) = x^2+\alpha_i\,x+\beta_i$, con $\alpha_i^2-4\,\beta_i<0$.

(iii) **Descomposición en fracciones simples**: Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una fracción racional y Q se descompone como antes, $f(x)$ se escribe de forma única como

$$\begin{aligned} f(x) = C(x) &+ \frac{a_{1,1}}{(x-r_1)} + \frac{a_{1,2}}{(x-r_1)^2} + \ldots + \frac{a_{1,m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} + \ldots \\ &+ \frac{a_{k,1}}{(x-r_k)} + \frac{a_{k,2}}{(x-r_k)^2} + \ldots + \frac{a_{k,m_k}}{(x-r_k)^{m_k}} + \\ &+ \frac{b_{1,1}\,x+c_{1,1}}{q_1(x)} + \frac{b_{1,2}\,x+c_{1,2}}{q_1(x)^2} + \ldots + \frac{b_{1,n_1}\,x+c_{1,n_1}}{q_1(x)^{n_1}} + \ldots \\ &+ \frac{b_{j,1}\,x+c_{j,1}}{q_j(x)} + \frac{b_{j,2}\,x+c_{j,2}}{q_j(x)^2} + \ldots + \frac{b_{j,n_j}\,x+c_{j,n_j}}{q_j(x)^{n_j}}\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $C(x)$ es el polinomio cociente (que será nulo cuando el grado de P sea estrictamente menor que el de Q) y los coeficientes $a_{s,t}$, $b_{s,t}$, $c_{s,t}$ son números reales cuyo cálculo se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales. Las fracciones que aquí aparecen son las denominadas *fracciones simples*.

A continuación describimos dos métodos de integración basados en los resultados anteriores.

6.2.1. Método de descomposición en fracciones simples

Este método, basado en la descomposición (6.1), es especialmente útil cuando los factores del denominador son de multiplicidad baja y, en particular, si los posibles factores sin raíces reales tienen multiplicidad 1, pues en caso contrario el cálculo, aunque posible, resulta muy laborioso.

Dada la linealidad (ver la Proposición 6.5), es suficiente calcular las primitivas del polinomio y las fracciones simples que aparecen en la expresión (6.1):

(I) Si $n \geq 0$ entonces $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}+C$; en consecuencia,

$$\int \big(\alpha_n\,x^n+\alpha_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+\alpha_0\big)\,dx \;=\; \frac{\alpha_n}{n+1}\,x^{n+1}+\frac{\alpha_{n-1}}{n}\,x^n+\ldots+\alpha_0\,x+C\,.$$

(II) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} \;=\; \log(|x-a|)+C\,.$

(III) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C\,, \;\; n>1\,.$

(IV) $\displaystyle\int \frac{A\,x+B}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,dx, \;\; A\neq 0\,.$

En primer lugar se escribe la fracción a integrar del siguiente modo:

$$\frac{A\,x+B}{x^2+\alpha\,x+\beta} = \frac{A}{2}\,\frac{2\,x+{}^{2B}\!/_{A}}{x^2+\alpha\,x+\beta} = \frac{A}{2}\,\frac{2\,x+\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}+\frac{A}{2}\,\frac{{}^{2B}\!/_{A}-\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,.$$

Así, salvo la constante ${}^{A}\!/_{2}$, el numerador del primer sumando es la derivada del denominador, de manera que la primitiva de este sumando es inmediata y resulta ser

$$\int \frac{A}{2}\,\frac{2\,x+\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,dx = \frac{A}{2}\,\log(|x^2+\alpha\,x+\beta|)+C\,.$$

La forma clásica para calcular la primitiva del segundo sumando es reducirla mediante un cambio de variable a una conocida. Puesto que

$$x^2+\alpha\,x+\beta = (x+{}^{\alpha}\!/_{2})^2+(\beta-{}^{\alpha^2}\!/_{4})\,,$$

si ponemos $\mu={}^{\alpha}\!/_{2}\,,\;\gamma^2=\beta-{}^{\alpha^2}\!/_{4}$ (recuérdese que $\alpha^2-4\,\beta<0$), tenemos que

$$x^2+\alpha\,x+\beta = (x+\mu)^2+\gamma^2 = \gamma^2\Big(\Big(\frac{x+\mu}{\gamma}\Big)^2+1\Big)\,.$$

Tras realizar el cambio de variable $x+\mu=\gamma\,t$, para el que $dx=\gamma\,dt$, resulta que

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+\alpha\,x+\beta} &= \int \frac{dx}{\gamma^2\Big(\Big(\frac{x+\mu}{\gamma}\Big)^2+1\Big)} = \frac{1}{\gamma}\int\frac{dt}{t^2+1}\\ &= \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}(t)+C = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{x+\mu}{\gamma}\Big)+C\,.\end{aligned}$$

(V) $\displaystyle\int \frac{A\,x+B}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n}\,dx, \;\; n>1\,.$

Para calcular estas primitivas, después de haber escrito la fracción como suma de dos, igual que en el apartado anterior, se puede utilizar un método de recurrencia (ver el apartado 6.8.1).

En cualquier caso, cuando en el denominador aparecen raíces múltiples, sobre todo si éstas son complejas y de multiplicidad elevada, es más cómodo aplicar primero el método que exponemos en el siguiente apartado.

6.2.2. Método de Hermite

La idea en que se basa este procedimiento es bastante sencilla. La derivada de una fracción de la forma

$$\frac{1}{(x-a)^n} \quad \text{o} \quad \frac{A\,x+B}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n}\,, \qquad n\geq 1,$$

es una nueva fracción cuyo denominador tiene el mismo factor, pero con su multiplicidad aumentada en una unidad.

Razonando en sentido inverso, la primitiva de una fracción racional involucrará fracciones cuyo denominador tendrá la multiplicidad de sus factores disminuida en una unidad, si ésta es mayor que 1, más otros términos de tipo logarítmico o arco tangente que procederán de los factores irreducibles, como se ha visto en la observación 6.12.IV.

Explícitamente: si $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción racional con el grado de P estrictamente menor que el de Q (en otro caso se comienza dividiendo y se cae en esta situación), entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{R(x)}{M(x)}+\int\frac{A(x)}{B(x)}\,dx\,,$$

donde M es un polinomio cuyos factores son los mismos de Q con su multiplicidad disminuida en una unidad, R es un polinomio de grado menor que el de M, B es el producto de todos los factores irreducibles de Q (de modo que $B\,M=Q$) y A es un polinomio de grado menor que el de B. Para determinar los polinomios R y A basta observar que, según la definición de primitiva, debe verificarse que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{M(x)}\right) + \frac{A(x)}{B(x)},$$

lo cual permite calcular los coeficientes de $R(x)$ y $A(x)$ identificando las fracciones resultantes al escribir ambos términos de la igualdad con común denominador (*método de los coeficientes indeterminados*). Una vez hecho esto el problema se reduce a calcular la primitiva de $A(x)/B(x)$, lo que es posible según el método expuesto en el apartado 6.2.1.

6.3. Integración de fracciones racionales de las funciones trigonométricas

Esta sección la dedicamos al cálculo de primitivas de funciones del tipo

$$R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big),$$

donde R es una fracción racional de dos variables.

Ejemplo 6.13. Si $R(u,v) = \dfrac{2\,u\,v + u}{u^2 + v^3}$, entonces

$$R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) = \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)^2 + \cos(x)^3}.$$

El procedimiento general es reducir estas funciones a fracciones racionales (en el sentido de la sección anterior) mediante el cambio de variable

$$t = \operatorname{tg}\left(x/2\right), \qquad \text{es decir,} \qquad x = 2\operatorname{arctg}(t),$$

con lo que resulta, a partir de las fórmulas trigonométricas y la fórmula de derivación de la función arctg, que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

El integrando resultante es una función racional de t por serlo $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y dx.

Existen situaciones particulares en las cuales es posible resolver estas primitivas de forma más sencilla. Nos limitamos a describir los procedimientos sin justificar las aseveraciones que se hacen:

(I) $R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$ *es impar respecto al coseno*:
Esto significa que

$$R\big(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)\big) = -R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big),$$

lo que equivale a que

$$R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) = S\big(\operatorname{sen}(x)\big)\,\cos(x),$$

donde S es una fracción racional de una variable. Estas primitivas se resuelven fácilmente mediante el cambio de variable

$$t = \operatorname{sen}(x).$$

Entonces

$$1 - t^2 = \cos(x)^2, \qquad dt = \cos(x)\,dx,$$

y se obtiene que

$$\int R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)\,dx = \int S\big(\operatorname{sen}(x)\big)\,\cos(x)\,dx = \int S(t)\,dt,$$

siendo racional esta última integral.

(II) $R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$ *es impar respecto al seno*:
Resulta ahora que

$$R\big(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) = -R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big),$$

es decir,

$$R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) = S\big(\cos(x)\big)\,\operatorname{sen}(x),$$

donde S es una función racional de una variable. Haciendo el cambio de variable

$$t = \cos(x)$$

se tiene que

$$1 - t^2 = \operatorname{sen}(x)^2\,, \qquad dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx\,,$$

y entonces

$$\int R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)\,dx = -\int S(t)\,dt\,,$$

siendo de nuevo racional la última integral.

(III) $R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$ *es par respecto a seno y coseno*:
Esto significa que

$$R\big(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)\big) = R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)\,,$$

y entonces

$$R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) = S\big(\operatorname{tg}(x)\big)\,,$$

donde S es una fracción racional de una variable. Si se efectúa el cambio de variable

$$t = \operatorname{tg}(x)\,,$$

en primer lugar se deduce de las fórmulas trigonométricas que

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \operatorname{sen}(x)^2\,, \qquad \frac{1}{1+t^2} = \cos(x)^2\,,$$

y por otra parte

$$dt = \big(1 + \operatorname{tg}(x)^2\big)\,dx \qquad \text{o} \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

con lo que la primitiva original se reduce a una racional:

$$\int S\big(\operatorname{tg}(x)\big)\,dx = \int S(t)\,\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Observaciones 6.14.

(i) Las relaciones trigonométricas permiten, en muchos casos, simplificar el cálculo de este tipo de primitivas; por ejemplo, la primitiva de la función $f(x) = \cos(x)^2$ se puede calcular según el método expuesto en el apartado 6.13.III, pero resulta más sencillo si se tiene en cuenta que

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\,x)}{2}\,,$$

siendo inmediatas las primitivas de los dos sumandos.

(ii) Las fracciones racionales que involucran expresiones de la forma $\operatorname{sen}(m\,x)$ o $\cos(n\,x)$, donde $m\,,\,n$ son números naturales, se pueden reducir a las de los tipos anteriores expresando $\operatorname{sen}(m\,x)$ y $\cos(n\,x)$ en función de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$; esto es posible sin más que tener en cuenta las fórmulas trigonométricas del ángulo suma.

6.4. Integración de fracciones racionales de la función exponencial

Nos interesamos ahora por las primitivas de funciones del tipo $R(e^x)$, donde R es una fracción racional. El procedimiento general es realizar el cambio de variable

$$e^x = t\,, \qquad \text{es decir,} \qquad x = \log(t)\,,$$

con lo cual

$$dt = e^x\,dx \qquad \text{o} \qquad dx = \frac{1}{t}\,dt\,,$$

reduciéndose a la primitiva de una fracción racional:

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt.$$

6.4.1. Fracciones racionales de las funciones hiperbólicas

Al igual que en la sección 6.3, nos interesamos por las primitivas de las funciones del tipo $R\big(\operatorname{Sh}(x),\operatorname{Ch}(x)\big)$, donde R es una fracción racional de dos variables. Recordemos que las funciones hiperbólicas se definen por

$$\operatorname{Sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,,\quad \operatorname{Ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,,\quad \operatorname{Tgh}(x)=\frac{\operatorname{Sh}(x)}{\operatorname{Ch}(x)}\,.$$

Entre las propiedades de estas funciones (ver el apéndice dedicado a las funciones elementales) recordemos las siguientes:

(i) $\operatorname{Ch}(x)^2-\operatorname{Sh}(x)^2=1\,.$

(ii) $\operatorname{Sh}'(x)=\operatorname{Ch}(x)\,;\quad \operatorname{Ch}'(x)=\operatorname{Sh}(x)\,;\quad \operatorname{Tgh}'(x)=1-\operatorname{Tgh}(x)^2=\dfrac{1}{\operatorname{Ch}(x)^2}\,.$

El cambio de variable dado por

$$t=\operatorname{Tgh}\left({}^{x}\!/_{2}\right)\qquad \text{o}\qquad x=2\text{ArgTgh}(t)\,;\qquad dx=\frac{2}{1-t^2}\,dt,$$

reduce estas primitivas a las de fracciones racionales. Señalaremos también que los mismos argumentos utilizados en la sección anterior en el caso de que la función racional presente propiedades de paridad respecto de sus variables pueden ser repetidos, paso por paso, sustituyendo las funciones trigonométricas por las hiperbólicas de igual nombre.

Observación 6.15. Es posible también aplicar el argumento general para fracciones racionales de la función exponencial, puesto que toda fracción racional $R\big(\operatorname{Sh}(x),\operatorname{Ch}(x)\big)$ es una fracción racional $S(e^x)$.

6.5. Integrales irracionales bilineales

Las integrales que ahora estudiamos son las del tipo

$$\int R\Big(x,\Big(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\Big)^{m_1/n_1},\Big(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\Big)^{m_2/n_2},\dots,\Big(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\Big)^{m_\nu/n_\nu}\Big)\,dx\,,$$

donde R denota una función racional de $\nu+1$ variables, $R(x,y_1,\dots,y_\nu)$, y $m_k\in\mathbb{Z}$, $n_k\in\mathbb{N}$ para todo $k=1,2,\dots,\nu$.

Por ejemplo, la integral

$$I=\int\frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}{x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}+\sqrt[4]{\Big(\dfrac{x+1}{x-1}\Big)^3}}\,dx$$

es del tipo en cuestión, en este caso la función racional es de 4 variables, a saber:

$$R(x,y_1,y_2,y_3)=\frac{y_1}{x\,y_2+y_3},$$

y se escribe

$$I=\int R\Big(x,\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^{1/2},\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^{-1/3},\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^{3/4}\Big)\,dx\,.$$

La representación no es única; invitamos al lector a dar varias representaciones, tanto para esta función como para las de los ejercicios propuestos.

El procedimiento general para la resolución de este tipo de primitivas consiste en efectuar el cambio de variable

$$\frac{a\,x+b}{c\,x+d}=t^p,$$

donde p es el mínimo común múltiplo de los números $n_1,n_2,\dots,n_\nu$. Despejando x en función de t, se tiene que

$$x=\frac{dt^p-b}{a-ct^p}=\varphi(t)\,;\qquad dx=\varphi'(t)\,dt,$$

y se puede comprobar que la integral resultante es racional en t.

Observación 6.16. En las integrales del tipo

$$\int R\Big(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \ldots, (ax+b)^{m_\nu/n_\nu}\Big)\, dx$$

el cálculo aritmético se reduce considerablemente, pues las funciones φ y φ' son polinomios. Casos particulares de éste, aún más sencillos, son las siguientes integrales (que aparecerán en la siguiente sección):

(i) $\displaystyle\int R\Big(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, \ldots, x^{m_\nu/n_\nu}\Big)\, dx$;

(ii) $\displaystyle\int R\Big(x, \sqrt[m]{ax+b}\Big)\, dx$.

6.6. Integrales binómicas o binomias

Estudiamos en esta sección las primitivas del tipo

$$\int x^m \big(a\, x^n + b\big)^p\, dx\,,$$

donde m, n y p son números racionales.

Si p es natural la integración es inmediata, pues la fórmula del binomio de Newton permite escribir el integrando como suma de expresiones del tipo cx^α.

Si $p \notin \mathbb{N}$, haciendo el cambio de variable dado por

$$t = x^n; \qquad x = t^{1/n}; \qquad dx = \frac{1}{n}\, t^{1/n - 1}\, dt\,,$$

la integral original se transforma en

$$\frac{1}{n} \int t^q \big(a\, t + b\big)^p\, dt\,,$$

siendo $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$. Sobre el integrando de la última primitiva se observa que:

(i) Si $p \in \mathbb{Z}$, es de la forma $R(t, t^q)$, con R fracción racional, y la primitiva es del tipo (i) en la Observación 6.16.

(ii) Si $q \in \mathbb{Z}$, es de la forma $R\big(t, (a\,t+b)^p\big)$, R fracción racional, y la primitiva es del tipo (ii) en la Observación 6.16.

(iii) Si $p+q \in \mathbb{Z}$, es posible escribirlo como $\left(\dfrac{a\,t+b}{t}\right)^p t^{p+q}$, que es del tipo general estudiado en la sección previa (con aquella notación, $c = 1$ y $d = 0$).

Observación 6.17. La racionalización es imposible si ninguno de los números p, q, $p+q$ es entero. En el caso de que los exponentes m, n o p no sean racionales no existe un procedimiento general para el cálculo elemental de estas primitivas.

6.7. Integrales irracionales cuadráticas

Nos ocupamos ahora de las primitivas del tipo

$$\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\Big)\, dx\,,$$

donde, como siempre, $R(x,y)$ denota una función racional de dos variables. Por supuesto, se supone que existe un subconjunto A de la recta real (de hecho, un intervalo o la unión de dos intervalos) tal que $a\,x^2 + b\,x + c \geq 0$ para todo $x \in A$; en caso contrario el problema no tiene sentido.

Es posible resolver esta clase de primitivas de diversas formas (en casi todas ellas reduciendo a integrales racionales). En la mayoría de los casos la naturaleza del trinomio $a\,x^2 + b\,x + c$ tiene especial importancia. Detallamos tres de estos procedimientos a continuación.

6.7.1. Racionalización

A continuación se exponen distintos tipos de cambio de variable según el signo de los coeficientes a y c (nótese que los dos primeros casos no son excluyentes entre sí):

(I) Si $a > 0$ se hace el cambio de variable determinado por la igualdad

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \sqrt{a}\,x + t\,.$$

Elevando al cuadrado y despejando x en función de t, se tiene que

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t} = r(t)\,; \qquad dx = r'(t)\,dt\,,$$

y en consecuencia,

$$\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\Big)\,dx = \int R\Big(r(t), \sqrt{a}\,r(t) + t\Big)\,r'(t)\,dt\,.$$

Esta última es una integral racional, pues $R(x, y)$, $r(t)$ y $r'(t)$ son funciones racionales.

(II) Si $c > 0$ es posible efectuar el cambio dado por

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,x + \sqrt{c}\,.$$

Despejando x en función de t, se tiene que

$$x = \frac{2\,t\sqrt{c} - b}{a - t^2} = r(t)\,; \qquad dx = r'(t)\,dt\,,$$

de lo cual se deduce que

$$\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\Big)\,dx = \int R\Big(r(t), t\,r(t) + \sqrt{c}\Big)\,r'(t)\,dt\,.$$

El integrando de esta última es una función racional por serlo $R(x, y)$, $r(t)$ y $r'(t)$.

(III) Si $c \le 0$ y $a < 0$, el trinomio $a\,x^2 + b\,x + c$ se anula en dos puntos, pongamos α y β, entre los cuales toma valores positivos, es decir,

$$a\,x^2 + b\,x + c \;=\; a\,(x - \alpha)\,(x - \beta).$$

Consideremos el cambio definido por

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \alpha)\,.$$

Elevando al cuadrado esta igualdad y simplificando se tiene que

$$a\,(x - \beta) = t^2\,(x - \alpha)\,,$$

y por lo tanto

$$x = \frac{a\,\beta - t^2\,\alpha}{a - t^2} = r(t)\,; \qquad dx = r'(t)\,dt\,,$$

transformándose de nuevo en una integral racional

$$\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\Big)\,dx \;=\; \int R\Big(r(t), t\,\big(r(t) - \alpha\big)\Big)\,r'(t)\,dt\,.$$

6.7.2. Reducción a otras más simples con el mismo radical

Estudiaremos ahora un método que, generalizado convenientemente, reduce también integrales en las que el polinomio bajo el radical es de grado superior a dos.

La función $R(x, y)$ es cociente de polinomios, digamos P y Q. Escribiendo P de la forma

$$\begin{aligned} P(x, y) =\; & a_{00} + (a_{10}\,x + a_{01}\,y) + (a_{20}\,x^2 + a_{11}\,x\,y + a_{02}\,y^2) \\ & + (a_{30}\,x^3 + a_{21}\,x^2\,y + a_{12}\,x\,y^2 + a_{03}\,y^3) + \dots\,, \end{aligned}$$

como $y = \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}$, $y^2 = a\,x^2 + b\,x + c$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(x, y) =\; & a_{00} + a_{10}\,x + a_{01}\,y + a_{20}\,x^2 + a_{11}\,x\,y + a_{02}\,(a\,x^2 + b\,x + c) \\ & + a_{30}\,x^3 + a_{21}\,x^2\,y + a_{12}\,x\,(a\,x^2 + b\,x + c) + a_{03}\,y\,(a\,x^2 + b\,x + c) + \dots \\ =\; & A(x) + y\,B(x)\,, \end{aligned}$$

siendo A y B polinomios de una variable. Procediendo igual con Q se puede poner

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{A(x)+y\,B(x)}{C(x)+y\,D(x)}.$$

Si se multiplica numerador y denominador por $C(x)-y\,D(x)$, resulta que

$$R(x,y) = \frac{\big(A(x)+y\,B(x)\big)\big(C(x)-y\,D(x)\big)}{C(x)^2-y^2\,D(x)^2} = \frac{M(x)+y\,N(x)}{C(x)^2-(a\,x^2+b\,x+c)\,D(x)^2}$$

$$= \frac{M(x)+y\,N(x)}{L(x)} = \frac{M(x)}{L(x)} + \frac{N(x)\,y^2}{L(x)\,y} = \frac{M(x)}{L(x)} + \frac{H(x)}{L(x)\,y},$$

donde también C, D, M, N, H y L son polinomios en una variable. El primer sumando es la integral racional $\dfrac{M(x)}{L(x)}$, ya resuelta en la sección 6.2. Si descomponemos $H(x)/L(x)$ en fracciones simples, el segundo sumando es suma de funciones de los tipos siguientes:

(I) $\dfrac{S(x)}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}$, siendo S un polinomio, en el caso en que el grado de H es mayor que el de L.
El procedimiento que se desarrolla seguidamente para la integración de estas funciones se denomina *método alemán*.
Si T es una función de una variable y escribimos $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$, la regla de derivación del producto implica que

$$\frac{d}{dx}\Big(T(x)\sqrt{f(x)}\Big) = \frac{\frac{1}{2}\,T(x)\,f'(x)+T'(x)\,f(x)}{\sqrt{f(x)}}, \tag{6.2}$$

de donde se sigue que

$$\int \frac{S(x)-\Big(\frac{1}{2}\,T(x)\,f'(x)+T'(x)\,f(x)\Big)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int \frac{S(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx - T(x)\sqrt{f(x)}\,.$$

Si S tiene grado m, consideraremos un polinomio T de grado $m-1$, de tal modo que el polinomio

$$S(x)-\Big(\frac{1}{2}\,T(x)\,f'(x)+T'(x)\,f(x)\Big)$$

sea una constante λ. Tal polinomio existe y es único: en efecto, como el grado de T es $m-1$, el numerador de (6.2) tiene grado m, y T puede ser calculado utilizando coeficientes indeterminados (el sistema lineal que resulta es compatible determinado, de hecho la matriz es triangular). En consecuencia,

$$\int \frac{S(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = T(x)\sqrt{f(x)} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}\,.$$

Tan solo queda calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}\,,$$

que se resuelve fácilmente según el método que se expondrá en el apartado 6.7.3.

(II) $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}$, siendo n un número natural.
Las primitivas de estas funciones se reducen a las del tipo anterior mediante el cambio

$$x-\alpha=\frac{1}{z}\,; \qquad dx = \frac{-1}{z^2}\,dz.$$

(III) $\dfrac{(r\,x+s)}{q(x)^n\,\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado dos sin raíces reales, y n es un número natural.
Requieren el manejo de funciones de variable compleja, lo que escapa de nuestro alcance. No obstante, los otros dos métodos proporcionados en esta sección resuelven el problema.

6.7.3. Reducción a fracciones racionales de las funciones trigonométricas o hiperbólicas.

Se distinguen dos situaciones generales según el signo de a.

(I) Si $a>0$ es posible escribir

$$a\,x^2+b\,x+c=\Big(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\Big)^2+\Big(c-\frac{b^2}{4\,a}\Big).$$

(a) Si además $c-\dfrac{b^2}{4\,a}>0$ (o sea, $a\,x^2+b\,x+c>0$ para todo x), poniendo $\gamma^2=c-\dfrac{b^2}{4\,a}$ resulta que

$$a\,x^2+b\,x+c=\gamma^2\bigg(\Big(\frac{\sqrt{a}\,x}{\gamma}+\frac{b}{2\gamma\sqrt{a}}\Big)^2+1\bigg).$$

Puesto que $\mathrm{Ch}(z)^2=\mathrm{Sh}(z)^2+1$, es lógico hacer el cambio

$$\frac{\sqrt{a}}{\gamma}\,x+\frac{b}{2\gamma\sqrt{a}}=\mathrm{Sh}(z)\,;\qquad \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=\gamma\,\mathrm{Ch}(z)\,;\qquad dx=\frac{\gamma}{\sqrt{a}}\,\mathrm{Ch}(z)\,dz,$$

con lo que la integral se convierte en la de una fracción racional en $\mathrm{Sh}(z)$ y $\mathrm{Ch}(z)$, ya estudiada previamente.

(b) Si por el contrario se tiene que $c-\dfrac{b^2}{4\,a}<0$ (el polinomio tiene dos raíces reales distintas), tomando ahora $\gamma^2=\dfrac{b^2}{4\,a}-c$ podemos escribir

$$a\,x^2+b\,x+c=\gamma^2\bigg(\Big(\frac{\sqrt{a}\,x}{\gamma}+\frac{b}{2\gamma\sqrt{a}}\Big)^2-1\bigg),$$

con lo que procede realizar el cambio

$$\frac{\sqrt{a}}{\gamma}\,x+\frac{b}{2\gamma\sqrt{a}}=\mathrm{Ch}(z)\,;\qquad \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=\gamma\,\mathrm{Sh}(z)\,;\qquad dx=\frac{\gamma}{\sqrt{a}}\,\mathrm{Sh}(z)\,dz,$$

resultando de nuevo una integral de una fracción racional en $\mathrm{Sh}(z)$ y $\mathrm{Ch}(z)$.

(II) Si $a<0$ ($-a>0$) se tiene que

$$a\,x^2+b\,x+c=-\Big(\sqrt{-a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{-a}}\Big)^2+\Big(c-\frac{b^2}{4\,a}\Big).$$

Puesto que el trinomio toma valores positivos en algún subconjunto de $\mathbb{R}$, debe ser $c-\dfrac{b^2}{4\,a}>0$ (el polinomio tiene dos raíces reales distintas); poniendo $\gamma^2=c-\dfrac{b^2}{4\,a}$ resulta que

$$a\,x^2+b\,x+c \;=\; \gamma^2\bigg(1-\Big(\frac{\sqrt{-a}\,x}{\gamma}-\frac{b}{2\gamma\sqrt{-a}}\Big)^2\bigg).$$

Puesto que $\cos(z)^2+\mathrm{sen}(z)^2=1$, es adecuado hacer el cambio de variable

$$\frac{\sqrt{-a}}{\gamma}\,x-\frac{b}{2\gamma\sqrt{-a}}=\mathrm{sen}(z)\,;\qquad \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=\gamma\cos(z);\qquad dx=\frac{\gamma}{\sqrt{-a}}\,\cos(z)dz\,,$$

que transforma la integral en la de una fracción racional de las funciones trigonométricas, estudiada en la sección 6.3.

Los procedimientos descritos en este apartado son sólo convenientes cuando la fracción racional tiene una expresión sencilla.

Ejemplo 6.18. En el cálculo del área de la elipse con centro en $(0,0)$ y de semiejes a y b, aparece la integral

$$\int b\sqrt{1-\Big(\frac{x}{a}\Big)^2}\,dx\,,$$

que mediante el cambio $x=a\,\mathrm{sen}(z)$ se reduce a

$$a\,b\int\cos^2(z)\,dz=a\,b\int\frac{1}{2}\big(1+\cos(2\,z)\big)\,dz\,.$$

6.8. Métodos de recurrencia

En el cálculo de primitivas aparecen con frecuencia integrales que dependen de uno o varios parámetros naturales. Utilizando la fórmula de integración por partes y/o realizando un cambio de variable adecuado, se reducen, en muchos casos, a integrales que dependen de uno o varios parámetros naturales, pero una o varias unidades menores que los anteriores.

Por ejemplo, utilizando la regla de integración por partes, resulta inmediato que

$$\int x^n e^x\, dx \;=\; x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx\,;$$

de este modo hemos reducido en una unidad el exponente n, y si se repite el proceso n veces, basta calcular una primitiva de e^x para concluir.

No existe un criterio general para saber si es posible aplicar un método de recurrencia al cálculo de una primitiva particular; como siempre, la habilidad viene dada por la práctica.

A continuación se desarrollan varios ejemplos que pueden ilustrar, a nuestro entender, el espíritu del procedimiento que aquí se expone bajo el nombre común de *recurrencia*. Asimismo se propone al alumno el estudio de otros casos.

6.8.1. Integrales de la forma $I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$

En virtud de la fórmula de integración por partes, si se considera

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^n} \qquad \text{y} \qquad dv = dx\,,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n\Big(\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\Big)\,,\end{aligned}$$

es decir,

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n\Big(I_n(x) - I_{n+1}(x)\Big)\,.$$

Despejando $I_{n+1}(x)$ se sigue que

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\Big(\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n(x)\Big)\,.$$

Aplicando n veces dicha fórmula, el problema se reduce a calcular

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + C\,.$$

Resuelto este caso, podemos estudiar la integral mencionada en la observación 6.12.V. Si consideramos una descomposición semejante a la efectuada en la observación 6.12.IV, se tiene que

$$\frac{A\,x+B}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n} = \frac{A}{2}\,\frac{2\,x+\alpha}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n} + \frac{A}{2}\,\frac{2B/A - \alpha}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n}\,.$$

Observamos que una primitiva del primer sumando es

$$-\frac{A}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^{n-1}}\,,$$

y con la notación y el cambio de variable utilizados en aquel caso, para el segundo sumando se deduce que

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n} = \int \frac{dx}{\gamma^{2n}\Big(\Big(\frac{x+\mu}{\gamma}\Big)^2+1\Big)^n} = \frac{1}{\gamma^{2n-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}\,.$$

La última integral es la estudiada previamente.

6.8.2. Primitivas de productos de polinomios y funciones trigonométricas o exponenciales

Determinaremos la fórmula de recurrencia para la primitiva de la función $P(x)\,e^{\alpha x}$, donde P es un polinomio de grado $n \geq 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Se aconseja al lector que proceda de la misma forma para calcular

$$\int P(x)\,\operatorname{sen}(\alpha x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int P(x)\,\cos(\alpha x)\,dx\,.$$

Si se integra por partes, eligiendo

$$u = P(x) \qquad \text{y} \qquad dv = e^{\alpha x}\,dx\,,$$

se obtiene que

$$\int P(x)\,e^{\alpha x}\,dx \;=\; \frac{P(x)\,e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x)\,e^{\alpha x}\,dx\,,$$

de modo que, al repetir el proceso n veces, el problema se reduce a calcular una primitiva de $P^{(n)}(x)\,e^{\alpha x}$, es decir, una primitiva de $e^{\alpha x}$.

Si P es un polinomio de dos variables con coeficientes reales, las integrales indefinidas

$$\int P\big(x,\log(x)\big)\,dx\,, \qquad \int P\Big(x,\arccos(x)\Big)\,dx\,, \qquad \int P\big(x,\operatorname{arcsen}(x)\big)\,dx\,,$$

realizando respectivamente los cambios de variable

$$x = e^t\,, \qquad x = \cos(t)\,, \qquad x = \operatorname{sen}(t)\,,$$

resultan ser de la forma

$$\int P(e^t,t)\,e^t\,dt, \qquad -\int P\Big(\cos(t),t\Big)\,\operatorname{sen}(t)\,dt\,, \qquad \int P\Big(\operatorname{sen}(t),t\Big)\,\cos(t)\,dt\,,$$

que se reducen al caso anterior sin más que utilizar las propiedades de la función exponencial o convenientes fórmulas trigonométricas, según proceda.

Ejemplo 6.19. Para finalizar veremos un ejemplo de fórmula de recurrencia para una integral que depende de varios parámetros naturales. Sea

$$I_{m,n}(x) = \int \operatorname{sen}(x)^m \cos(x)^n\,dx\,.$$

Si se considera

$$\begin{aligned} u &= \cos(x)^{n-1}\,; & du &= -(n-1)\cos(x)^{n-2}\operatorname{sen}(x)\,dx\,,\\ dv &= \operatorname{sen}(x)^m\cos(x)\,dx\,; & v &= \frac{\operatorname{sen}(x)^{m+1}}{m+1}\,, \end{aligned}$$

utilizando el método de integración por partes, se sigue que

$$\begin{aligned} I_{m,n}(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)^{m+1}\cos(x)^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}(x)^m\cos(x)^{n-2}\operatorname{sen}(x)^2\,dx\\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)^{m+1}\cos(x)^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}(x)^m\cos(x)^{n-2}\big(1-\cos(x)^2\big)\,dx\\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)^{m+1}\cos(x)^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\Big(I_{m,n-2}(x) - I_{m,n}(x)\Big), \end{aligned}$$

y despejando se tiene que

$$I_{m,n}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)^{m+1}\cos(x)^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\,I_{m,n-2}(x)\,.$$

Reiterando el proceso, reducimos el problema al cálculo de $I_{m,1}(x)$ o $I_{m,0}(x)$, según sea n impar o par. Haremos notar que una primitiva de $I_{m,1}(x)$ es $\dfrac{\operatorname{sen}(x)^{m+1}}{m+1}$, mientras que el cálculo de una primitiva de $I_{m,0}(x)$, que es un proceso de recurrencia uniparamétrico, se propone en el ejercicio 6.11.

6.9. Tabla de primitivas inmediatas

En cada caso u denota una función derivable en cierto intervalo, cuya imagen está contenida en el dominio de definición de la función con la que se compone.

1. POTENCIALES

$$\int u(x)^a\, u'(x)\, dx \;=\; \frac{1}{a+1}\, u(x)^{a+1} + C \qquad (a \neq -1).$$

2. LOGARÍTMICAS

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx \;=\; \log\big(|u(x)|\big) + C.$$

3. EXPONENCIALES

$$\int e^{u(x)}\, u'(x)\, dx \;=\; e^{u(x)} + C.$$

$$\int a^{u(x)}\, u'(x)\, dx \;=\; \frac{1}{\log(a)}\, a^{u(x)} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1).$$

4. TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \cos\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx \;=\; \operatorname{sen}\big(u(x)\big) + C.$$

$$\int \operatorname{sen}\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx \;=\; -\cos\big(u(x)\big) + C.$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2\big(u(x)\big)}\, dx \;=\; \int \sec^2\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx \;=\; \int \Big(1 + \operatorname{tg}^2\big(u(x)\big)\Big)\, u'(x)\, dx$$
$$=\; \operatorname{tg}\big(u(x)\big) + C.$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2\big(u(x)\big)}\, dx \;=\; \int \operatorname{cosec}^2\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx \;=\; \int \Big(1 + \operatorname{cotg}^2\big(u(x)\big)\Big)\, u'(x)\, dx$$
$$=\; -\operatorname{cotg}\big(u(x)\big) + C.$$

$$\int \operatorname{sen}(ax)\ \operatorname{sen}(bx)\, dx = \frac{\operatorname{sen}\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C \qquad (a^2 \neq b^2).$$

$$\int \operatorname{sen}(ax)\ \cos(bx)\, dx = -\frac{\cos\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} - \frac{\cos\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C \qquad (a^2 \neq b^2).$$

$$\int \cos(ax)\ \cos(bx)\, dx = \frac{\operatorname{sen}\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C \qquad (a^2 \neq b^2).$$

5. INVERSAS DE TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\, dx \;=\; \operatorname{arcsen}\big(u(x)\big) + C \;=\; -\arccos\big(u(x)\big) + C.$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\, dx \;=\; \operatorname{arctg}\big(u(x)\big) + C \;=\; -\operatorname{arccotg}\big(u(x)\big) + C.$$

6. HIPERBÓLICAS

$$\int \operatorname{Ch}\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx \;=\; \operatorname{Sh}\big(u(x)\big) + C.$$

$$\int \operatorname{Sh}\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx \;=\; \operatorname{Ch}\big(u(x)\big) + C.$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{Ch}^2\big(u(x)\big)}\, dx \;=\; \operatorname{Tgh}\big(u(x)\big) + C.$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{Sh}^2\big(u(x)\big)}\, dx \;=\; -\operatorname{CoTgh}\big(u(x)\big) + C.$$

7. ARGUMENTOS HIPERBÓLICOS

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+1}}\,dx = \operatorname{ArgSh}\big(u(x)\big)+C = \log\Big(u(x)+\sqrt{u^2(x)+1}\Big)+C.$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}\,dx = \operatorname{ArgCh}\big(u(x)\big)+C = \log\Big|u(x)+\sqrt{u^2(x)-1}\Big|+C.$$

$$\int \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}\,dx = \operatorname{ArgTgh}\big(u(x)\big)+C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u(x)}{1-u(x)}\right|+C.$$

8. OTRAS PRIMITIVAS DE USO FRECUENTE

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(b\,x)\,dx = \frac{e^{ax}\big(a\operatorname{sen}(b\,x)-b\cos(b\,x)\big)}{a^2+b^2}+C.$$

$$\int e^{ax}\cos(b\,x)\,dx = \frac{e^{ax}\big(b\operatorname{sen}(b\,x)+a\cos(b\,x)\big)}{a^2+b^2}+C.$$

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx+C.$$

$$\int x^n\operatorname{sen}(ax)\,dx = \frac{-x^n\cos(ax)}{a}+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)\,dx+C.$$

$$\int x^n\cos(ax)\,dx = \frac{x^n\operatorname{sen}(ax)}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen}(ax)\,dx+C.$$

Ejercicios propuestos

En todos los ejercicios se propone calcular las primitivas de las funciones correspondientes. Se presentan varios casos para cada uno de los métodos tratados. No obstante, cuando sea posible resolver el problema mediante distintos procedimientos se recomienda utilizar los diversos métodos expuestos para calcular cada primitiva; esto puede ilustrar la conveniencia de utilizar uno u otro.

6.1 *Integrales inmediatas.*

(I) $x^2\operatorname{sen}(x^3)$ (II) $\dfrac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}}$ (III) $\dfrac{\operatorname{arctg}(x)^3}{1+x^2}$.

6.2 *Integración por partes.*

(I) $x\,e^x$ (II) $x^2\cos(x)$ (III) $\operatorname{sen}(x)\,e^x$ (IV) $\operatorname{sen}^2(x)$ (V) $\log(x^2+2)$.

6.3 *Descomposición en fracciones simples.*

(I) $\dfrac{x^2+1}{x^2-3\,x+2}$ (II) $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$ (III) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^6}$.

6.4 *Método de Hermite.*

(I) $\dfrac{x-1}{x^2(x^2+1)^2}$ (II) $\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ (III) $\dfrac{x+2}{x^3(x+1)(x^2+2\,x+2)^2}$.

6.5 *Fracciones racionales de funciones trigonométricas.*

(I) $\dfrac{1}{5+4\cos(x)}$ (II) $\dfrac{2-\cos(x)}{2+\cos(x)}$ (III) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$.

(IV) $\dfrac{1}{\cos(x)}$ (V) $\operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)$ (VI) $\dfrac{1+\cos^2(x)}{\cos(x)\big(1+\operatorname{sen}^2(x)\big)}$

(VII) $\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}$ (VIII) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}$ (IX) $\dfrac{1}{a^2\operatorname{sen}^2(x)+b^2\cos^2(x)}$.

(X) $\cos(2\,x)\operatorname{sen}^2(x)$ (XI) $\dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(2\,x)}{\cos(x)}$ (XII) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(3\,x)\cos(x)}$.

6.6 *Fracciones racionales de la función exponencial.*

(I) $\dfrac{e^{2x}-e^x+1}{e^x-2}$ (II) $\dfrac{1}{a^2e^x+b^2e^{-x}}$.

6.7 *Fracciones racionales de funciones hiperbólicas.*

(I) $\mathrm{Ch}^2(x)$ (II) $\dfrac{\mathrm{Ch}(2\,x)}{5+4\,\mathrm{Ch}(x)}$ (III) $\dfrac{1}{\mathrm{Ch}^2(x)+\mathrm{Sh}^2(x)}\,.$

6.8 *Integrales irracionales bilineales.*

(I) $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}$ (II) $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$ (III) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)^2}\,.$

6.9 *Integrales binomias.*

(I) $x^2\big(a+b\,x^2\big)^{-5/2}$ (II) $x\,\big(1+x^{-1/2}\big)^2$ (III) $x^{-1}\,\big(1+x^5\big)^{-1/3}$ (IV) $x\,\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2}\,.$

6.10 *Integrales irracionales cuadráticas.*

(I) $\dfrac{1}{\sqrt{2+3\,x-2\,x^2}}$ (II) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ (III) $\dfrac{x^3+1}{\sqrt{1-x^2}}$

(IV) $\sqrt{3-2\,x-x^2}$ (V) $\dfrac{4\,x^2+2\,x-3}{\sqrt{2\,x^2-1}}\,.$

6.11 *Métodos de recurrencia.*

(I) $\log^n(x)$ (I) $\mathrm{sen}^n(x)$ (II) $\cos^n(x)$ (I) $\mathrm{tg}^n(x)\,.$

Determinar una primitiva, en todos los casos, cuando $n=3$.

6.12 *Métodos de recurrencia, apartado 6.8.2.*

(I) $\big(x^3+x^2-2\,x\big)\,e^{-x}$ (II) $\big(x^5+4\,x^4\big)\,\mathrm{sen}(2\,x)$ (III) $x^{2n+1}\,e^{x^2/2}\,.$

(IV) $x^3\,\log^2(x)$ (V) $(x^2+x+1)\,\arccos(x)$ (VI) $x^n\,\mathrm{arcsen}(x)\,.$

6.13 Problemas propuestos en examen:
24 Junio 2000, examen final, problema 3.d).
6 Junio 2008, cuestión 2.
1 Julio 2013, examen extraordinario, problema 3.b).
12 Mayo 2014, quinta prueba de evaluación continua, cuestión 3.

Tema 7

Integral de Riemann

Al tratar con figuras planas simples, tales como rectángulos y triángulos, la noción de área tiene una interpretación intuitiva clara en términos de las dimensiones de sus lados; este concepto es bastante antiguo, de hecho, la matemática de la Grecia clásica fundamentaba la aritmética en las propiedades geométricas: por ejemplo, el resultado de multiplicar dos números positivos a y b, se interpretaba como el área de un rectángulo cuyos lados miden a y b; así, la propiedad distributiva del producto respecto de la suma se expresa: "El área de la unión es la suma de las áreas".

Al intentar extender el concepto de área o "medida" a conjuntos más generales esto deja de ser válido; no obstante, en las situaciones usuales los conjuntos pueden ser "aproximados" por uniones de rectángulos, y su área por las sumas de las de estos últimos. Mencionaremos que Arquímedes obtuvo ya el área limitada por un arco de parábola y una recta como límite de áreas de uniones de rectángulos.

Sin embargo, no fue hasta mucho más tarde que se fundamentó rigurosamente esta teoría, principalmente por la contribución de personajes como Dirichlet o Cauchy, culminada posteriormente por Riemann, de quien recibe el nombre, y aunque la integral de Riemann presenta todavía algunas deficiencias, solventadas por otras teorías como la de Lebesgue, es suficiente para abordar la mayoría de los problemas que se presentan habitualmente en las ciencias.

7.1. Construcción de Darboux

Antes de abordar la construcción de Riemann de la integral, presentamos la de Darboux que, aunque en principio requiere una formulación más débil, resulta ser equivalente a la primera.

Definición 7.1. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Se llama *partición* de $[a, b]$ a todo conjunto

$$P = \{ x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b \},$$

donde $x_{i-1} < x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, son los subintervalos de la partición, y su *amplitud* se define como $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Se llama *diámetro* de la partición al número

$$\|P\| = \text{máx}\{ \Delta x_i : i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Definición 7.2. Sean P y Q dos particiones del intervalo $[a, b]$. Se dice que P es *más fina* que Q si $P \supset Q$, es decir, si P se puede obtener añadiendo puntos a Q.

Dadas dos particiones arbitrarias P y Q, la partición $P \cup Q$ se denomina *refinamiento común* a ambas.

Definición 7.3. Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b]$ y acotada. Dada una partición P de $[a, b]$, $P = \{ x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b \}$, para $i = 1, 2, \dots, n$ definimos

$$m_i(f) = \text{ínf}\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \} \quad \text{y} \quad M_i(f) = \sup\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \},$$

que son números reales. Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente m_i y M_i.

Se llama *suma inferior de Darboux* asociada a f y a P al valor

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

y *suma superior de Darboux* asociada a f y a P al valor

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Observación 7.4. Es inmediato que, si $m = \text{ínf}\{\, f(x) : x \in [a,b]\,\}$ y $M = \sup\{\, f(x) : x \in [a,b]\,\}$, para cada partición P se tiene

$$m(b-a) \le s(f,P) \le S(f,P) \le M(b-a),$$

con lo que los conjuntos formados respectivamente por las sumas superiores e inferiores asociadas a una función son acotados.

Proposición 7.5. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, y P y Q dos particiones de $[a,b]$.
(i) Si P es más fina que Q, se tiene que $s(f,Q) \le s(f,P)$ y $S(f,P) \le S(f,Q)$.
(ii) Si P y Q son arbitrarias, $s(f,P) \le S(f,Q)$.

Definición 7.6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Se define la *integral superior de Riemann* de f en $[a,b]$ como

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{\, S(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\,\},$$

que es un número real, de acuerdo con lo observado en la definición anterior.

Análogamente, se define la *integral inferior de Riemann* de f en $[a,b]$ como

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\, s(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\,\} \in \mathbb{R}.$$

Observación 7.7. Es inmediato que, si $P \in \mathcal{P}([a,b])$, siempre

$$s(f,P) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f,P).$$

Definición 7.8. Se dice que una función real f, definida en $[a,b]$ y acotada, es *integrable en el sentido de Riemann* o simplemente *integrable Riemann* en $[a,b]$ si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

y en este caso, al valor de ambas se le denomina *integral de f entre a y b* y se le representa por

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación 7.9. La existencia de funciones integrables Riemann es obvia; basta considerar las funciones constantes. Sin embargo, no toda función acotada es integrable Riemann. Considérese por ejemplo la función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases}$$

En adelante, nos referiremos a las funciones integrables Riemann simplemente como integrables.

7.2. Criterios de integrabilidad

A la hora de estudiar la integrabilidad de una función, la definición suele ser poco viable. Este epígrafe se dedica, fundamentalmente, a establecer condiciones suficientes de integrabilidad y mostrar que la clase de funciones integrables contiene a una amplia gama de funciones.

Proposición 7.10. Sea f una función real definida en $[a, b]$ y acotada. Son equivalentes:
(i) f es integrable en $[a, b]$.
(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

El siguiente resultado se deduce del hecho de que toda función continua en un intervalo compacto es uniformemente continua.

Teorema 7.11. Toda función continua en $[a, b]$ es integrable.

Teorema 7.12. Toda función monótona en $[a, b]$ es integrable.

Proposición 7.13. Sea f una función real definida en $[a, b]$ y acotada. Son equivalentes:

(i) f es integrable en $[a, b]$.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ se tiene que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Corolario 7.14. Sea f una función real definida en $[a, b]$ y acotada. Son equivalentes:

(i) f es integrable en $[a, b]$.

(ii) Para cada sucesión $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ de particiones de $[a, b]$ con $\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \big(S(f, P_k) - s(f, P_k)\big) = 0.$$

(iii) Existe una sucesión $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ de particiones de $[a, b]$ con $\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$ para la que

$$\lim_{k\to\infty} \big(S(f, P_k) - s(f, P_k)\big) = 0.$$

(iv) Existe una sucesión $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ de particiones de $[a, b]$ para la que $\lim_{k\to\infty} \big(S(f, P_k) - s(f, P_k)\big) = 0$.

Si se cumple cualquiera de estas condiciones, se verifica que

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} s(f, P_k) = \lim_{k\to\infty} S(f, P_k).$$

Observación 7.15. Respecto al último resultado, hemos de hacer notar que, aunque la definición de función integrable involucra a la familia de todas las particiones de un intervalo, aquí se ha expresado la integrabilidad en términos de subfamilias numerables de ellas (sucesiones).

7.3. Definición de Riemann

Definición 7.16. Sea f una función real definida en $[a, b]$ y acotada. Dada una partición $P = \{ x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b \}$ de $[a, b]$, y elegido un punto t_i en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, el conjunto $T = \{ t_1, t_2, \ldots, t_n \}$ se denomina *conjunto de puntos intermedios asociado a P*.

Denotaremos por $\mathcal{T}(P)$ a la familia de los conjuntos de puntos intermedios asociados a la partición P.

Si $T \in \mathcal{T}(P)$ se llama *suma de Riemann asociada a f, a P y a T* al número

$$\sigma(f, P, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

Lema 7.17. En las condiciones de la definición anterior se tiene que:
(i) Para cada $T \in \mathcal{T}(P)$, $s(f,P) \le \sigma(f,P,T) \le S(f,P)$.
(ii) $s(f,P) = \inf\{\, \sigma(f,P,T) : T \in \mathcal{T}(P)\,\}$.
(iii) $S(f,P) = \sup\{\, \sigma(f,P,T) : T \in \mathcal{T}(P)\,\}$.

Proposición 7.18. Sea f una función real definida en $[a,b]$ y acotada. Son equivalentes:
(i) f es integrable en $[a,b]$.
(ii) Existe un número real $I(f)$ que verifica la siguiente propiedad: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$ y para cada $T \in \mathcal{T}(P)$ se tiene que $|I(f) - \sigma(f,P,T)| < \varepsilon$.

En este caso, $I(f) = \displaystyle\int_a^b f$.

Observación 7.19. La condición dada en el apartado (ii) fue de hecho adoptada por Riemann para definir la integral. En este sentido, la proposición anterior establece la equivalencia entre las dos construcciones expuestas.

La construcción de Riemann no depende del orden presente en la recta real y por ello, a diferencia de la de Darboux, se puede extender para funciones que toman valores en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}$, sustituyéndose en este caso el valor absoluto por el módulo del vector o del número complejo.

Corolario 7.20. Sea f una función real definida en $[a,b]$ e integrable en dicho intervalo. Sea $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$, y $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de conjuntos de puntos intermedios asociados a las particiones de $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f,P_k,T_k) = \int_a^b f.$$

7.4. Propiedades generales de la integral

Proposición 7.21. Sean f y g funciones reales definidas en $[a,b]$ e integrables, y sea $k \in \mathbb{R}$.
(i) **Linealidad**: Las funciones $f+g$ y kf son integrables en $[a,b]$, y se tiene que

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \text{y} \qquad \int_a^b kf = k\int_a^b f\,.$$

(ii) **Monotonía**: Si $f(x) \le g(x)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \le \int_a^b g$.

(iii) La función $|f|$ es integrable en $[a,b]$, y $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Observación 7.22. El recíproco de la propiedad (iii) no es cierto, es decir, la integrabilidad de $|f|$ no implica la de f. Basta considerar la función definida en $[0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Proposición 7.23. Sea f una función integrable en $[a,b]$ y tal que $f([a,b]) \subset [c,d]$. Sea g una función continua en $[c,d]$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es integrable en $[a,b]$.

Observación 7.24. La composición de dos funciones integrables puede no ser integrable.

Corolario 7.25. Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$. Entonces:
(i) f^2 y fg son integrables en $[a,b]$.
(ii) Si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \ge \delta$ para cada $x \in [a,b]$, la función $1/f$ es integrable en $[a,b]$.

Proposición 7.26 (Aditividad respecto del intervalo).

(i) Si f es integrable en $[a, b]$, lo es en todo subintervalo de $[a, b]$.

(ii) Recíprocamente, sea $c \in (a, b)$ de modo que f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Entonces, f es integrable en $[a, b]$, y se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Notación: Para $\alpha < \beta$ se conviene que

$$\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f\,, \qquad \text{y} \qquad \int_\alpha^\alpha f = 0\,.$$

Con este convenio, dados tres números reales cualesquiera α, β, $\gamma \in [a, b]$ se cumple que

$$\int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f = \int_\alpha^\beta f,$$

relación conocida como *Identidad de Chasles*.

Proposición 7.27. Sean f y g funciones acotadas en $[a, b]$ que difieren en un conjunto finito de puntos de $[a, b]$. Entonces, f y g son simultáneamente integrables o no integrables, y, en caso de serlo, se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Como consecuencia de los dos últimos resultados, se obtienen nuevos criterios de integrabilidad.

Definición 7.28. Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b]$. Se dice que f es *continua a trozos* si existe una partición $P = \{\, x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b \,\} \in \mathcal{P}([a, b])$ de modo que f es continua en (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, y existen los límites laterales (finitos) en cada punto de la partición.

Si además f es constante en cada subintervalo, se dice que f es *escalonada*.

Se dice que f es *monótona a trozos* si existe una partición $P \in \mathcal{P}([a, b])$ de manera que f es monótona en cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) que define P.

Corolario 7.29. Toda función continua a trozos en $[a, b]$ es integrable.

Corolario 7.30. Toda función acotada y monótona a trozos en $[a, b]$ es integrable.

A partir del teorema de Bolzano se deduce la siguiente propiedad:

Teorema 7.31 (de la media). Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea g una función integrable en $[a, b]$ tal que $g(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f\,g = f(c) \int_a^b g.$$

Observaciones 7.32.

(i) Si se toma g idénticamente igual a 1, se deduce que para una función continua f en $[a, b]$ existe $c \in (a, b)$ de modo que

$$\int_a^b f = f(c)\,(b - a).$$

(ii) Si se suprime la hipótesis de que g sea positiva el resultado es, en general, falso. Basta considerar, en el intervalo $[-1, 1]$, la función identidad $f(x) = x$ y

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0]; \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

(iii) Una versión más fuerte del teorema anterior se obtiene al imponer la integrabilidad de f en lugar de su continuidad. En este caso se tiene que:
Si $m, M \in \mathbb{R}$ son tales que $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\mu \in [m, M]$ tal que

$$\int_a^b f\, g = \mu \int_a^b g.$$

7.5. Teorema fundamental del cálculo integral. Consecuencias

En este epígrafe se presenta el resultado que le da título y los que de él se derivan. En particular se deduce que toda función continua en un intervalo admite primitiva y se obtienen mecanismos para la integración práctica.

Teorema 7.33 (Teorema fundamental del cálculo integral). Sea f una función integrable en $[a, b]$. Se define la función real F dada por

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a, b].$$

Entonces, se tiene que:

(i) La función F es continua en $[a, b]$.

(ii) Si f es continua en $c \in [a, b]$, F es derivable en c y además $F'(c) = f(c)$.

Observaciones 7.34.

(i) Si c es uno de los extremos del intervalo, la continuidad de f se entiende por la derecha (si $c = a$) o por la izquierda (si $c = b$), deduciéndose la existencia de la derivada lateral correspondiente de F en c.

(ii) Si se supone f continua en $[a, b]$, F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a, b]$ y se tiene que $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$. Por lo tanto, F es una primitiva de f, y se concluye que toda función continua en $[a, b]$ admite primitiva.

Proposición 7.35 (Regla de Barrow). Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea F una primitiva de f en dicho intervalo (i.e., $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$). Entonces, para cada $x \in [a, b]$ se verifica que

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)\,.$$

Una versión más fuerte la da el siguiente resultado conocido como *regla de Barrow generalizada* o *segundo teorema fundamental del cálculo*:

Teorema 7.36. Sea f una función integrable en $[a, b]$ que admite una primitiva, F, en dicho intervalo. Entonces, para cada $x \in [a, b]$ se verifica que

$$\int_a^x f = F(x) - F(a).$$

Notación: Si F es una función definida en un intervalo $[a, b]$ y $c, d \in [a, b]$ es usual escribir

$$F(d) - F(c) = F(x)\Big|_{x=c}^{x=d}.$$

Proposición 7.37 (Fórmula de integración por partes). Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$ con primitivas F y G, respectivamente. Se tiene que

$$\int_a^b F\, g = F(b)\, G(b) - F(a)\, G(a) - \int_a^b f\, G\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$\int_a^b F\, G' = F(b)\, G(b) - F(a)\, G(a) - \int_a^b F'\, G\,.$$

Teorema 7.38 (del cambio de variable). Sea φ una función definida en $[c, d]$, derivable y con derivada continua, y de modo que $\varphi([c, d]) \subset [a, b]$. Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, se verifica que

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f = \int_c^d (f \circ \varphi)\, \varphi' \,.$$

Corolario 7.39. Sea φ una función definida en $[c, d]$, derivable y cuya derivada es continua y de signo constante (estas hipótesis garantizan que φ es una biyección, necesariamente monótona, entre $[c, d]$ y un intervalo $[a, b]$). Si f es una función continua en $[a, b]$, se verifica que

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi)\, |\varphi'| \,.$$

Observación 7.40. Los resultados relativos al teorema del cambio de variable se verifican igualmente con la sola hipótesis de la integrabilidad de f, deduciéndose en este caso la integrabilidad de $(f \circ \varphi)\, \varphi'$, y la igualdad de las integrales correspondientes, ahora bien, la demostración de este resultado es mucho más laboriosa pues nada asegura la existencia de una primitiva de f, hecho clave en la demostración del caso arriba expuesto.

La fórmula de integración por partes permite deducir una nueva expresión para el resto en la fórmula de Taylor.

Proposición 7.41. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$ se tiene que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \,.$$

Nota: El resto integral dado en la fórmula anterior se puede escribir, tras realizar el cambio de variable $t = a + s(x-a)$, como

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a + s(x-a))\, ds \,.$$

7.6. Aplicación de la integral al cálculo de áreas

El objetivo de este apartado es indicar, sin justificación (la cual requiere técnicas que quedan fuera del alcance de esta asignatura), las fórmulas integrales que se aplican para el cálculo de áreas en ciertas situaciones usuales.

Consideremos el recinto R del plano limitado por las rectas verticales $x = a$, $x = b$ (con $a < b$) y las gráficas de dos funciones f y g, continuas en $[a, b]$, y tales que $f(x) \geq g(x)$, para cada $x \in [a, b]$. El *área* de este recinto se define como

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Esto se generaliza al caso de funciones arbitrarias f y g, mediante la fórmula

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ejercicios propuestos

7.1 Determinar un polinomio P tal que $P(0) = P(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx = 1\,.$

7.2 Demostrar las siguientes desigualdades:

(I) $\displaystyle\frac{1}{6} \leq \int_0^2 \frac{dx}{10+x} \leq \frac{1}{5}.$ (II) $\displaystyle\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{10}.$

7.3 Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas y tales que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

7.4 Sea f una función real, integrable en $[a,b]$, con $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$. Probar que, si f es continua en un punto $c \in [a,b]$ y $f(c) > 0$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0\,.$$

7.5 Sea f una función integrable en $[-\alpha, \alpha]$, con $\alpha > 0$. Demostrar que:

(I) Si f es par, $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 2\int_0^{\alpha} f(t)\,dt\,.$

(II) Si f es impar, $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0\,.$

7.6 Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo α. Probar que la función F, definida en $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt\,,$$

es constante.

7.7 Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función f_n definida en $[0,1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \text{ ó } x = 0. \end{cases}$$

Probar que para todo $x \in [0,1]$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, que denotaremos por $f(x)$. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

7.8 Calcular los límites de las sucesiones de término general:

(I) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^{k/n}}.$ (II) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{2n+k}}.$ (III) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Sh}\left({}^{k}/_{n}\right).$

(IV) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 - nk + k^2}}.$ (V) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\operatorname{Sh}\left({}^{k}/_{n}\right).$ (VI) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+nk+k^2}{n^3+k^3}.$

(VII) $\displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}.$ (VIII) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$ (IX) $\displaystyle n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}.$

(X) $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \operatorname{sen}^2\left({}^{k\pi}/_{n}\right).$ (XI) $\displaystyle\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\,k}{n}\right).$ (XII) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2\,k-1}{(2\,k-1)^2 + 4\,n^2}.$

7.9 Calcular:

(I) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \text{máx}\big\{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big\}\, dx.$ (II) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)\,\operatorname{sen}^3(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\, dx.$ (III) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log(x)}\, dx.$

(IV) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx.$ (V) $\displaystyle\int_{-3}^3 \big|x(x-1)(x+1)(x-2)\big|\, dx.$ (VI) $\displaystyle\int_{1/e}^e |\log(x)|\, dx.$

7.10 Para $x > -1$ se define

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}.$$

(i) Determinar explícitamente $f(x)$.

(ii) Mediante una integración por partes, demostrar la relación

$$2\, f(x) = 3\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^2} - \frac{x}{1+x^3}, \qquad x > -1\,.$$

(iii) Expresar en función de f, mediante un cambio de variable, la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\alpha^3+t^3}, \qquad \text{con } \alpha > 1,\ x > -1\,.$$

7.11 Para $x > 0$ se define

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{x^2\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)}\, dt\,.$$

(i) Determinar f, distinguiendo los casos $0 < x < 1$, $x = 1$ y $x > 1$.

(ii) Probar que

$$\left|f(x) - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)\, dt\right| \le \left|\frac{1-x^2}{x^2}\right| \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)\, dt\,.$$

(iii) Demostrar que f es continua en $(0,\infty)$.

7.12 Sea g una función continua en $\mathbb{R}$. Se considera la función f definida por

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t)\, g(x-t)\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Probar que f admite derivada segunda en $\mathbb{R}$ y se satisface la relación

$$f'' + f \equiv g\,.$$

7.13 Sea f una función real continua en $\mathbb{R}$, y sean u y v dos funciones reales derivables en $\mathbb{R}$. Se define la aplicación g en $\mathbb{R}$ mediante

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\,.$$

Demostrar que g es derivable en $\mathbb{R}$ y que

$$g'(x) = f\big(v(x)\big)\, v'(x) - f\big(u(x)\big)\, u'(x)\,.$$

7.14 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(I) $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^4+t^2+2}\, dt.$ (II) $\displaystyle f(x) = \int_1^{\cos(x)} \operatorname{sen}(t)\, dt.$ (III) $\displaystyle f(x) = \int_0^{\int_1^x t\,dt} t^3\, dt.$

(IV) $\displaystyle f(x) = \int_{\int_1^{x^2} t\,dt}^{\int_0^{\cos(2x)} t\,dt} t^2\, dt.$ (V) $\displaystyle f(x) = \int_3^{x^2} \frac{1+t^2}{2+t^6}\, dt.$ (VI) $\displaystyle f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$

7.15 Sea f la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}} \,.$$

(i) Demostrar que f es impar.

(ii) Calcular $f'(x)$ y estudiar la variación de f.

(iii) Probar que para cada $t > 1$ se tiene que $\dfrac{1}{t^2+1} < \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+2}} < \dfrac{1}{t^2}$, y deducir que si $x > 1$, entonces

$$\operatorname{arctg}(2x) - \operatorname{arctg}(x) < f(x) < \frac{1}{2x} \,.$$

(iv) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

7.16 Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2)\,dt}{x}$.

7.17 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 3. \end{cases}$$

Se define la función F en $[0,3]$ por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \,.$$

Probar que F es continua en dicho intervalo y no es derivable en $x = 1$. ¿Admite f primitiva en el intervalo $[0,3]$?

7.18 Probar que la función $f(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} \log(t^2)\,dt$ es decreciente en $[0, 1/2]$.

7.19 Hallar los extremos relativos de la función f definida de $(0,\infty)$ en $\mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t)\, \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(t)} dt.$$

7.20 Probar que la ecuación

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt = 1$$

tiene una sola solución, que se encuentra en el intervalo $[0,1]$.

7.21 Sea f una función definida y continua en $[0,\infty)$ tal que:
(i) $f(0) + f(1) + \cdots + f(n) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}\,.$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L > 0\,.$
Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^n f(x)\,dx}{f(0) + f(1) + \ldots + f(n)} = 1\,.$$

7.22 Calcular los siguientes límites:

(I) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt}{x^3}$. (II) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,dt}$.

7.23 Sean $k>0$ y $A\in\mathbb{R}$. Se supone que g y u son funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ que satisfacen la igualdad

$$u(x)=A\,\mathrm{sen}\big(x\sqrt{k}\big)+\frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^x g(t)\,u(t)\,\mathrm{sen}\big((x-t)\sqrt{k}\big)\,dt\,,\qquad x\in[0,1]\,.$$

(i) Demostrar que u es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[0,1]$ y se verifica que

$$u''(x)-g(x)\,u(x)+k\,u(x)=0\,.$$

(ii) Pongamos $C=\sup\big\{|g(x)|:x\in[0,1]\big\}$ y $M=\sup\big\{|u(x)|:x\in[0,1]\big\}$. Si $\sqrt{k}>C$. Probar que

$$M\le\frac{|A|}{1-\dfrac{C}{\sqrt{k}}}$$

y que para cada $x\in[0,1]$ se tiene que

$$\Big|u(x)-A\,\mathrm{sen}\big(x\sqrt{k}\big)\Big|\le\frac{|A|\,C}{\sqrt{k}-C}\,.$$

7.24 Sea K la función real definida en $[0,1]\times[0,1]$ por

$$K(x,y)=\begin{cases}(1-x)\,y & \text{si } 0\le y\le x\le 1,\\ x\,(1-y) & \text{si } 0\le x\le y\le 1.\end{cases}$$

(i) Sea u una función continua en $[0,1]$. Si F es la función definida en $[0,1]$ por

$$F(x)=\int_0^1 K(x,y)\,u(y)\,dy\,,$$

probar que F es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[0,1]$, y además, se verifica que

$$F''(x)=-\,u(x),\qquad x\in[0,1]\,.$$

(ii) Sea v una función continua en $[0,1]$ tal que existe un número real k no nulo de modo que

$$v(x)-k\int_0^1 K(x,y)\,v(y)\,dy=0\,,\qquad x\in[0,1]\,.$$

Demostrar que v es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[0,1]$ y se satisface que

$$\begin{aligned}&v''(x)+k\,v(x)=0\,,\quad x\in[0,1],\\ &v(0)=v(1)=0\,.\end{aligned}$$

7.25 Sean $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ integrable y $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\begin{cases}f(0) & \text{si } x=0;\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } 0<x\le 1\,.\end{cases}$$

(i) Probar que si f es continua en 0, entonces F es continua en $[0,1]$.

(ii) Probar que si f es continua en $[0,1]$ y derivable en 0, entonces F es derivable en $[0,1]$. Además, $f'(0)=2\,F'(0)\,$.

7.26 Una función $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ continua verifica que

$$\int_1^{xy} f(t)\,dt=y\int_1^x f(t)\,dt+x\int_1^y f(t)\,dt\,,$$

para cualesquiera $x>0$ e $y>0$. Sabiendo que $f(1)=3$, determinar $f(x)$.

7.27 Calcular:

(i) El área comprendida entre la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la cuerda de ecuación $x = h$, con $h > a$.

(ii) El área comprendida entre las parábolas de ecuaciones $y^2 = a\,x$ y $x^2 = b\,y$.

(iii) El área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = x^3 - x$ y su recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

(iv) El área del sector parabólico que determina la recta que pasa por los puntos $(16, 12)$ y $(4, -6)$ sobre la parábola de ecuación $y^2 = 9\,x$.

(v) El área comprendida entre el eje OX y cada una de las siguientes curvas, de ecuaciones:
(v.1) $y = x^2 - 6x + 5$. (v.2) $y^2 = 4x^2 - x^4$.
(v.3) $y = x^3 - 4x^2$. (v.4) $y = \operatorname{sen}(2x)$, $0 \le x \le 4\,\pi$.

7.28 Problemas propuestos en examen:
24 Junio 2000, examen final, cuestión 2.
16 Septiembre 2000, examen extraordinario, problema 2 y cuestión 3.
18 Junio 2001, examen del segundo parcial, problema 3.
29 Junio 2001, examen final, alumnos que se examinan de todo, problema 2.b.
14 Septiembre 2001, examen extraordinario, cuestión 2.
18 Junio 2002, examen del segundo parcial, problema 3 y cuestión 2.
29 Junio 2002, examen final, segundo parcial, problemas 1, 2.i y 2.iii.
11 Septiembre 2002, examen extraordinario, problema 3 y cuestión 2.
7 Junio 2003, examen del segundo parcial, problema 2.
30 Junio 2003, examen final, segundo parcial, problema 2.a y 2.b.
11 Septiembre 2003, examen extraordinario, cuestión 2.
29 Junio 2004, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, cuestión 1.
11 Septiembre 2004, examen extraordinario, problema 2.
4 Junio 2005, examen del segundo parcial, problema 1 y cuestiones 2 y 3.
30 Junio 2005, examen final, segundo parcial, cuestiones 1 y 3.
10 Mayo 2006, examen parcial, problema 2.
10 Junio 2006, examen parcial, problema 1.
30 Junio 2006, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problemas 1 y 2 y cuestión 2.
8 Junio 2007, examen del segundo parcial, cuestiones 1 y 2.
29 Junio 2007, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 2 y cuestión 1.
11 Septiembre 2007, examen extraordinario, cuestión 2.
27 Junio 2008, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, cuestión 1.
9 Septiembre 2008, examen extraordinario, problema 2 y cuestión 2.
5 Junio 2009, examen del segundo parcial, cuestiones 1 y 2.
29 Junio 2009, examen final, alumnos que se examinan de todo, problema 1.
9 Septiembre 2009, examen extraordinario, cuestión 3.
29 Mayo 2010, examen del segundo parcial, problema 2 y cuestión 3.
18 Junio 2010, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 2 y cuestión 2.
13 Septiembre 2010, examen extraordinario, cuestión 3.
8 Mayo 2012, séptima prueba de evaluación continua, completa.
19 Junio 2012, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 2 y cuestión 3.
18 Julio 2012, examen extraordinario, problema 2.
22 Mayo 2013, sexta prueba de evaluación continua, completa.
6 Junio 2013, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 2 y cuestiones 2 y 3.
1 Julio 2013, examen extraordinario, problema 3.
5 Junio 2014, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, cuestiones 2 y 3.

Tema 8

Integrales impropias

La integral de Riemann se define para funciones reales definidas y acotadas en intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$. Sin embargo, para el estudio de diversos problemas de las Ciencias se hace necesario dar una extensión del concepto de integral que permita considerar funciones o intervalos no acotados; por ejemplo, en el cálculo del área de una región plana limitada por la gráfica de una función no acotada, o en el cálculo de la energía transportada por una onda que se propaga indefinidamente en el tiempo.

Aunque estas y otras deficiencias de la integral de Riemann son solventadas por teorías de integración más avanzadas, es posible ampliar de forma sencilla la integral de Riemann al contexto más general de funciones o intervalos no acotados. El estudio de estas nuevas integrales, llamadas *impropias*, es el objeto de este tema.

El lector observará en muchas ocasiones un paralelismo entre las definiciones y resultados relativos a series numéricas y los que se exponen a continuación, en especial en lo referente a los criterios de comparación y la convergencia absoluta; si se ha comprendido aquello, estos nuevos conceptos no deben suponer una dificultad excesiva.

8.1. Definiciones y primeras propiedades

Definición 8.1. Sea f una función real definida en un intervalo I de la recta real (de cualquier naturaleza, cerrado o no, acotado o no). Se dice que f es *localmente integrable* en I (*en el sentido de Riemann*) si es integrable Riemann en todo intervalo cerrado y acotado contenido en I.

Definición 8.2. Sea f una función real definida en un intervalo de la forma $[a,b)$, donde a es un número real y b puede ser un número real o $+\infty$. Supongamos que f es localmente integrable en $[a,b)$, lo que equivale a que f sea integrable en $[a,x]$ para cada $x \in (a,b)$. Se dice que f es *integrable en el sentido impropio* en $[a,b)$ si existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

En este caso dicho límite se denomina *integral impropia* de f en $[a,b)$ y se denota por

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^{\to b} f\,.$$

Observación 8.3. Cuando f es integrable en el sentido impropio en $[a,b)$ se dice que la *integral impropia* $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ es *convergente* o *converge*. De forma paralela al estudio de series numéricas uno puede contemplar el par ordenado (f,F) de funciones definidas en $[a,b)$, donde

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in [a,b)\,,$$

y la convergencia de la integral impropia equivale a que exista $\lim_{x\to b^-} F(x) \in \mathbb{R}$. Si este límite es infinito o no existe, se dice que la integral impropia *no converge*. Estudiar la *naturaleza* o *carácter* de la integral impropia consiste en determinar su convergencia o su no convergencia.

Definición 8.4. Sea f una función real definida y localmente integrable en un intervalo $(a,b]$, donde a es un número real o $-\infty$ y $b\in\mathbb{R}$. Se dice que f es *integrable en el sentido impropio* en $(a,b]$ si existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt\,.$$

En este caso dicho límite se denomina *integral impropia* de f en $(a,b]$ y se denota por

$$\int_{\to a}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_{\to a}^{b} f\,.$$

Se plantea ahora el problema de generalizar la definición de integral impropia a situaciones más complejas, concretamente al caso de funciones reales definidas en una unión finita de intervalos de la recta (no necesariamente acotados). Esto es posible dividiendo dichos intervalos en otros de la forma $(a,b]$ o $[a,b)$. El siguiente lema garantiza la coherencia de la definición que se da a continuación.

Lema 8.5. Sea f una función real definida en un intervalo (a,b), no necesariamente acotado. Supongamos que f es localmente integrable en (a,b). Si existe $c\in(a,b)$ tal que las integrales impropias

$$\int_{\to a}^{c} f \qquad \text{y} \qquad \int_{c}^{\to b} f$$

son convergentes, entonces para cada $d\in(a,b)$ se tiene que las integrales impropias

$$\int_{\to a}^{d} f \qquad \text{y} \qquad \int_{d}^{\to b} f$$

convergen, y además

$$\int_{\to a}^{c} f+\int_{c}^{\to b} f \;=\; \int_{\to a}^{d} f+\int_{d}^{\to b} f\,.$$

Definición 8.6. Sea f una función real definida en un intervalo (a,b). Se dice que f es *integrable en el sentido impropio* en (a,b) si existe $c\in(a,b)$ tal que f es integrable en el sentido impropio en $(a,c]$ y $[c,b)$, es decir, tal que las dos integrales impropias

$$\int_{\to a}^{c} f \qquad \text{y} \qquad \int_{c}^{\to b} f$$

son convergentes, y en este caso la *integral impropia* de f en (a,b) es el número

$$\int_{\to a}^{\to b} f \;=\; \int_{\to a}^{c} f+\int_{c}^{\to b} f\,.$$

Observaciones 8.7.

(i) En virtud del resultado previo, ni la integrabilidad de f en el sentido impropio, ni el valor de la integral en caso de convergencia, dependen del punto c que aparece en la definición. También se deduce que si para un $c\in(a,b)$ se tiene que al menos una de las integrales $\int_{\to a}^{c} f$ o $\int_{c}^{\to b} f$ no converge, entonces f no es integrable en (a,b).

(ii) Como en las situaciones anteriores, decir que la *integral impropia* $\int_{\to a}^{\to b} f$ *converge* es otra forma de expresar que f es integrable en el sentido impropio en (a,b).

El siguiente resultado muestra la equivalencia de la integral de Riemann con la integral impropia para funciones acotadas. Aunque es válido también en las otras situaciones descritas, se expone, por razones de brevedad, para integrales impropias del primer tipo.

Proposición 8.8. Si f es una función real, acotada e integrable en el sentido de Riemann en el intervalo compacto $[a,b]$, entonces la integral impropia de f en $[a,b)$ converge y además su valor coincide con la integral de Riemann de f en $[a,b]$,

$$\int_{a}^{\to b} f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Recíprocamente, si g es una función acotada y localmente integrable en el intervalo acotado $[a,b)$, entonces la integral impropia $\int_a^{\to b} g$ converge. Es más, fijado cualquier número real ℓ, la función $\widetilde{g}$ definida por

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [a,b) \\ \ell & \text{si } x = b, \end{cases}$$

es integrable Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^{\to b} g(x)\,dx \;=\; \int_a^b \widetilde{g}(x)\,dx\,.$$

Observaciones 8.9.

(i) El resultado anterior muestra que el concepto de integral impropia generaliza realmente el de integral (en el sentido estricto o propio) de Riemann. Por esta razón es habitual expresar las integrales impropias con la misma notación que aquélla, $\int_a^b f$, siendo fácil determinar en cada caso concreto si se trata de una integral de Riemann o de una integral impropia.

(ii) En la práctica suele suceder (como ocurre con algunos de los ejercicios propuestos) que la función g es continua en $[a,b)$ y existe y es finito el límite $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \ell$. Si se elige este valor para definir la función $\widetilde{g}$, ésta resulta ser continua en $[a,b]$, y por lo tanto integrable Riemann.
Por ejemplo, la función g definida en $(0,1]$ por

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

es continua en $(0,1]$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$. Entonces la integral impropia $\int_{\to 0}^1 g$ converge, y su valor coincide con el de la integral de Riemann en $[0,1]$ de la función

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \in (0,1], \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

que es continua en $[0,1]$.

(iii) Por último comentaremos un par de aspectos que suelen ser mal interpretados e inducir a error en el estudio de integrales impropias:

(iii.1) La convergencia de una integral impropia $\int_a^{\to b} f$ ($b \in \mathbb{R}$ o $b = \infty$) no implica la existencia del límite $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

(iii.2) En la proposición anterior se contemplan únicamente intervalos acotados. Esto es esencial: por ejemplo, la existencia del límite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ no implica la convergencia de la integral impropia $\int_a^{\to\infty} f$. Ahora bien, si la integral converge y dicho límite existe, su valor ha de ser necesariamente cero.

Definición 8.10. Sean (a,b) un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, no necesariamente acotado, y f una función real definida en (a,b), excepto quizá en una cantidad finita de puntos a_1, a_2, ..., a_{n-1}, con

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b\,.$$

Se supone también que f es localmente integrable en todos los intervalos (a_{k-1}, a_k), $k = 1, 2, \ldots, n$. Se dice que f es *integrable en el sentido impropio* en (a,b) si lo es en cada intervalo (a_{k-1}, a_k), y en este caso la *integral impropia* de f en (a,b) es el número

$$\int_{\to a}^{\to a_1} f + \int_{\to a_1}^{\to a_2} f + \ldots + \int_{\to a_{n-1}}^{\to b} f \;=\; \sum_{k=1}^{n} \int_{\to a_{k-1}}^{\to a_k} f\,.$$

Observación 8.11. Con la notación de la definición anterior, en la práctica se habla simplemente de la integral impropia de f en (a,b), denotada por

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f\,,$$

siendo habitual omitir la mención a los puntos a_k donde la función no está definida. Por ejemplo, si se propone estudiar el carácter de la integral

$$\int_0^2 \frac{\log\big((x-1)^2\big)}{\sqrt{2\,x-x^2}}\,dx$$

hay que notar primero que la expresión del integrando define una función continua en el intervalo $(0,2)$, a excepción del punto 1, y por tanto localmente integrable en cada uno de los subintervalos $(0,1)$ y $(1,2)$. Así pues, el problema consiste en estudiar el carácter de las cuatro integrales impropias

$$\int_{\to 0}^{1/2} f\,, \qquad \int_{1/2}^{\to 1} f\,, \qquad \int_{\to 1}^{3/2} f \qquad \text{y} \qquad \int_{3/2}^{\to 2} f\,,$$

y, si éstas convergen, también lo hará la primera y su valor será la suma de los de esas cuatro. Por supuesto, la elección de los puntos intermedios $1/2$ y $3/2$ es arbitraria, lo mismo habría dado tomar cualesquiera otros dos puntos $c_1 \in (0,1)$ y $c_2 \in (1,2)$.

Los siguientes resultados, que se deducen fácilmente de los análogos para integrales de Riemann, proporcionan criterios de convergencia y métodos de cálculo para integrales impropias. Por brevedad, algunos se enuncian sólo para integrales impropias del primer tipo, siendo sencillo adaptarlos a las otras situaciones mencionadas.

Proposición 8.12 (Linealidad de las integrales impropias). Sean f y g funciones reales definidas e integrables en el sentido impropio en el intervalo $[a,b)$. Si α, β son números reales, la función $\alpha f + \beta g$ (localmente integrable en $[a,b)$ por serlo f y g) es integrable en el sentido impropio en $[a,b)$, y además

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\,.$$

Proposición 8.13 (Regla de Barrow). Sea f una función localmente integrable en $[a,b)$. Se supone que existe una primitiva G de f en $[a,b)$. La integral impropia de f en $[a,b)$ converge si, y sólo si, existe y es finito

$$\lim_{x\to b^-} G(x)\,,$$

en cuyo caso se tiene que

$$\int_a^b f \;=\; \lim_{x\to b^-} G(x) \;-\; G(a)\,.$$

Observaciones 8.14.

(i) Habitualmente, la diferencia $\lim\limits_{x\to b^-} G(x) - G(a)$ se representa por

$$G(x)\Big|_{x=a}^{x\to b}, \qquad \text{o simplemente} \qquad G(x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

al igual que en el caso de las integrales de Riemann.

(ii) Si f es localmente integrable en (a,b) y G es una primitiva de f en (a,b), la integral de f en (a,b) convergerá si, y sólo si, los dos límites

$$\lim_{x\to a^+} G(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to b^-} G(x)$$

existen y son finitos, en cuyo caso

$$\int_a^b f \;=\; \lim_{x\to b^-} G(x) \;-\; \lim_{x\to a^+} G(x) \;=\; G(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b}.$$

(iii) La integrabilidad local en el intervalo correspondiente, así como la existencia de primitiva, están garantizadas en el caso de que la función f sea continua en dicho intervalo.

Teorema 8.15 (del cambio de variable). Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ de extremos α y β (no necesariamente pertenecientes a I), con $\alpha < \beta$ y pudiendo ser infinito uno de ellos o los dos. Sea φ una función real definida y de clase $\mathcal{C}^1$ en I, de modo que $\varphi'(t) \neq 0$ para cada $t \in I$. El conjunto imagen de φ es, como ya es sabido, un intervalo J, que supondremos de extremos a y b (no necesariamente en J), con $a < b$ y pudiendo ser alguno de ellos infinito.

Si f es una función real definida y localmente integrable en J, entonces la función definida en I por

$$t \mapsto f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|$$

es localmente integrable en I, las integrales impropias

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$

tienen el mismo carácter, y si convergen, se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt\,.$$

Observación 8.16. En la práctica, al igual que sucede para integrales de Riemann, la última igualdad se suele representar también

$$\int_{\varphi(\alpha^+)}^{\varphi(\beta^-)} f(x)\,dx \;=\; \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,,$$

siendo $\varphi(\alpha^+) = \lim\limits_{t\to\alpha^+} \varphi(t)$ y $\varphi(\beta^-) = \lim\limits_{t\to\beta^-} \varphi(t)$.

Proposición 8.17 (Integración por partes). Sean f y g funciones reales de clase $\mathcal{C}^1$ en un intervalo $[a,b)$ de modo que existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to b^-} f(x)\,g(x)\,.$$

Entonces las integrales impropias

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

tienen el mismo carácter. Además, si convergen,

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \;=\; f(x)\,g(x)\Big|_{x=a}^{x\to b} - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt\,.$$

Observación 8.18. En el resultado anterior, la condición de que exista y sea finito el límite $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,g(x)$ es esencial; si dicho límite es infinito puede suceder que las integrales impropias $\int_a^b f'g$ y $\int_a^b f\,g'$ no tengan el mismo carácter.

Si f y g son de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo (a,b) (lo que garantiza la integrabilidad local de las funciones $f'\,g$ y $f\,g'$), se ha de exigir que los dos límites

$$\lim_{x\to b^-} f(x)\,g(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)\,g(x)$$

existan y sean finitos. La conclusión es que las integrales impropias

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

tienen el mismo carácter, y si convergen, se tiene que

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \;=\; f(x)\,g(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt\,.$$

8.2. Integración de funciones positivas

Pasamos ahora al estudio de otros criterios que permitan decidir si una determinada integral impropia es o no convergente; éstos serán aplicables a funciones de signo constante, aunque, por simplicidad en la exposición y sin que esto suponga restricción, se enunciarán para funciones positivas (nótese que las integrales impropias de las funciones f y $-f=-1\cdot f$ tienen el mismo carácter). Si no es éste el caso, además de aplicar la definición o los resultados anteriores, se puede recurrir al estudio de la convergencia absoluta, que definiremos más adelante.

De nuevo, la mayoría de los resultados que se exponen se enuncian para integrales impropias en intervalos de la forma $[a,b)$, pero se pueden adaptar fácilmente a los otros casos.

Lema 8.19. Sea f una función real localmente integrable en el intervalo $[a,b)$ y tal que $f(x)\geq 0$ para cada $x\in[a,b)$. Sea

$$F(x)=\int_a^x f, \qquad x\in[a,b).$$

Entonces, son equivalentes:

(i) $\int_a^b f$ converge.

(ii) La función F es acotada en $[a,b)$.

Proposición 8.20 (Criterio de comparación). Sean f y g funciones reales definidas y localmente integrables en un intervalo $[a,b)$, tales que existe $c\in(a,b)$ de modo que

$$0\leq f(x)\leq g(x) \qquad \text{para cada } x\in(c,b)\,.$$

Entonces:

(i) Si $\int_a^b g$ converge, también converge $\int_a^b f$.

(ii) Si $\int_a^b f$ no converge, tampoco converge $\int_a^b g$.

Observación 8.21. Este criterio tiene una interpretación geométrica sencilla: la región limitada por el eje de abscisas, las rectas de ecuaciones $x=c$, $x=b$ (supuesto que $b\in\mathbb{R}$) y la gráfica de la función g contiene a la región limitada por esas mismas tres rectas y la gráfica de la función f; si el área de la primera es finita la de la segunda también, si el área de la segunda es infinita también lo es la de la primera.

El criterio de comparación se aplica usualmente en la forma que se expone a continuación.

Corolario 8.22 (Criterio de comparación por cociente). Sean f y g dos funciones reales definidas y localmente integrables en un intervalo $[a,b)$, tales que existe $c\in(a,b)$ de modo que

$$f(x)\geq 0\,,\ g(x)>0 \qquad \text{para cada } x\in(c,b)\,.$$

Supongamos que existe (finito o no) el límite

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

(i) Si $L\in(0,\infty)$, entonces las integrales $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.

(ii) Si $L=+\infty$ y $\int_a^b g$ no converge, entonces $\int_a^b f$ no converge.

(iii) Si $L=0$ y $\int_a^b g$ converge, entonces $\int_a^b f$ converge.

Los siguientes resultados son consecuencia del criterio secuencial para la existencia de límites, y relacionan la convergencia de una cierta integral impropia con la convergencia de una serie numérica.

Proposición 8.23. Sea f una función definida, no negativa y localmente integrable en el intervalo $[a,b)$. Entonces la integral impropia $\int_a^b f$ converge si, y sólo si, existe una sucesión creciente $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de $[a,b)$ con $\lim_{n\to\infty} x_n=b$ y tal que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$$

converge. En este caso, para cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de $[a,b)$ que crece hacia b, se tiene que

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^{y_1} f + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_n}^{y_{n+1}} f \,.$$

Corolario 8.24. Sea f una función decreciente (esta condición asegura la integrabilidad local de f) y no negativa definida en $[a,\infty)$. Entonces la integral $\int_a^{\infty} f$ converge si, y sólo si, la serie numérica $\sum\limits_{n\geq a} f(n)$ es convergente.

Ejemplo 8.25. Si $\beta > 1$ la integral impropia de la función $f(x) = 1/x^{\beta}$ en el intervalo $[1,\infty)$ es convergente, puesto que f es decreciente y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$$

es convergente (de hecho se tiene que $\int_1^{\infty} dx/x^{\beta} \;\leq\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\beta}$).

Si $0 \leq \beta \leq 1$ el mismo argumento muestra que dicha función no es integrable.

El siguiente resultado se enuncia para intervalos abiertos por la izquierda, existiendo, como en los anteriores, uno análogo para intervalos abiertos por la derecha.

Corolario 8.26. Sea f una función decreciente y no negativa en $(a,b]$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se supone que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $(a,b]$ que decrece estrictamente hacia a y tal que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{n+1})\,(x_n - x_{n+1})$$

es convergente. Entonces la integral impropia de f en $(a,b]$ es convergente; además,

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; f(x_1)\,(b-x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} f(x_{n+1})\,(x_n - x_{n+1})\,.$$

Ejemplo 8.27. Si $\beta > 1$ la integral impropia de la función $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\log(x)|^{\beta}}$ en el intervalo $\big(0, 1/2\big]$ es convergente, puesto que la función f es decreciente en el intervalo $(0, e^{-\beta})$ y la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} f\Big(\frac{1}{n+1}\Big)\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\log(n+1)^{\beta}}$$

es convergente. Si $\beta \leq 1$, un argumento similar, minorando en este caso la integral por una serie divergente, muestra que dicha función no es integrable.

Nota: El estudio de las integrales impropias que aparecen tanto en este ejemplo como en el anterior se realiza de forma más sencilla aplicando la regla de Barrow, ya que las primitivas de las funciones involucradas son de cálculo inmediato.

Definición 8.28. Sea f una función definida y localmente integrable en $[a,b)$ (lo que implica que la función $|f|$ lo es). Se dice que f es *absolutamente integrable* (en el sentido *impropio*) en $[a,b)$, o que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge absolutamente*, si la integral

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

es convergente.

Proposición 8.29. Si la integral impropia $\int_a^b f$ converge absolutamente, entonces converge y además se tiene que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Observación 8.30. En la teoría de la integral de Riemann, la integrabilidad de una función acotada f en un intervalo compacto $[a,b]$ implica la integrabilidad de $|f|$ en ese intervalo. Sin embargo, la convergencia de una integral impropia no implica su convergencia absoluta.

Como ejemplo consideremos la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx\,,$$

que es convergente y no converge absolutamente. En efecto, aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx \;=\; -\cos(x)\,\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x\to\infty} - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \;=\; \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,,$$

de donde se deduce que la primera integral tiene el mismo carácter que la integral impropia $\int_1^\infty \cos(x)/x^2\,dx$. Ésta es absolutamente convergente en virtud del criterio de comparación, puesto que $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ converge y

$$\frac{|\cos(x)|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \qquad \text{para cada } x > 1\,.$$

Para probar que la integral no converge absolutamente basta aplicar la Proposición 8.23, tomando la sucesión de término general $y_n = n\,\pi$. Así, se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx\,,$$

que no converge, ya que

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx &\ge \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,dx \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{2}{(n+1)\pi}\,.\end{aligned}$$

8.3. Criterios usuales de convergencia

Se presentan en esta sección varias aplicaciones concretas del criterio de comparación de uso frecuente en la práctica.

Proposición 8.31. Sean a, b números reales con $a < b$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Las integrales impropias

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\theta} \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\theta}$$

son convergentes si, y sólo si, $\theta < 1$. En este caso el valor de ambas integrales es

$$\frac{(b-a)^{1-\theta}}{1-\theta}\,.$$

Corolario 8.32. Sea f una función localmente integrable en el intervalo (a,b) y sea $c \in (a,b)$. Si a (resp. b) es un número real y existe $\theta < 1$ verificando una de las siguientes propiedades:

(i) $|f(x)| \le \dfrac{M}{(x-a)^\theta}$, $x \in (a,c]$ $\Big($resp. $|f(x)| \le \dfrac{M}{(b-x)^\theta}$, $x \in [c,b)\Big)$, donde $M \in \mathbb{R}$;

(ii) existe y es finito el límite $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^\theta f(x)$ $\Big($resp. $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^\theta f(x)\Big)$,

entonces la integral impropia $\int_a^c f$ $\big($resp. $\int_c^b f\big)$ es absolutamente convergente.

Corolario 8.33. Sea f una función localmente integrable en el intervalo (a,b) y sea $c \in (a,b)$. Si a (resp. b) es un número real y existe $\theta \ge 1$ verificando una de las siguientes propiedades:

(i) $f(x) \ge \dfrac{M}{(x-a)^\theta}$, $x \in (a,c]$ $\Big($resp. $f(x) \ge \dfrac{M}{(b-x)^\theta}$, $x \in [c,b)\Big)$, donde $M > 0$;

(ii) existe y es no nulo (finito o infinito) el límite

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^\theta f(x) \qquad \Big(\text{resp. } \lim_{x\to b^-}(b-x)^\theta f(x)\Big)\,,$$

entonces la integral impropia $\int_a^c f$ $\left(\text{resp. } \int_c^b f\right)$ no converge.

Proposición 8.34. Sean a, θ números reales.

(i) Si $a > 0$ la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\theta}$ es convergente si, y sólo si, $\theta > 1$. En este caso su valor es $\dfrac{a^{1-\theta}}{\theta-1}$.

(ii) Si $a < 0$ la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{dx}{(-x)^\theta}$ es convergente si, y sólo si, $\theta > 1$. En este caso su valor es $\dfrac{(-a)^{1-\theta}}{\theta-1}$.

Corolario 8.35. Sea f una función localmente integrable en el intervalo (a,b) y sea $c \in (a,b)$. Si $a = -\infty$ (resp. $b = \infty$), $c < 0$ (resp. $c > 0$) y existe $\theta > 1$ verificando una de las siguientes propiedades:

(i) $|f(x)| \le \dfrac{M}{(-x)^\theta}$, $x \in (-\infty, c]$ $\left(\text{resp. } |f(x)| \le \dfrac{M}{x^\theta},\ x \in [c,\infty)\right)$, donde $M \in \mathbb{R}$;

(ii) existe y es finito el límite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (-x)^\theta f(x)$ $\left(\text{resp. } \displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\theta f(x)\right)$,

entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^c f$ $\left(\text{resp. } \int_c^\infty f\right)$ es absolutamente convergente.

Corolario 8.36. Sea f una función localmente integrable en el intervalo (a,b) y sea $c \in (a,b)$. Si $a = -\infty$ (resp. $b = \infty$), $c < 0$ (resp. $c > 0$) y existe $\theta \le 1$ verificando una de las siguientes propiedades:

(i) $f(x) \ge \dfrac{M}{(-x)^\theta}$, $x \in (-\infty, c]$ $\left(\text{resp. } f(x) \ge \dfrac{M}{x^\theta},\ x \in [c,\infty)\right)$, donde $M > 0$;

(ii) existe y es no nulo (no necesariamente finito) el límite

$$\lim_{x\to-\infty} (-x)^\theta f(x) \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to\infty} x^\theta f(x)\right),$$

entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^c f$ $\left(\text{resp. } \int_c^\infty f\right)$ no converge.

A partir de los límites del tipo

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha\,|\log(x)|^\beta, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)^\beta}{x^\alpha}, \qquad \lim_{x\to0^+} x^\gamma\, e^{-\beta/x}, \qquad \lim_{x\to\infty} x^\gamma\, e^{-\beta x},$$

estudiados en el tema 3, ejercicio 3.10, se deducen los siguientes criterios.

Proposición 8.37. Sean β y γ números reales.

(i) Si $0 < a < 1$ la integral impropia $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^\gamma\,|\log(x)|^\beta}$ converge únicamente si $\gamma < 1$ o si $\gamma = 1$ y $\beta > 1$.

(ii) Si $a > 1$ la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\gamma\,|\log(x)|^\beta}$ converge únicamente si $\gamma > 1$ o si $\gamma = 1$ y $\beta > 1$.

Proposición 8.38. Sean β y γ números reales.

(i) Si $a \in \mathbb{R}$ la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty e^{-\beta x}\,dx$ es convergente si, y sólo si, $\beta > 0$, en cuyo caso su valor es

$$\int_a^{\to\infty} e^{-\beta x}\,dx = \frac{e^{-\beta a}}{\beta}.$$

(ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x^\gamma}\,dx$ converge únicamente si $\beta > 0$ o si $\beta = 0$ y $\gamma > 1$.

Ejercicios propuestos

8.1 Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias y calcular su valor cuando proceda:

(I) $\displaystyle\int_0^b \log(x)\,dx\,,\quad b\in\mathbb{R}$ (II) $\displaystyle\int_0^b e^{1/x}\,x^{\alpha}\,dx\,,\quad b,\alpha\in\mathbb{R}$ (III) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}$

(IV) $\displaystyle\int_{1/4}^1 \left(\sqrt{x}-1\right)^{-2}dx$ (V) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,\operatorname{sen}(x)\,dx$ (VI) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(VII) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sec^2(x)\,dx$ (VIII) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ (IX) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos(x)}$

(X) $\displaystyle\int_{-\infty}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ (XI) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (XII) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(XIII) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sec^2(x)}{\operatorname{tg}^3(x)}\,dx$ (XIV) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,2^{-x^2}\,dx$ (XV) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2(x)\,dx$

(XVI) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ (XVII) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}(2\,x^2-4\,x)\,dx$ (XVIII) $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{x+18}{x^2-x-12}\,dx$

(XIX) $\displaystyle\int_0^4\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ (XX) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$ (XXI) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{|x|}}}{\sqrt{|x|}}\,dx$

(XXII) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 x^{-1/3}\,dx$ (XXIII) $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(x^4-x\right)^{-1}dx$ (XXIV) $\displaystyle\int_{-3}^1\frac{x+1}{(x+3)\sqrt{|x|}}\,dx\,.$

8.2 Determinar el carácter de las siguientes integrales:

(I) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (II) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (III) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(1+e^x)}}$

(IV) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}\,dt$ (V) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log(x)}{x(x^2-1)^{1/2}}\,dx$ (VI) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

(VII) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}e^{-x}\log\left(1+\operatorname{tg}^2(x)\right)dx$ (VIII) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^3(x)}{1+\cos(x)+e^x}\,dx$ (IX) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{e^x}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}\,dx$

(X) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^{3/2}}\,dx\,.$

8.3 Demostrar que son convergentes las siguientes integrales impropias:

(I) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\log(x)}{x^2+2\,x+1}\,dx$ (II) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^p-1}{\log(x)}\,dx\,,\quad p\geq 0$

(III) $\displaystyle\int_0^1\log(x)\log(1-x)\,dx$ (IV) $\displaystyle\int_0^1\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx.$

8.4 Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cos(\beta\,x)\,dx$$

según los valores de α y β. Calcular su valor cuando proceda.

8.5 Demostrar que para cada $n=0,1,2,\dots$ la integral impropia

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-x}\,dx$$

es convergente y calcular su valor.

8.6 Se considera la función

$$f(x) \;=\; e^x-\cos(x)-x\,.$$

(i) Calcular el desarrollo limitado de orden 4 de la función f en el punto $x_0=0$.

(ii) Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^{5/2}\, e^{2x}}\, dx\,.$$

8.7 Estudiar en función del parámetro real α el carácter de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{\big(\operatorname{Sh}(x) - \operatorname{sen}(x+\alpha\, x^2)\big)\, \log\left(1+\sqrt{x}\right)}{x^4\, e^x}\, dx\,.$$

8.8 Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera la función

$$f(x) \;=\; e^{-2x^2} - \cos(\alpha\, x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Obtener el desarrollo limitado de f de orden 4 en $x_0 = 0$.
(ii) Estudiar, en función del parámetro α, el carácter de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2x^2} - \cos(\alpha\, x)}{\sqrt{x^7(1+x)}}\, dx\,.$$

8.9 Sea $\alpha > 0$. Se considera la función

$$f(x) \;=\; \log(1+\alpha\, x) - \operatorname{sen}(x), \qquad x > \frac{-1}{\alpha}\,.$$

(i) Hallar el desarrollo limitado de orden 2 en $x = 0$ de la función f.
(ii) Estudiar, según los valores de $\alpha > 0$, la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{f(x)\log(1+x^2)}{x^4 + x^5}\, dx\,.$$

8.10 Estudiar, en función del parámetro real α, el carácter de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^2} dx\,.$$

8.11 Probar que las integrales impropias

$$\int_0^{\pi/2} \log\big(\operatorname{sen}(x)\big)\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\pi/2} \log\big(\cos(x)\big)\, dx$$

convergen y son iguales. Calcular su valor.

8.12 Probar que si $p > 1$ las integrales impropias siguientes son absolutamente convergentes:

(I) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^p}\, dx$ (II) $\displaystyle\int_1^\infty \operatorname{sen}^p\left(\frac{1}{x}\right) dx$ (III) $\displaystyle\int_1^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^p}\right) dx\,.$

8.13 Demostrar que las siguientes integrales impropias convergen, pero no convergen absolutamente:

(I) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x}\, dx$ (II) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$

(III) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(x^2\right) dx$ (IV) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}\, dx\,.$

8.14 Sean $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ las sucesiones de números reales definidas por

$$a_n = n - \frac{1}{2^n} \qquad \text{y} \qquad b_n = n + \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Se considera la función real f definida en $[0,\infty)$ por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2^{5n}}\,(x-a_n)\,(b_n - x) & \text{si } x \in [a_n, b_n], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(i) Demostrar que f es continua en $[0, \infty)$ y dar una idea de su representación gráfica. Demostrar que f no está acotada en $[0, \infty)$.

(ii) Probar que la integral impropia $\int_0^\infty f$ converge.

8.15 Demostrar que la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{xt} - 1}{t} \, dt$$

está bien definida y es derivable en $\mathbb{R}$. Calcular $f'(x)$.
Indicación: Realizar un cambio de variable adecuado que elimine la dependencia de la variable x en el integrando.

8.16 Sea $y > 0$. Se considera la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{-yt} \operatorname{sen}(t) \, dt .$$

(i) Demostrar que para cada $y > 0$ la integral es absolutamente convergente. Calcular el valor de la integral dada, que denotaremos por $F(y)$.

(ii) Probar que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la integral

$$\int_0^\infty e^{-yt} \operatorname{sen}(y^{\alpha+1} t) \, dt$$

converge absolutamente, y que su valor, al que llamamos $G_\alpha(y)$, es igual a

$$\frac{1}{y^{\alpha+1}} F\Big(\frac{1}{y^\alpha}\Big) .$$

(iii) Demostrar que la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty G_\alpha(y) \, dy$ es convergente si, y sólo si, $\alpha \neq 0$.

(iv) Calcular $\displaystyle\int_0^\infty G_2(y) \, dy$.

8.17 Sean f y g dos funciones definidas en un mismo intervalo (a, b) de la recta real tales que convergen las dos integrales impropias

$$\int_a^b f(x) \, dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^b g(x) \, dx .$$

(i) Mostrar con un ejemplo que, en general, la integral impropia

$$\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx$$

no tiene por qué ser convergente.

(ii) Demostrar que si las dos integrales impropias de f y g en (a, b) son absolutamente convergentes y una de las dos funciones es acotada, entonces la integral impropia

$$\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx$$

es absolutamente convergente.

8.18 Problemas propuestos en examen:
18 Junio 2001, examen del segundo parcial, cuestión 1.
29 Junio 2001, examen final, alumnos que se examinan de todo, problema 3.a.
14 Septiembre 2001, examen extraordinario, problema 3.
18 Junio 2002, examen del segundo parcial, problema 1.
29 Junio 2002, examen final, segundo parcial, problema 2.ii.
7 Junio 2003, examen del segundo parcial, problema 1.b cuestión 3.
30 Junio 2003, examen final, segundo parcial, cuestión 3.
29 Junio 2004, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, cuestión 3.
4 Junio 2005, examen del segundo parcial, problema 2.

30 Junio 2005, examen final, segundo parcial, problema 2.
10 Junio 2006, examen parcial, problema 2.
12 Septiembre 2006, examen extraordinario, problema 2.
8 Junio 2007, examen del segundo parcial, problemas 2.b y 3.
29 Junio 2007, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, cuestión 2.
11 Septiembre 2007, examen extraordinario, problema 3.
6 Junio 2008, examen del segundo parcial, problema 2.
27 Junio 2008, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, cuestión 2.
5 Junio 2009, examen del segundo parcial, problema 2.
29 Junio 2009, examen final, alumnos que se examinan de todo, cuestión 2.
9 Septiembre 2009, examen extraordinario, problema 2.
29 Mayo 2010, examen del segundo parcial, problemas 1.b y 3.
18 Junio 2010, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 3.c.
18 Junio 2010, examen final (grado), problema 3.
15 Julio 2011, examen final, problemas 2.b y 3.
28 Mayo 2012, octava prueba de evaluación continua, completa.
19 Junio 2012, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 3.
18 Julio 2012, examen extraordinario, problema 3.
6 Junio 2013, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problema 3.
1 Julio 2013, examen extraordinario, cuestión 3.
5 Junio 2014, examen final, alumnos que se examinan del segundo parcial, problemas 2 y 3.
2 Julio 2014, examen extraordinario, problemas 2 y 3.