Soluciones del examen realizado el 12 de Febrero de 2002

CUESTIONES (Tiempo 1:45; 4 puntos cada cuestión)

1.- Demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.

Solución: Claramente, los términos de la sucesión $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ son positivos. Por lo tanto, una cota inferior es 0. Por otro lado, el valor 1 es una cota superior, puesto que $\dfrac{\sqrt[n]{n}}{n} \leq \dfrac{n}{n} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Otra forma de ver que la sucesión está acotada consiste simplemente en comprobar que es convergente (véase la proposición 2.3 del tema 2). En este caso, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n} = 0$.

2.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdot 2^{1/8}\cdot\ldots\cdot 2^{1/2^n}\right)$.

Solución: Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdot 2^{1/8}\cdots 2^{1/2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{\sum_{k=1}^{n} 1/2^k} = 2^{\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k}.$$

En el exponente aparece la serie geométrica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/2^k$ de razón $1/2 < 1$. Esta serie es convergente y su suma es igual a 1. Así pues, el límite buscado es $2^1 = 2$.

3.- Sean $\alpha, q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \cos(n\alpha)$.

Solución: Estudiemos la convergencia absoluta de la serie. Puesto que $|\cos(n\alpha)| \leq 1$, para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$|q^n \cos(n\alpha)| \leq |q|^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Al ser $|q| < 1$, la serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |q|^n$ converge. Entonces, por el criterio de comparación, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \cos(n\alpha)$ converge absolutamente y, por lo tanto, converge, cualesquiera que sean $\alpha, q \in \mathbb{R}$, con $|q| < 1$.

4.- Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\cos\Big(\frac{1}{n+1}\Big)$ converge.

Solución: La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente por ser alternada y la sucesión formada por los valores absolutos de sus términos monótona decreciente hacia 0. Como la sucesión $\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$ es monótona creciente hacia 1, el criterio de Abel nos dice que la serie propuesta es convergente. Nótese que no se puede aplicar el criterio de Leibnitz a la serie del problema si no se demuestra previamente que la sucesión $\frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$ es monótona decreciente con límite 0, hecho que no es evidente dado que $\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$ crece cuando n tiende a infinito.

5.- Probar que existe $x_0 \in \left(0, 2/\pi\right)$ tal que $x_0 \operatorname{sen}\Big(\dfrac{1}{x_0}\Big) = \dfrac{1}{\pi}$.

Solución: La función $f(x) = x \operatorname{sen}\left(1/x\right)$ es continua en el intervalo $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, y existe $\lim\limits_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\Big(1/x\Big) = 0$, lo que significa que se puede extender por continuidad la función definiendo $f(0) = 0$. Este proceso nos lleva a que la función dada es continua en un intervalo cerrado y toma en sus extremos los valores 0 y $2/\pi$, por lo que en virtud de la propiedad de Darboux el valor $1/\pi$ que está comprendido entre ambos será alcanzado en algún punto del intervalo $\left(0, 2/\pi\right)$.

6.- Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 + x^2)\log\Big(1 + 1/x^3\Big)$.

Solución: Cuando x tiende a infinito, $\left(1 + 1/x^3\right)$ tiende a uno, por lo que $\log\Big(1 + 1/x^3\Big) \sim_\infty 1/x^3$. Es inmediato a partir de aquí ver que el límite pedido es 1.

7.- Hallar el desarrollo limitado de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Solución: La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\left(-\pi/2, \pi/2\right)$, por lo tanto admite desarrollo limitado en $x_0 = 0$ de cualquier orden, en particular, 3. Para calcularlo usaremos los siguientes desarrollos conocidos en $x_0 = 0$:

$$\operatorname{tg}(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + o(x^3), \qquad \operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + o(x^3), \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\,.$$

Entonces el desarrollo limitado del numerador es

$$\operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}(x) = \Big(x + \frac{1}{3}\,x^3 + o(x^3)\Big) - \Big(x - \frac{1}{3!}\,x^3 + o(x^3)\Big) = \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^3) \quad \text{en } x_0 = 0\,.$$

Haciendo la división en orden creciente de los desarrollos del numerador y del denominador se prueba que

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \quad \text{en } x_0 = 0\,.$$

A la misma conclusión se llega si se denota por $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$ el desarrollo limitado de f en $x_0 = 0$. Entonces se tiene que

$$f(x)\,\cos(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}(x)\,,$$

$$\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)\big)\Big(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\Big) = \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^3)\,,$$

$$a_0 + a_1 x + \Big(a_2 - \frac{a_0}{2!}\Big)\,x^2 + \Big(a_3 - \frac{a_1}{2!}\Big)x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^3)\,.$$

Igualando coeficientes se concluye que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1/2$.

8.- Demostrar que para cualquier par de números reales a, b se tiene que $|\operatorname{arctg}(a) - \operatorname{arctg}(b)| \leq |a - b|$.

Solución: La función $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Se trata de probar que para cualquier par de números reales a, b se tiene que $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$. Si $a = b$ el resultado es cierto, obviamente.

Supongamos que $a < b$ (si $a > b$ se razona de manera análoga). En virtud del teorema de los incrementos finitos de Lagrange, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,.$$

Tomando valores absolutos, $|f(b) - f(a)| = |f'(c)|\,|b - a|$. Para concluir basta observar que

$$|f'(c)| = \frac{1}{1 + c^2} \leq 1\,, \qquad \text{ya que } 1 + c^2 \geq 1.$$

9.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Calcular $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^{3x} \frac{f(t)}{1 + t^2}\,dt$.

Solución: Puesto que la función $g(t) = \dfrac{f(t)}{1 + t^2}$ es continua en $\mathbb{R}$, y la función $u(x) = 3x$ es derivable en $\mathbb{R}$, se sigue del teorema fundamental del cálculo y de la regla de la cadena, que la función $G(x) = \displaystyle\int_0^{3x} \frac{f(t)}{1 + t^2}\,dt$ es derivable en $\mathbb{R}$ y que su derivada vale

$$G'(x) = \frac{3f(3x)}{1 + (3x)^2}\,.$$

Observando que es posible aplicar la regla de l'Hôpital, se tiene que

$$\lim_{x \to 0} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{G'(x)}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{3f(3x)}{1 + (3x)^2} = 3f(0)\,.$$

La última igualdad es consecuencia de la continuidad de f en 0.

Otra solución hace uso de la definición de derivada: puesto que $G(0) = 0$, podemos escribir

$$\lim_{x \to 0} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = G'(0) = 3f(0)\,.$$

10.- Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} xy \operatorname{arctg}\Big(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\Big)$.

Solución: Basta observar que la función $g(x, y) = xy$ tiende obviamente hacia 0 cuando (x, y) tiende hacia $(0, 0)$, mientras que la función $h(x, y) = \operatorname{arctg}\big(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\big)$ está acotada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (por ser $|\operatorname{arctg}(t)| \leq \pi/2$ para todo $t \in \mathbb{R}$); en consecuencia, el producto de ambas funciones tiende hacia 0.

11.- Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Solución: Es inmediato que f es continua en $(0,0)$ y que sus derivadas parciales (que han de calcularse mediante la definición) son nulas en $(0,0)$. Por lo tanto, la diferenciabilidad de f en dicho punto depende de que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sea 0. Pero si se expresa esta fracción en coordenadas polares $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$, se obtiene

$$\frac{\cos^{1/3}(\theta)\,\mathrm{sen}^{1/3}(\theta)}{\rho^{1/3}},$$

que claramente no tiende hacia 0 cuando $\rho \to 0$ para valores de θ para los que $\mathrm{sen}(\theta) \neq 0$ y $\cos(\theta) \neq 0$. Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

12.- Determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Solución: La función f es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}^2$, por lo que sus extremos relativos han de ser puntos críticos de f, es decir, han de ser soluciones del sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x = 0.$$

Los puntos solución son $(0,0)$ y $(1,1)$, en los que la matriz hessiana de f es, respectivamente,

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

La primera tiene determinante estrictamente negativo, con lo que la forma cuadrática que representa es indefinida y $(0,0)$ es un punto de silla. En cuanto a la segunda, los menores principales son $\Delta_1 = 6$, $\Delta_2 = 27$, luego la forma cuadrática es definida positiva y el punto $(1,1)$ es un mínimo relativo (estricto).

PROBLEMAS (Tiempo 2:45)

A. **a)** Para cada $n \in \mathbb{N}$, esbozar la gráfica de la función $f_n(x) = x^4 - 4nx - 1$, $x \in \mathbb{R}$, indicando sus intervalos de crecimiento y sus extremos relativos. *3 ps.*

b) Probar que la ecuación $x^4 - 4nx - 1 = 0$ tiene una única solución positiva x_n. *4 ps.*

c) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. *3 ps.*

d) Probar que $\lim_{n\to\infty}(x_n^3 - 4n) = 0$, y deducir que $x_n \sim \sqrt[3]{4n}$. *4 ps.*

e) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx_n}$. *3 ps.*

Solución:

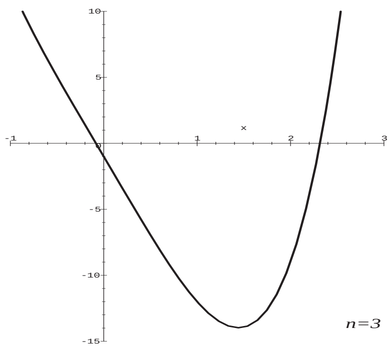
a) El dominio de la función f_n es, obviamente pues se trata de un polinomio, toda la recta real. No presenta ningún tipo de simetría, ni par ni impar. No es periódica. No tiene asíntotas de ningún tipo, aunque

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \infty\,.$$

La función f_n es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. La monotonía y la concavidad de f_n las estudiaremos a través del estudio de sus derivadas.

Se tiene que $f_n'(x) = 4x^3 - 4n$, $x \in \mathbb{R}$. Es claro que

$$\begin{cases} f_n'(x) = 0 & \text{si, y sólo si, } x = \sqrt[3]{n}\,; \\ f_n'(x) > 0 & \text{si, y sólo si, } x > \sqrt[3]{n}\,; \\ f_n'(x) < 0 & \text{si, y sólo si, } x < \sqrt[3]{n}\,. \end{cases}$$



Por lo tanto, f_n es estrictamente decreciente en $(-\infty, \sqrt[3]{n})$, es estrictamente creciente en $(\sqrt[3]{n}, \infty)$, y en $\sqrt[3]{n}$ presenta un mínimo absoluto. Además,

$$f_n''(x) = 12x^2 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

por lo que f_n es una función convexa.

b) Para resolver este apartado se puede razonar de varias maneras, pero esencialmente se trata de usar la monotonía de la función f_n para garantizar la unicidad de la solución, y la continuidad, a través del teorema de Bolzano, para garantizar la existencia.

Observemos que se trata de probar que en $[0,\infty)$ existe un único punto x_n donde la función f_n se anula. Como $f_n(0) = -1 > 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$, y la función f_n es continua en $[0,\infty)$, del teorema de Bolzano se sigue que existe al menos un punto $x_n \in (0,\infty)$ tal que $f_n(x_n) = 0$. En realidad, para aplicar el teorema de Bolzano con precisión habría que considerar un intervalo compacto, por ejemplo $[0, 2n]$ ($f_n(2n) = 16n^4 - 8n^2 - 1 = 8n^2(2n^3 - 1) - 1 > 0$).

Por otro lado, como f_n es estrictamente decreciente en $[0, \sqrt[3]{n})$ y $f_n(0) = -1$, se tiene que

$$f_n(x) \le f_n(0) = -1 < 0 \quad \text{para todo } x \in [0, \sqrt[3]{n}] .$$

Es decir, f_n no tiene ceros en el intervalo $[0, \sqrt[3]{n})$. Pero como f_n es estrictamente creciente en $(\sqrt[3]{n}, \infty)$, se trata de una función inyectiva y sólo alcanza cada valor del conjunto imagen, en este caso el cero, en un único punto.

c) En el apartado anterior se ha probado que $x_n \ge \sqrt[3]{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{\sqrt[3]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia infinito, también lo hace la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

d) Para probar la primera parte de este apartado, observemos que $x_n^4 - 4nx_n - 1 = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $x_n^3 - 4n = 1/x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En el apartado anterior se ha probado que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia infinito, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^3 - 4n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 .$$

Para deducir que $x_n \sim \sqrt[3]{4n}$, recordemos que por definición se trata de probar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/\sqrt[3]{4n} = 1$, o equivalentemente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^3/4n = 1$. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n^3}{4n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3 - 4n}{4n} = 0 ,$$

porque el numerador tiende hacia 0 y el denominador tiende hacia infinito.

e) Es obvio que se trata de una serie de términos positivos, por lo que podemos utilizar todos los criterios válidos para este tipo de series. En particular, gracias a la equivalencia probada en el apartado anterior, el criterio de comparación nos permite asegurar que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx_n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{4n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$$

tienen el mismo carácter; la segunda es una serie de Riemann de exponente $\alpha = 4/3 > 1$, por tanto, convergente.

B. Sea P un punto cualquiera del arco de parábola $y = -x^2 - 2x + 15$ contenido en el primer cuadrante. La recta tangente a dicha parábola en P limita con los ejes de coordenadas un triángulo. Hallar la posición del punto P para que el área de dicho triángulo sea mínima. *10 ps.*

Solución: Si llamamos (a, b) a las coordenadas de P, la ecuación de la recta tangente a la parábola en P será:

$$y - b = (-2a - 2)(x - a),$$

siendo además $b = -a^2 - 2a + 15$, por estar (a, b) sobre la parábola. Los puntos de corte de dicha tangente con los ejes OX y OY son respectivamente los siguientes: $\big(b/(2a+2) + a, 0\big)$ y $(0, -b + 2a^2 + 2a)$, o, teniendo en cuenta la expresión de b en función de a,

$$\left(\frac{a^2 + 15}{2a + 2}, 0\right) \quad \text{y} \quad (0, a^2 + 15).$$

El área del triángulo limitado por los ejes y la recta tangente vale $A(a) = \dfrac{(a^2 + 15)^2}{4a + 4}$. La derivada de A es

$$A'(a) = \frac{2(a^2 + 15)2a(4a + 4) - 4(a^2 + 15)^2}{(4a + 4)^2}.$$

y se anulará para aquellos a que anulen al numerador $2(a^2 + 15)2a(4a + 4) - 4(a^2 + 15)^2 = 0$. Quitando el factor común $4(a^2 + 15)$ que no se anula se obtiene $a(4a + 4) - (a^2 + 15) = 0$, o bien,

$$3a^2 + 4a - 15 = 0,$$

cuyas raíces son -3 y $\frac{5}{3}$. La única que corresponde a un punto del primer cuadrante es $a = \frac{5}{3}$, por lo que el punto P, posible solución, es el $\left(\frac{5}{3}, \frac{80}{9}\right)$. Que este punto corresponde a un mínimo del área puede obtenerse utilizando la derivada segunda, pero es más fácil observar que el numerador de la expresión que da la primera derivada es, salvo el factor $4(a^2+15)$ que siempre es positivo, igual a $3a^2+4a-15$, que es negativo entre -3 y $\frac{5}{3}$ y positivo para $a>\frac{5}{3}$, por lo que la función área pasa en $\frac{5}{3}$ de ser decreciente a ser creciente, y el punto $a=\frac{5}{3}$ corresponde en efecto a un mínimo relativo (de hecho, absoluto en $[0,\infty)$).

C. **a)** Sea α un parámetro real positivo. Determinar el desarrollo limitado de orden 4 en el punto $x_0=0$ de la función $f(x)=\operatorname{sen}(x^2)-\cos(x)+e^{-\alpha x^2}$. *4 ps.*

b) Estudiar, en función del valor de α, la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^3(x+1)}\,dx$. *8 ps.*

Solución:

a) La función f es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$, por lo que admite desarrollo limitado de cualquier orden en todo punto. A la vista de los desarrollos limitados en 0 de las funciones seno, coseno y exponencial,

$$\operatorname{sen}(x)=x+o(x^2),\qquad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),\qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

es inmediato que, por las propiedades de los desarrollos limitados relativas a la composición y a la combinación lineal de funciones, se tiene que

$$f(x)=x^2+o(x^4)-\bigl(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\bigr)+1-\alpha x^2+\frac{\alpha^2x^4}{2}+o(x^4)=\bigl(\frac{3}{2}-\alpha\bigr)x^2+\bigl(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{1}{24}\bigr)x^4+o(x^4),\quad \text{en } x_0=0.$$

b) La función f es continua, y por lo tanto localmente integrable, en $(0,\infty)$. La integral propuesta será convergente si convergen simultáneamente las integrales

$$I_1=\int_0^1\frac{f(x)}{x^3(x+1)}\,dx \qquad \text{e} \qquad I_2=\int_1^\infty\frac{f(x)}{x^3(x+1)}\,dx.$$

Para el estudio de I_1 observamos en primer lugar que si $\alpha=3/2$ se tiene que

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{{}^{13}\!/_{12}\,x^4+o(x^4)}{x^3(x+1)}=0,$$

con lo que el integrando se prolonga por continuidad en el punto 0 y la integral es convergente.

Si $\alpha\neq3/2$, de la expresión en el apartado a) se deduce que procede calcular

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)}{x^3(x+1)}}{1/x}=\lim_{x\to0}\frac{({}^3\!/_2-\alpha)x^2+o(x^2)}{x^2(x+1)}=\frac{3}{2}-\alpha\neq0.$$

Se concluye en primer lugar que, siendo $1/x$ positivo para $x>0$, el integrando conserva signo constante (el de ${}^3\!/_2-\alpha$) en un entorno de 0, por lo que es lícito aplicar el criterio de comparación. En segundo lugar, el mismo límite, al ser no nulo, indica que el carácter de I_1 es el mismo que el de $\int_0^1 {}^{dx}\!/_x$, que diverge.

En cuanto a I_2, la no conservación de signo de f aconseja estudiar la convergencia absoluta. Es claro que

$$\Bigl|\frac{f(x)}{x^3(x+1)}\Bigr|\le\frac{|\operatorname{sen}(x^2)|+|\cos(x)|+e^{-\alpha x^2}}{x^4}\le\frac{3}{x^4},\qquad x>1,$$

y como $\int_1^\infty {}^{dx}\!/_{x^4}$ converge, se tiene que I_2 converge (de hecho, absolutamente) para todo $\alpha>0$.

En conclusión, la integral propuesta converge si, y sólo si, $\alpha=3/2$.

D. Se considera la ecuación $x+y+z+\cos(xyz)=1$.

a) Probar que la ecuación define a z como función implícita $z=z(x,y)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$, en un entorno del punto $(0,0)$, con $z(0,0)=0$. *3 ps.*

b) Demostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{z(x,y)+x+y}{x^2+y^2}=0$. *10 ps.*

Solución:

a) Consideremos la función $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z)=x+y+z+\cos(xyz)-1$. La función F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, $F(0,0,0)=0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)=\bigl(1-xy\operatorname{sen}(xyz)\bigr|_{(0,0,0)}=1$. Entonces, por el teorema de las funciones implícitas, existe un entorno $U\subset\mathbb{R}^2$ de $(x,y)=(0,0)$ y una función $z:U\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tales que $z(0,0)=0$ y

$$F\bigl(x,y,z(x,y)\bigr)=0,\quad (x,y)\in U. \tag{1}$$

b) *Primera solución:* De (1) se deduce que $z(x,y)+x+y = 1-\cos(xyz(x,y))$, $(x,y)\in U$. Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)+x+y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xyz(x,y))}{x^2+y^2}.$$

La función $z(x,y)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U, en particular, $z(x,y)$ es continua en $(0,0)$, esto es,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y) = z(0,0) = 0. \tag{2}$$

Tenemos entonces que $xy\,z(x,y)\to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ y recordando que $1-\cos(t)\sim_0 {t^2}/{2}$, se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xyz(x,y))}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xyz(x,y))^2}{2(x^2+y^2)}.$$

De (2) se deduce que $|z(x,y)|$ está acotada por cierta constante $M>0$ en un entorno de $(x,y)=(0,0)$ contenido en U (utilícese la definición de límite para verlo). En dicho entorno,

$$0 \le \frac{(xyz(x,y))^2}{2(x^2+y^2)} \le \frac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)}M^2$$

La última expresión tiende hacia 0 cuando $(x,y)\to(0,0)$ (hágase un cambio a polares, por ejemplo). Por el teorema del encaje (sandwich), tenemos el resultado:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)+x+y}{x^2+y^2} = 0.$$

Segunda Solución: Para calcular el límite también podemos sustituir $z(x,y)$ por su desarrollo limitado de orden 2 en el punto $(0,0)$:

$$z(x,y) = z(0,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)\,y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)\,xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)\,y^2 + o(||(x,y)||^2).$$

La función F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ y $F\big(x,y,z(x,y)\big)=0$ para todo $(x,y)\in U$. Por tanto, existen y son nulas en U las derivadas parciales de cualquier orden de la función

$$G(x,y) = F(x,y,z(x,y)) = 0.$$

Mediante la regla de la cadena obtenemos la derivadas primeras de G:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Por ser $F(x,y,z) = x+y+z+\cos(xyz)-1$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) &= 1 + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \operatorname{sen}(xyz(x,y))\big[yz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\big] = 0,\\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) &= 1 + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - \operatorname{sen}(xyz(x,y))\big[xz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\big] = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Al evaluar en $(x,y)=(0,0)$, puesto que $z(0,0)=0$, obtenemos $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -1$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -1$.

Obtenemos ahora las derivadas segundas de z en $(0,0)$. Para ello derivamos en (3):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) - \cos(xyz(x,y))\big[yz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\big]^2 - \operatorname{sen}(xyz(x,y))\big[2y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)\big] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(x,y) - \cos(xyz(x,y))\big[yz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\big]\big[xz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\big]$$

$$- \operatorname{sen}(xyz(x,y))\big[z(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(x,y)\big] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) - \cos(xyz(x,y))\big[xz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\big]^2 - \operatorname{sen}(xyz(x,y))\big[2x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\big] = 0,$$

Evaluamos en $(x,y)=(0,0)$ y obtenemos $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0$. El desarrollo limitado de orden 2 en el punto $(0,0)$ de $z(xy)$ es entonces $z(x,y) = -x-y+o(||(x,y)||^2)$. Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)+x+y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o(||(x,y)||^2)}{||(x,y)||^2} = 0.$$

Soluciones del examen realizado el 2 de Septiembre de 2002

CUESTIONES (Tiempo 1:45; 4 puntos cada cuestión)

1.- Sea $a_n = 50^n/n!$, $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de n se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$? Determinar $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución: Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n = \dfrac{50^n}{n!} \leq \dfrac{50^{n+1}}{(n+1)!} = a_{n+1}$ si, y sólo si,

$$n + 1 = \frac{(n+1)!}{n!} \leq \frac{50^{n+1}}{50^n} = 50,$$

es decir, si $n \leq 49$. En caso contrario (cuando $n \geq 50$) se tiene que $a_n > a_{n+1}$.

Puesto que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{49} \leq a_{50}$ y $a_{50} > a_{51} > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$, es sencillo concluir que

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = a_{50} = 50^{50}/50!\,.$$

2.- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge hacia $\alpha \in \mathbb{Z}$. ¿Converge la sucesión de las partes enteras $\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$?

Solución: No necesariamente. Por ejemplo, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_{2n} = \alpha - \frac{1}{2n}, \quad x_{2n-1} = \alpha + \frac{1}{2n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

converge hacia α, sin embargo,

$$[x_{2n}] = \alpha - 1, \quad [x_{2n-1}] = \alpha, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

luego la sucesión de las partes enteras $\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite.

Señalemos que la condición $\alpha \in \mathbb{Z}$ es esencial, y está relacionada con la no continuidad de la función parte entera en los puntos de $\mathbb{Z}$.

3.- Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}\big(1 + (-1)^n\big)^n$.

Solución: Estudiemos la convergencia absoluta de la serie. Si denotamos por a_n el término general de la serie, es sencillo comprobar que

$$|a_n| = \frac{n^3}{3^n}\big|1 + (-1)^n\big|^n \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^n n^3 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dado que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n n^3$ converge, como se comprueba usando el criterio del cociente para series de términos positivos, el criterio de comparación nos garantiza la convergencia absoluta de la serie de partida.

4.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$. ¿Es f una función acotada?

Solución: Se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. De acuerdo con la definición de límite, dado $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que siempre que $|x| > M$ se verifica que $|f(x)| < \varepsilon$. Por tanto, fuera del intervalo $[-M, M]$ la función dada está acotada inferiormente por $-\varepsilon$ y superiormente por ε. Como en el intervalo cerrado y acotado $[-M, M]$ la función es continua, está acotada por el teorema de Weierstrass. Luego f está acotada en todo $\mathbb{R}$.

Otra posible solución es la siguiente: como f es positiva, por ser cociente de dos funciones positivas, es obvio que está acotada inferiormente por cero. Por otro lado, si $|x| \leq 1$ entonces

$$1 + x^2 \leq 1 + 1 = 2 \qquad \text{y} \qquad 1 + x^4 \geq 1\,,$$

luego $f(x) \leq 2$; si $|x| \geq 1$ entonces $x^2 \leq x^4$, luego $f(x) \leq \max\{1, 2\}$. En conclusión, $0 \leq f \leq 2$.

5.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y supongamos que g es acotada y no se anula en ningún punto, y que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = 1$. Probar que $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

Solución: Al no anularse $g(x)$, la función f/g está definida en todo punto. Se tiene que $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)/g(x) - 1\big) = 0$, lo que implica, al estar acotada g, que

$$\lim_{x\to 0}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to 0} g(x)\Big(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\Big) = 0.$$

6.- Sea f una función real continua en $(-1,1)$, con $f(0)>0$. Probar que la función g, dada por $g(x)=x^2 f(x)$, $x\in(-1,1)$, tiene un mínimo relativo en $x_0=0$.

Solución: La función f es continua en $x_0=0$, y al ser su valor en dicho punto mayor que cero, existe un entorno U de $x_0=0$ en el que conserva signo positivo. La función g se anula en $x_0=0$ y por lo antes visto toma valores estrictamente positivos para los puntos del entorno U distintos del 0, es decir,

$$g(x)>0=g(0)\quad \text{si } x\in U, x\neq 0\,.$$

Por tanto $x_0=0$ es un mínimo relativo de $g(x)$.

Nota: no es posible resolver el problema derivando g. Para ello f tendría que ser, por lo menos, derivable.

7.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)\log\big(1+\operatorname{tg}^2(5x)\big)}{\operatorname{arctg}(7x)\big(1-\cos(3x)\big)}$.

Solución: Aplicando las equivalencias adecuadas se obtiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)\log\big(1+\operatorname{tg}^2(5x)\big)}{\operatorname{arctg}(7x)\big(1-\cos(3x)\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\ \operatorname{tg}^2(5x)}{7x\big((3x)^2/2\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\,(5x)^2}{7x\big((3x)^2/2\big)}=\frac{50}{21}.$$

8.- Estudiar la monotonía de la función $f\colon(1,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $\displaystyle f(x)=\int_1^x \log(3t+e^t)\,dt.$

Solución: El integrando es una función continua en el intervalo $[1,\infty)$, por lo que, en virtud del teorema fundamental del cálculo integral, la función f es derivable en $(1,\infty)$ y

$$f'(x)=\log(3x+e^x)>0,\qquad x\in(1,\infty).$$

Esta última desigualdad se verifica puesto que $3x+e^x>1$ si $x>1$. Por lo tanto, f es creciente en su dominio.

9.- Sea $n\in\mathbb{N}$. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Solución: Puesto que

$$0<\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}<\frac{1}{x^2},\qquad x\geq 1,$$

y $\int_1^\infty dx/x^2$ converge, el criterio de comparación asegura que también converge la integral propuesta.

10.- Si $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y $\displaystyle f(x,y)=\frac{x^2+x^3+y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$. ¿Cuánto vale $f(0,0)$?

Solución: Por ser f continua en $(0,0)$, se verifica que

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(1+\frac{x^3}{x^2+y^2}\Big)=1,$$

donde se ha tenido en cuenta que $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$, es decir, $|x|^3\leq\|(x,y)\|^3$.

11.- Sean $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ las funciones dadas por $g(x,y)=(x^2+y^2,x^2-y^2)$, $f(x,y)=x^5y^{10}$. Calcular $(f\circ g)'(1,0)$.

Solución: Como f y g son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$ es lícito aplicar la regla de la cadena. Teniendo en cuenta que $g(1,0)=(1,1)$, se tiene que

$$(f\circ g)'(1,0)=f'(1,1)g'(1,0)=\begin{pmatrix}5x^4y^{10} & 10x^5y^9\end{pmatrix}\Big|_{(1,1)}\begin{pmatrix}2x & 2y\\ 2x & -2y\end{pmatrix}\Bigg|_{(1,0)}=\begin{pmatrix}5 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 0\end{pmatrix}.$$

12.- Sea $f(x,y)=x-2y+\log(x-y)$. Probar que la ecuación $f(x,y)=0$ define una función implícita $y=g(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto 2, siendo $g(2)=1$. Calcular $g'(2)$.

Solución: La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x>y\}$, conjunto abierto al que pertenece el punto $(2,1)$. Además, $f(2,1)=0$ y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\Big(-2-\frac{1}{x-y}\Big)\Big|_{(2,1)}=-3\neq 0.$$

Por tanto, el teorema de las funciones implícitas garantiza que la ecuación $f(x,y) = 0$ define una función $y = g(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno U del punto 2, siendo $g(2) = 1$. Para calcular $g'(2)$, partimos de la igualdad

$$x - 2g(x) + \log\big(x - g(x)\big) = 0, \qquad x \in U,$$

y derivamos respecto de x:

$$1 - 2g'(x) + \frac{1 - g'(x)}{x - g(x)} = 0;$$

al evaluar en $x = 2$, y puesto que $g(2) = 1$, se deduce que $g'(2) = 2/3$.

PROBLEMAS (Tiempo: 2:15)

1.- **a)** Probar que si $x > 0$, $e^x > 1 + \log(1 + x)$. *2 ps.*

b) Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dada por

$$x_0 = a > 0, \qquad x_n = \log\big(1 + \log(1 + x_{n-1})\big), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Probar que $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es convergente y que su límite es 0. *6 ps.*

c) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *4 ps.*

Solución:

a) La función f definida en $(-1, \infty)$ por $f(x) = e^x - \log(1 + x)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en y su derivada vale

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1 + x} > 0 \quad \text{si } x > 0\,.$$

Por tanto, f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$ y si $x > 0$ será $f(x) > f(0) = 1$, que es la desigualdad pedida.

b) Para resolver este apartado observemos que si tomamos logaritmos en la desigualdad obtenida en el apartado anterior se tiene que

$$x > \log\big(1 + \log(1 + x)\big) \quad \text{si } x > 0.$$

De esta desigualdad y de la definición de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ se sigue que se trata de una sucesión estrictamente decreciente. Además, es claro que está acotada inferiormente por 0. Como es sabido, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Sea ℓ el límite de la sucesión. Puesto que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es inmediato que $\ell \geq 0$. Por otra parte, tomando límites en la igualdad

$$x_n = \log\big(1 + \log(1 + x_{n-1})\big), \quad n = 1, 2, \ldots$$

se prueba que $\ell = \log\big(1 + \log(1 + \ell)\big)$. Pero esta igualdad no puede darse si $\ell > 0$ (apartado a)), luego $\ell = 0$.

c) Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(1 + \log(1 + x_n)\big)}{x_n}\,,$$

el problema se reduce, en virtud del criterio secuencial para límites de funciones, a calcular

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\big(1 + \log(1 + x)\big)}{x} = 1\,,$$

por las equivalencias $\log\big(1 + \log(1 + x)\big) \sim_0 \log(1 + x) \sim_0 x$.

2.- **a)** Determínese para qué valores del parámetro a la integral impropia $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1 - e^t + a\,\mathrm{sen}(t)}{t^2}\,dt$, $x > 0$, es convergente. *6 ps.*

b) Para esos valores de a, obtener el desarrollo limitado de orden 2 de $I(x)$ en $x = 0$. *6 ps.*

Solución:

a) Estudiemos el comportamiento del integrando en un entorno de $t = 0$. Para ello utilizamos desarrollos limitados:

$$\frac{1 - e^t + a\,\mathrm{sen}(t)}{t^2} = \frac{(a - 1)t - t^2/2 + o(t^2)}{t^2}.$$

Comparando la última expresión con funciones de la forma $1/t^{\alpha}$ es inmediato ver que $I(x)$ es convergente si, y sólo si, $a = 1$.

b) Para $a = 1$ el desarrollo limitado del integrando es de la forma

$$\frac{1 - e^t + a\,\mathrm{sen}(t)}{t^2} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)}{t^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t + o(t).$$

Puesto que el desarrollo limitado de orden 2 de una de sus primitivas es la primitiva del desarrollo limitado de orden 1 que acabamos de escribir (propiedad 4.3.4 del tema 5), con el valor adecuado, $I(0) = 0$, de la constante de integración, tenemos que

$$I(x) = \int_0^x \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t + o(t)\right) dt = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

3.- Se considera la función g definida en $\mathbb{R}$ por $g(x) = 1 + e^x(1 - x)$.

a) Representar gráficamente la función g, determinando los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la misma. *5 ps.*

b) Probar que existe un único número real $\alpha > 0$ tal que $g(\alpha) = 0$. *5 ps.*

c) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\dfrac{x}{1 + e^{nx}} \leq \dfrac{1}{n}\dfrac{\alpha}{1 + e^{\alpha}}$, y que la igualdad se da en un único punto, que hay que determinar. *6 ps.*

Solución:

a) *Intervalos de monotonía y extremos relativos:* La función g es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$. Su primera derivada es $g'(x) = -x\mathrm{e}^x$. Puesto que $\mathrm{e}^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Por tanto, g es creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$ y presenta un máximo absoluto en $x = 0$. Se deduce también que g no presenta mínimos relativos.

Concavidad y convexidad: La segunda derivada de la función g es $g''(x) = -\mathrm{e}^x(1+x)$, la cual verifica que

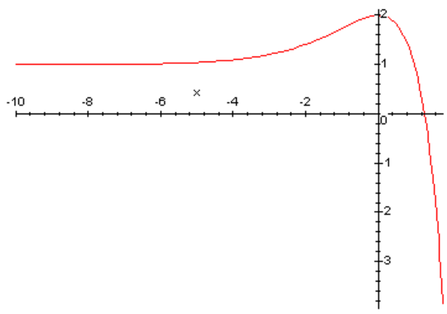
$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1, \quad g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, \quad g''(x) < 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

Por tanto, g es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, \infty)$, y presenta en el punto de abscisa -1 un punto de inflexión.

Asíntotas: Es fácil ver que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$. Tenemos entonces que la recta de ecuación $x = 1$ es una asíntota horizontal de g en $-\infty$. Por otro lado,

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty.$$

Se deduce de ello que g no tiene asíntotas (horizontal u oblícua) en ∞. Finalmente, puesto que g está definida y es continua en toda la recta real, no existen asíntotas verticales.



b) En la resolución del apartado a) hemos visto que g es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ y $g(0) = 2$. Por tanto la imagen por g del intervalo $(-\infty, 0)$ es el intervalo $(1, 2)$. Así pues, $g(x) \neq 0$, para todo $x \in (-\infty, 0]$.

Por otro lado, en el intervalo $(0, \infty)$ la función g es estrictamente decreciente. Ahora consideremos por ejemplo el intervalo $[0, 2]$, en el cual la función g es continua, $g(0) > 0$ y $g(2) < 0$. Entonces, por el teorema de Bolzano, la función g se anula en un punto $\alpha \in (0, 2)$. Puesto que en el intervalo $(0, \infty)$ la función g es estrictamente decreciente, g no puede tomar el valor 0 en ningún otro punto.

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + \mathrm{e}^{nx}}.$$

Cada f_n está definida y es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$. Su derivada es

$$f_n'(x) = \frac{1 + \mathrm{e}^{nx}(1 - nx)}{(1 + \mathrm{e}^{nx})^2}.$$

Puesto que $(1+\mathrm{e}^{nx})^2>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in\mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} &f_n'(x)=0\Leftrightarrow 1+\mathrm{e}^{nx}(1-nx)=0\Leftrightarrow g(nx)=0\Leftrightarrow x=\alpha/n,\\ &f_n'(x)<0\Leftrightarrow x>\alpha/n,\\ &f_n'(x)>0\Leftrightarrow x<\alpha/n. \end{aligned}$$

Por tanto, f_n presenta un máximo absoluto en $x=\alpha/n$, es decir, para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n(x)\le f_n\left(\frac{\alpha}{n}\right)\Leftrightarrow\frac{x}{1+\mathrm{e}^{nx}}\le\frac{1}{n}\frac{\alpha}{1+\mathrm{e}^{\alpha}},$$

y la igualdad se da en $x_n=\alpha/n$.

4.- Se considera la función $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=6ax^3-6axy+y^2+12a^2$.

i) Estudiar la existencia de extremos relativos de f de acuerdo con el parámetro a. *8 ps.*

ii) Hallar para qué valores de a el valor de f en los posibles mínimos relativos es máximo. *4 ps.*

Solución:

i) Derivando parcialmente respecto de x e y e igualando a cero ambas derivadas se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=18ax^2-6ay=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=-6ax+2y=0.\end{aligned}$$

Si $a\neq 0$, de la segunda ecuación se deduce $y=3ax$ y sustituyendo en la primera ecuación resulta $18ax^2-18a^2x=0$, cuyas soluciones son $x=0$ y $x=a$, de donde se sigue que los únicos dos puntos candidatos a ser extremos relativos son $(0,0)$ y $(a,3a^2)$.

Las derivadas segundas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=36ax,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6a,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,$$

por lo que las matrices hessianas en cada uno de los puntos antes hallados son

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}0&-6a\\-6a&2\end{pmatrix}\qquad\text{y}\qquad Hf(a,3a^2)=\begin{pmatrix}36a^2&-6a\\-6a&2\end{pmatrix}.$$

En el primer caso, no existe extremo, mientras que en el segundo la forma cuadrática es definida positiva y corresponde a un mínimo relativo.

Cuando $a=0$, hay una infinidad de puntos que pueden ser extremos, concretamente todos los de la forma $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$. Estudiándolos directamente resultan ser todos mínimos relativos, ya que la función se reduce a $f(x,y)=y^2$.

ii) El valor de $f(x,y)$ en el mínimo se obtiene sustituyendo las coordenadas $(a,3a^2)$ en f, obteniéndose como valor $-3a^4+12a^2$. Esta expresión, como función de a, toma valores negativos para $|a|>2$ y valores positivos entre 2 y -2, salvo en $a=0$ donde es cero. Derivando respecto de a e igualando a cero resulta $-12a^3+24a=0$, cuyas soluciones son $a=0$, $a=\sqrt{2}$, $a=-\sqrt{2}$. La primera corresponde a un mínimo y las otras dos a máximos. Estos dos son los valores de a que se pedían.

Soluciones del examen realizado el 1 de Febrero de 2003

CUESTIONES (Tiempo 2:00; 4 puntos cada cuestión)

1.- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales.
i) Si $\{x_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ converge, ¿se puede asegurar que converge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$?
ii) Si $\{x_n^3\}_{n=1}^{\infty}$ converge, ¿se puede asegurar que converge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Solución:

i) No. El contraejemplo más claro es el de la sucesión $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

ii) Sí, porque $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n^3}$.

2.- Calcular el límite $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ldots + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n-1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\log(n)}$.

Solución: Como $\{\log(n)\}_{n=2}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente con límite $+\infty$, se puede aplicar el criterio de Stolz. El límite buscado es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\pi/(n+1)\right)}{\log(n+1) - \log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\pi/(n+1)\right)}{\log\left((n+1)/n\right)} = \pi\,.$$

3.- Estudiar, en función de x, el carácter de la serie $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}\sqrt{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)}$.

Solución: Si $x=0$ se trata de la serie idénticamente nula $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ que, obviamente, es convergente.

Si $x \neq 0$, estudiaremos la convergencia absoluta de la serie aplicando el criterio del cociente. En efecto, si escribimos

$$a_n = \frac{|x|^n}{(2n)!}\sqrt{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)} > 0\,,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}\sqrt{(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)(2n)(2n+1)(2n+2)}\,(2n)!}{(2n+2)!\,|x|^n\sqrt{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{(2n+1)(2n+2)\sqrt{n+1}} = 0 < 1\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie converge absolutamente.

4.- Utilizando el teorema de los incrementos finitos (sin calcular $\sqrt{66}$), demostrar que $\dfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \dfrac{1}{8}$.

Solución: Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [64, 66]$. La función f es continua en $[64, 66]$ y derivable en $(64, 66)$. En virtud del teorema de los incrementos finitos de Lagrange, existe $c \in (64, 66)$ tal que

$$\sqrt{66} - 8 = f(66) - f(64) = f'(c)(66-64) = 2f'(c)\,.$$

Para concluir basta observar que $2f'(c) = 1/\sqrt{c}$, y, como $64 < c < 66 < 81$, se tiene que

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{81}} < \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}\,.$$

5.- Sean $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Calcular el límite $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(a^x - 1)\log(1-x^2)}{\left((1-x^2)^n - 1\right)\operatorname{arcsen}(x)}$.

Solución: De las equivalencias

$$a^x - 1 \sim_0 x\log(a), \quad \log(1-x^2) \sim_0 -x^2, \quad (1-x^2)^n - 1 \sim_0 n(-x^2), \quad \operatorname{arcsen}(x) \sim_0 x\,,$$

se sigue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a^x - 1)\log(1-x^2)}{\left((1-x^2)^n - 1\right)\operatorname{arcsen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\log(a)(-x^2)}{n(-x^2)\,x} = \frac{\log(a)}{n}\,.$$

6.- Sea $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{1-x^4}$, $x \in (-1,1)$. Probar que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(-1,1)$, hallar su desarrollo limitado de orden 4 en $x_0 = 0$ y deducir el valor de $f^{iv)}(0)$.

Solución: La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(-1,1)$ por ser cociente de dos funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(-1,1)$, cuyo denominador no se anula en dicho intervalo.

Para calcular el desarrollo limitado se puede proceder de varias maneras. Una solución es la siguiente: conocidos los desarrollos limitados de e^x y $\dfrac{1}{1-x}$ es sencillo probar que

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4), \qquad \frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + o(x^4) \qquad \text{en } x_0 = 0\,.$$

Puesto que

$$\Big(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4\Big)(1+x^4) = 1 - x^2 + \frac{3}{2}x^4 - x^6 + \frac{1}{2}x^8\,,$$

de la regla para calcular el desarrollo limitado de un producto se sigue que

$$f(x) = e^{-x^2}\,\frac{1}{1-x^4} = 1 - x^2 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \quad \text{en } x_0 = 0\,.$$

Por último, sabemos que para una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ la parte regular de su desarrollo limitado es su polinomio de Taylor, de modo que

$$\frac{f^{iv}(0)}{4!} = \frac{3}{2}, \qquad \text{es decir,} \quad f^{iv}(0) = 36\,.$$

7.- Demostrar que $\left|\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} x^2 \operatorname{sen}^2(e^x)\,dx\right| \le \dfrac{16}{3}\pi^3$.

Solución: Puesto que el módulo de la integral es menor o igual que la integral del módulo del integrando,

$$\left|\int_{-2\pi}^{2\pi} x^2 \operatorname{sen}^2(e^x)\,dx\right| \le \int_{-2\pi}^{2\pi} \left|x^2 \operatorname{sen}^2(e^x)\right|\,dx.$$

Ahora, por ser $|\operatorname{sen}^2(e^x)| \le 1$ para todo $x \in [-2\pi, 2\pi]$ y por la monotonía de la integral, la ltima integral es menor o igual que

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2\pi}^{2\pi} = \frac{16}{3}\pi^3.$$

8.- Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\operatorname{sen}(1/x^2)}{\log(1+x)}$.

Solución: El integrando es continuo en $[1,\infty)$ y, por tanto, localmente integrable. Ademas, el integrando es positivo en $[1,\infty)$. Así pues, podemos utilizar los criterios de comparación para estudiar su convergencia. Comparemos, por ejemplo, con la función $1/x^{3/2}$, cuya integral en $[1,\infty)$ es convergente (por ser $3/2 > 1$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\operatorname{sen}(1/x^2)/\log(1+x)}{1/x^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\,x^{3/2}}{\log(1+x)\,x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log(1+x)} = 0,$$

de lo que se deduce que la integral es convergente.

9.- Sea $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^3+y^9}$, $x, y > 0$. Probar que no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Solución: Esta cuestión se puede resolver de muchas maneras. Damos dos de ellas:

1. Tendiendo a $(0,0)$ por la curva $x = \lambda y^6$ (λ ha de ser forzosamente positivo), se obtiene:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=\lambda y^6}} f(x,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\lambda y^9}{\lambda^3 y^{18} + y^9} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\lambda}{\lambda^3 y^9 + 1} = \lambda.$$

   Entonces no existe el límite.

2. Tendiendo a $(0,0)$ por la curva $x = \lambda y^3$ (λ ha de ser forzosamente positivo), se obtiene:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=\lambda y^3}} f(x,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\lambda y^6}{\lambda^3 y^9 + y^9} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\lambda}{y^3(1+\lambda^3)} = \infty.$$

   Entonces no existe el límite.

10.- Demostrar que la ecuación $z^4 + (3x+2y)z + x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ define implícitamente una función $z = \varphi(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (0,0)$, con $\varphi(0,0) = 1$. Probar que φ no presenta un extemo relativo en $(0,0)$.

Solución: Sea $f(x,y,z) = z^4 + (3x+2y)z + x^2 + 2xy + 3y^2 - 1$. Veamos que f verifica las hipótesis del teorema de la función implícita:

1. f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, 2. $f(0,0,1) = 0$, 3. $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4 \neq 0$.

Por el teorema de las funciones implícitas, existen entornos U de (0,0) en $\mathbb{R}^2$ y V de 1 en $\mathbb{R}$ y una única función $\varphi\colon U \to V$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que para cada $(x,y) \in U$ se tiene que $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, es decir para cada $(x,y) \in U$ el punto $(x,y,\varphi(x,y))$ verifica la ecuación de partida. Además, como $(0,0,1)$ verifica la ecuación, ha de se $\varphi(0,0) = 1$.

Derivando la expresión $z^4 + (3x+2y)z + x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0$ respecto de x se obtiene

$$4\varphi(x,y)^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + 3\varphi(x,y) + (3x+2y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + 2y = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\varphi(0,0) = 1$, si particularizamos en $(0,0)$, la expresión anterior es:

$$4\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) + 3 = 0, \qquad \text{de donde} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = -\frac{3}{4}.$$

Podemos garantizar entonces que φ no posee ningún extremo en el punto $(0,0)$ pues una derivada parcial es no nula en ese punto.

PROBLEMAS (Tiempo: 2:15)

A. **a)** Probar que $p(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 > 0$ si $t \in (0,1)$. *5 ps.*

b) Demostrar la desigualdad $3x < \operatorname{tg}(x) + 2\operatorname{sen}(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *5 ps.*

Solución:

a) Daremos dos soluciones. La más sencilla consiste en factorizar el polinomio: $p(t) = 2(t-1)^2(t+1/2)$. Obviamente si $0 < t < 1$ los factores $(t-1)^2$ y $t + 1/2$ son estrictamente positivos, y se concluye.

La segunda solución consiste en el estudio de la monotonía de la función. Como p es derivable en $\mathbb{R}$ y $p'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$, es claro que $p'(t) < 0$ si $t \in (0,1)$, luego la función es estrictamente decreciente en $[0,1]$. De aquí se sigue que $p(t) > p(1) = 0$ si $t \in (0,1)$.

b) Consideremos la función $f : [0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{tg}(x) + 2\operatorname{sen}(x) - 3x$. Obviamente, f es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $[0, \pi/2)$. Su derivada es igual a

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} + 2\cos(x) - 3 = \frac{1 + 2\cos^3(x) - 3\cos^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

No es difícil darse cuenta de que si $x \in (0, \pi/2)$ entonces $\cos(x) \in (0,1)$ y

$$f'(x) = \frac{p(\cos(x))}{\cos^2(x)} > 0,$$

en virtud del apartado anterior. Por lo tanto, f es estrictamente creciente en $[0, \pi/2)$ y si $x \in (0, \pi/2)$ entonces $f(x) > f(0) = 0$, que es lo que se quería probar.

B. **a)** ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ converge $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^\alpha(1-x)}}\,dx$? *8 ps.*

b) Si $\alpha < 2$, usando la regla de integración por partes, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la siguiente relación de recurrencia: $(2n - \alpha + 1)I_n = (2n - \alpha)I_{n-1}$. *8 ps.*

c) Sea $\alpha < 2$. Estudiar el carácter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. *4 ps.*

d) Sea $\alpha < 2$. Estudiar la monotonía de la sucesión $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ y demostrar que es convergente. *5 ps.*

Solución:

a) La función integrando es continua en el intervalo abierto (0,1), luego localmente integrable en el mismo, pero no está definida ni en $x = 0$ ni en $x = 1$. Además es no negativa en el intervalo. Descompondremos la integral en dos para estudiar su comportamiento en cada uno de los extremos del intervalo:

$$\int_0^c \frac{x^n}{\sqrt{x^\alpha(1-x)}}\,dx + \int_c^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^\alpha(1-x)}}\,dx, \quad \text{con } c \in (0,1)\,.$$

Compararemos la primera integral con $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{x^{\alpha/2-n}}\,dx$. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{\sqrt{x^\alpha(1-x)}}\, x^{\alpha/2-n} = 1$$

por lo que ambas integrales tienen el mismo carácter, y puesto que esta última es convergente si, y solo si, $\alpha/2 - n < 1$, o lo que es igual, si $\alpha < 2(n+1)$ también lo será la primera de las dos en que hemos descompuesto la integral propuesta. En particular, si $\alpha < 2$ la integral será convergente para todo $n \in \mathbb{N}$. Para estudiar el segundo de los dos sumandos, compararemos con

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)}}\,dx = \int_c^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

que es convergente por ser el exponente de $(1-x)$ menor que 1. Por un proceso análogo al anterior llegamos a que el segundo sumando es convergente cualquiera que sea α. En consecuencia, la integral propuesta converge si, y solo si, $\alpha < 2(n+1)$.

b) Si $\alpha < 2$ la integral es convergente para todo $n \in \mathbb{N}$. Integremos por partes I_n haciendo

$$u = x^{n-\frac{\alpha}{2}}\,, dv = \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$$

con lo cual $du = \left(n - \frac{\alpha}{2}\right)x^{n-\frac{\alpha}{2}-1}$ y $v = -2\sqrt{(1-x)}$ y resulta:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^\alpha(1-x)}}\,dx = -2x^{n-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(1-x)}\Big|_0^1 + 2(n-\frac{\alpha}{2})\int_0^1 x^{n-1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(1-x)}\,dx$$

Como $\alpha < 2$ y n vale por lo menos 1, $-2x^{n-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(1-x)}\Big|_0^1 = 0$ y queda

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^\alpha(1-x)}}\,dx = (2n-\alpha)\int_0^1 x^{n-1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(1-x)}\,dx = (2n-\alpha)\int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x)}{\sqrt{x^\alpha(1-x)}}\,dx$$

y de aquí $I_n = (2n-\alpha)(I_{n-1} - I_n)$, de donde, despejando I_n, sale la relación pedida.

c) Como la función subintegral es estrictamente positiva en (0,1), $I_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De la relacin obtenida en el apartado anterior resulta que

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+2-\alpha}{2n+3-\alpha}\,.$$

El límite de este cociente cuando $n \to \infty$ es 1, así que el criterio del cociente no nos dice nada acerca del carácter de la serie. El criterio de Raabe, sin embargo, nos da que la serie diverge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{I_{n+1}}{I_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3-\alpha} = \frac{1}{2} < 1.$$

Nota: De hecho, se trata de una serie hipergeométrica.

d) Dado que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{2n+2-\alpha}{2n+3-\alpha} < 1$ la sucesión $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ es monótona decreciente. Puesto que sus términos son positivos, está acotada inferiormente por 0. Luego es convergente.

C. Sean $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, $a > 0$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y,z) = xyz + a^4\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big).$$

Calcular los extremos relativos de la función f en A. *15 ps.*

Solución: Resolvamos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz - \dfrac{a^4}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz - \dfrac{a^4}{y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy - \dfrac{a^4}{z^2} = 0. \end{array}\right. \qquad \text{que es equivalente a} \qquad \left\{\begin{array}{l} x^2yz = a^4 \\ xy^2z = a^4 \\ xyz^2 = a^4. \end{array}\right.$$

De las dos primeras ecuaciones de este último sistema se obtiene $x = y$ y de la primera y la tercera se obtiene $x = z$. Sustituyendo por ejemplo en la primera de ellas obtenemos $x^4 = a^4$ y como $a > 0$, la única solución del sistema es (a, a, a). Estudiemos la matriz hessiana $H(a, a, a)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2a^4}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2a^4}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2a^4}{z^3}. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x.$$

Entonces

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2a^4}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2a^4}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2a^4}{z^3} \end{pmatrix} \qquad \text{y en el punto } (a,a,a) \text{ se tiene:} \quad H(a,a,a) = \begin{pmatrix} 2a & a & a \\ a & 2a & a \\ a & a & 2a \end{pmatrix}$$

Los deteminantes parciales son:

$$\Delta_1 = 2a > 0\,,$$
$$\Delta_2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 > 0\,,$$
$$\Delta_3 = 8a^3 + a^3 + a^3 - 2a^3 - 2a^3 - 2a^3 = 4a^3 > 0\,.$$

Por lo anterior, la forma cuadrática asociada es definida positiva, luego en el punto (a, a, a) se alcanza un mínimo relativo estricto.

D. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $g(0) = 1$. Se considera la función $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \Big(\int_x^y g(t)\,dt, \int_y^{x^2} g(t)\,dt \Big)\,.$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$, y determinar su matriz jacobiana en cualquier punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *6 ps.*

b) Demostrar que $\boldsymbol{F}$ tiene inversa de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(0, 0)$. Si denotamos por $\boldsymbol{G}$ la inversa local de $\boldsymbol{F}$ definida en un entorno de $\boldsymbol{F}(0, 0) = (0, 0)$, determinar la matriz jacobiana de $\boldsymbol{G}$ en el punto $(0, 0)$. *4 ps.*

Solución:

a) Por ser g continua y los extremos de integracin de las integrales que definen cada una de las componentes F_1 y F_2 de $\boldsymbol{F}$ derivables respecto de x e y, del teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena se deduce que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = -g(x), \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = g(y),$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = g(x^2)2x, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = -g(y).$$

Así pues, la matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\boldsymbol{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} -g(x) & g(y) \\ g(x^2)2x & -g(y) \end{pmatrix}\,.$$

Además, puesto que cada una de las derivadas parciales anteriores son continuas (por serlo g), la función $\boldsymbol{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$.

b) Puesto que $g(0) = 1$, la matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en $(0, 0)$ es

$$\boldsymbol{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es igual a 1; en virtud del teorema de la función inversa, $\boldsymbol{F}$ tiene inversa en un entorno de $(0, 0)$. Dicha inversa $\boldsymbol{G}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ por serlo $\boldsymbol{F}$ y la matriz jacobiana de $\boldsymbol{G}$ en el punto $\boldsymbol{F}(0, 0) = (0, 0)$ es la inversa de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en $(0, 0)$, es decir,

$$\boldsymbol{G}'(0,0) = \big(\boldsymbol{F}'(0,0)\big)^{-1} = \frac{\operatorname{Adj}^T(\boldsymbol{F}'(0,0))}{\det(\boldsymbol{F}'(0,0))} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde $\operatorname{Adj}^T(\boldsymbol{F}'(0,0))$ representa la matriz adjunta traspuesta de $\boldsymbol{F}'(0,0)$.

Soluciones del examen realizado el 5 de Septiembre de 2003

CUESTIONES (Tiempo 2:00; 4 puntos cada cuestión)

1.- Sea $\alpha > 0$. Calcular el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\cos\Big(\frac{1}{\log(n)}\Big)\Big)^{n^\alpha}$.

Solución: Sabemos que

$$n^\alpha \log\Big(\cos\Big(\frac{1}{\log n}\Big)\Big) \sim n^\alpha\Big(\cos\Big(\frac{1}{\log n}\Big)-1\Big) \sim -\frac{n^\alpha}{2(\log n)^2} = -\frac{(n^{\alpha/2})^2}{2(\log n)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{n^{\alpha/2}}{\log n}\right)^2.$$

Se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \log\Big(\cos\Big(\frac{1}{\log n}\Big)\Big) = -\infty, \qquad \text{y por tanto} \quad \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{\log n}\right)^{n^\alpha} = 0.$$

2.- Sea $p > 0$. Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}\log\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$.

Solución: De las equivalencias $\dfrac{1}{\sqrt{n^p+1}} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ y $\log\dfrac{n+1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ se deduce que $\dfrac{1}{\sqrt{n^p+1}}\log\dfrac{n+1}{n} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$.
Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$ es convergente para $p > 0$, usando el criterio de comparación para series de términos positivos, se deduce que la nuestra es convergente.

3.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(2) < f(5) < f(3)$. Probar que f no puede ser inyectiva.

Solución: Como $f(5) \in (f(2), f(3))$, la propiedad de Darboux nos asegura que existe $x_0 \in (2,3)$ tal que $f(x_0) = f(5)$, luego f no es inyectiva.

4.- Sea $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^3+2x+2, & \text{si } -2 \le x < 0, \\ x^2-3x+2, & \text{si } 0 \le x \le 2. \end{cases}$ Determinar el máximo y el mínimo absoluto de f en $[-2,2]$.

Solución: No es difícil comprobar que f es una función continua en $[-2,2]$ y derivable en $[-2,0)\cup(0,2]$. Además,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+2, & \text{si } -2 \le x < 0, \\ 2x-3, & \text{si } 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Del estudio del signo de f' se deduce que f es creciente en $[-2,0)$, decreciente en $(0,3/2)$ y creciente en $(3/2,2]$. Por tanto, puede alcanzar el máximo absoluto en 0 y en 2; evaluando, $f(0) = 2$, $f(2) = 0$, se observa que el máximo absoluto de f se alcanza en $x = 0$ y vale 2. De manera análoga, puede alcanzar el mínimo absoluto en -2 y en $3/2$; evaluando, $f(-2) = -10$, $f(3/2) = -1/4$, se observa que el mínimo absoluto de f se alcanza en $x = -2$ y vale -10.

5.- Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} g(t)\,dt$. Probar que existe un punto $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Solución: Del teorema fundamental del cálculo integral se sigue que f es derivable en $[0,1]$. Como $f(0) = 0 = f(1)$, basta aplicar el teorema de Rolle para concluir.

6.- Hallar el desarrollo limitado de orden 5 en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = (x-1)\operatorname{sen}(x)$.

Solución: Puede hacerse derivando cinco veces la función y evauando en el cero las derivadas obtenidas para calcular el polinomio de Taylor correspondiente, pero resulta más rápido y sencillo hacer uso del desarrollo limitado de la función seno: $\operatorname{sen}(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + o(x^5)$ en $x_0 = 0$. De este modo, usando la fórmula para el desarrollo limitado de un producto, como

$$(x-1)\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\Big) = -x + x^2 + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{5!},$$

tenemos que la respuesta buscada es

$$f(x) = (x-1)\operatorname{sen}(x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad \text{en } x_0 = 0.$$

7.- Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{2x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{x^3}$.

Solución: Realizando el cálculo directo del límite del numerador y denominador se constata que nos enfrentamos a una indeterminación del tipo $0/0$:

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{2x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt = \int_0^0 \operatorname{sen}(t^2)\, dt = 0\,; \qquad \lim_{x\to 0} x^3 = 0\,.$$

Puesto que el integrando $t \mapsto \operatorname{sen}(t^2)$ es continuo para todo $t \in \mathbb{R}$ y los extremos de integración, $2x$ y 0, son funciones derivables, por el teorema fundamental del cálculo, la integral que aparece en el numerador es una función derivable y su derivada es

$$\left(\int_0^{2x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt\right)' = \operatorname{sen}((2x)^2)\cdot(2x)' - \operatorname{sen}(0^2)\cdot(0)' = \operatorname{sen}(4x^2)\cdot 2.$$

Por otro lado, también el denominador x^3 es derivable y su derivada, $3x^2$, no se anula en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Podemos entonces aplicar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{2x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt\right)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x^2)\cdot 2}{3x^2} = \frac{8}{3}.$$

El último límite se ha calculado usando la equivalencia: $\operatorname{sen}(4x^2) \sim 4x^2$ cuando $x \to 0$.

8.- Estudiar el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}\, dx$.

Solución: El integrando $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}$ es una función continua en $(0,\infty)$ y, por tanto, localmente integrable en dicho intervalo. Gracias a la aditividad de la integral respecto al intervalo, la integral en $(0,\infty)$ puede escribirse como la suma de las integrales en los intervalos $(0,1]$ y $[1,\infty)$:

$$\int_{\to 0}^{\to\infty} f(x)\, dx = \int_{\to 0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{\to\infty} f(x)\, dx.$$

Estudiemos el comportamiento de la primera integral en el extremo de integración $x = 0$. Puesto que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2x)^2}{x^2} = 4,$$

podemos prolongar el integrando f por continuidad al punto $x = 0$. Llamemos f^* a dicha prolongación, esto es,

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,1], \\ 4, & x = 0. \end{cases}$$

Tenemos entonces que la primera integral coincide con la integral de Riemann de la función continua f^* en el intervalo compacto $[0,1]$ y es, por tanto, convergente.

La segunda integral es impropia porque el intervalo de integración $[1,\infty)$ no es acotado. El integrando es positivo y, por el criterio de comparación, la integral es convergente, puesto que $\lim_{x\to\infty} x^{3/2} f(x) = 0$. La integral original, al ser suma de dos integrales convergentes, también es convergente.

9.- Sea f una función real de clase $\mathcal{C}^1$ en $(0,\infty)$. Probar que la función $\phi(x,y) = x^n f(y/x) + y^n f(x/y)$ verifica la ecuación $x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = n\phi(x,y), \quad x,y>0.$

Solución: Derivando respecto de x e y teniendo en cuenta la regla de la cadena resulta:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = nx^{n-1} f(\frac{y}{x}) + x^n f'(\frac{y}{x})\frac{-y}{x^2} + y^n f'(\frac{x}{y})\frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = x^n f'(\frac{y}{x})\frac{1}{x} + ny^{n-1} f(\frac{x}{y}) + y^n f'(\frac{x}{y})\frac{-x}{y^2}.$$

Multiplicando por x la primera ecuación, por y la segunda, y sumando, resulta la expresión pedida.

10.- Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y) = (x^2+y^2-4)^2$ en la bola abierta $B(\mathbf{0},1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.

Solución: La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en B. Derivando respecto de x y respecto de y, e igualando a cero las derivadas primeras, se obtiene el sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x^2+y^2-4)2x = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x^2+y^2-4)2y = 0.$$

Las soluciones son los puntos (x, y) que verifican $x^2 + y^2 - 4 = 0$, que son los de una circunferencia de centro 0 y radio 2, además del punto $(0, 0)$. El único punto dentro de la bola abierta es el $(0, 0)$, que pasamos a estudiar. Calculando las derivadas segundas y evaluándolas en el punto $(0, 0)$ la matriz hessiana resulta ser

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

La forma cuadrática asociada es definida negativa por lo que el punto $(0, 0)$ corresponde a un máximo relativo.

PROBLEMAS (Tiempo: 2:30)

A. Sea $p > 0$. Se considera una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $a_1 > \sqrt{p}$, tal que $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{p}{a_n}\Big)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Estudiando la función $f(x) = \dfrac{1}{2}\Big(x + \dfrac{p}{x}\Big)$, demostrar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente. *10 ps.*

b) Probar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente y calcular su límite. *5 ps.*

Solución:

a) La función $f(x) = \dfrac{1}{2}\Big(x + \dfrac{p}{x}\Big)$ está definida para todo $x \neq 0$. En la semirrecta $(0, \infty)$ resulta ser decreciente en $(0, \sqrt{p})$ y creciente en $(\sqrt{p}, \infty)$, como se comprueba inmediatamente al ver el signo de su derivada,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{p}{x^2}\Big) = \frac{x^2 - p}{2x^2}.$$

Por tanto, el punto $x = \sqrt{p}$ es un mínimo relativo que también lo es absoluto en $x > 0$. Como $f(\sqrt{p}) = \sqrt{p}$, se deduce que $f(x) \geq \sqrt{p}$ para todo $x > 0$.

Ahora es sencillo probar gracias al principio de inducción que $a_n > 0$ para todo n, y en consecuencia, puesto que $a_n = f(a_{n-1})$, $a_n \geq \sqrt{p}$. La sucesión es decreciente,puesto que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{p}{a_n}\Big) - a_n = \frac{p - {a_n}^2}{2a_n} \leq 0.$$

b) Como la sucesión es decreciente, y también acotada inferiormente por $\sqrt{p}$, es convergente. Su límite es $\sqrt{p}$: en efecto, si llamamos ℓ al límite de la sucesión, dado que $a_n \geq \sqrt{p}$ para todo n, se deduce que $\ell \geq \sqrt{p} > 0$. Haciendo tender n hacia infinito en la ecuación de recurrencia que define la sucesión, se tiene que

$$\ell = \frac{1}{2}\Big(\ell + \frac{p}{\ell}\Big).$$

La única solución positiva de esta ecuación es $\ell = \sqrt{p}$.

B. Dada la función $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, $\alpha > 0$, se pide:

a) Demostrar que existe un único punto donde se alcanza el máximo absoluto en $[0, \infty)$ y hallar su valor en función de α. *8 ps.*

b) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!\,n} f_n(x_n)$ es convergente. *7 ps.*

Solución:

a) La función f_α es continua en $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$. Su derivada es

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} - x^\alpha e^{-x} = x^{\alpha-1} e^{-x}(\alpha - x), \quad x \in (0, \infty).$$

Es claro que $f'_\alpha(x) = 0$ si y sólo si $x = \alpha$, que $f'_\alpha(x) > 0$ si $x < \alpha$, y que $f'_\alpha(x) < 0$ si $x > \alpha$. De aquí se deduce que f_α es estrictamente creciente en $[0, \alpha)$, estrictamente decreciente en (α, ∞), y alcanza, por tanto, el máximo absoluto en $x_\alpha = \alpha$ que vale $M_\alpha = f_\alpha(\alpha) = \alpha^\alpha e^{-\alpha}$.

b) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos. Del apartado anterior se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f_n(x_n) \leq M_n = n^n e^{-n}.$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq \frac{1}{n!\,n} f_n(x_n) \leq \frac{n^n e^{-n}}{n!\,n}.$$

Puesto que se trata de series de términos positivos, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!\, n}$ converge, en virtud del criterio de comparación también lo hará la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, n} f_n(x_n)$.

Ahora bien, usando la fórmula de Stirling, sabemos que $\frac{n^n e^{-n}}{n!\, n} \sim \frac{n^n e^{-n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\, n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, n^{3/2}}$. Dado que este último es el término general de una serie convergente, el problema está concluido.

C. **a)** Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función f dada por $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(xy)/x, & x \neq 0, \\ y, & x = 0. \end{cases}$ *5 ps.*

b) Probar que f es diferenciable en el punto $(0,a)$, para cada $a \in \mathbb{R}$. *10 ps.*

Solución:

a) Para cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0 \neq 0$ existe un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in A$ y A no corta al eje de ordenadas. Por tanto, la restricción de la función f al conjunto A viene dada por la expresión $f_{|A}(x,y) = \operatorname{sen}(xy)/x$, composición y cociente de funciones continuas. Así pues, f es continua en A y, en particular, f es continua en (x_0, y_0).

Estudiemos ahora la continuidad de f en los puntos de la forma $(0, y_0)$, donde $y_0 \in \mathbb{R}$. Para ello consideremos los subconjuntos B_1 y B_2 de $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}, \quad B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\},$$

y calculemos los límites de $f(x,y)$ a lo largo de ambos subconjuntos cuando $(x,y) \to (0, y_0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in B_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\x\neq 0}} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\x\neq 0}} \frac{xy}{x} = y_0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in B_2}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y = y_0.$$

(En el primer límite hemos utilizado la equivalencia: $\operatorname{sen}(xy) \sim xy$ cuando $xy \to 0$.) Puesto que $\mathbb{R}^2 = B_1 \cup B_2$ y los límites anteriores existen y coinciden, existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,y_0)$ y su valor es $y_0 = f(0,y_0)$, es decir, f es continua en $(0,y_0)$.

En definitiva, f es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$. En primer lugar veamos si existen las derivadas parciales de f en el punto $(0,a)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,a) - f(0,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(ha)}{h} - a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ha) - ha}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{ha + \circ((ha)^2) - ha}{h^2} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,a) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,a+k) - f(0,a)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{a+k-a}{k} = 1.$$

(En el primer límite hemos utilizado el desarrollo limitado de la función seno en cero.) Es claro entonces que la función f es derivable en $\mathbb{R}^2$ y que su derivada parcial respecto de y es

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \cos(xy), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Se comprueba sin dificultad que $\partial f/\partial y$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y, puesto que una función derivable en $\mathbb{R}^2$ con una de sus parciales continua es diferenciable, tenemos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, en particular, f es diferenciable en los puntos de la forma $(0,a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Nota: por supuesto, después del cálculo de las derivadas parciales de f en $(0,a)$, este apartado se puede resolver también usando la definición de función diferenciable.

D. **a)** Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + z^3 + u^3 = 0 \\ z^2 + u^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

define funciones implícitas $z = z(x,y)$, $u = u(x,y)$, en un entorno del punto $(1,1)$, con $z(1,1) = -1$, $u(1,1) = 1$. *5 ps.*

b) Demostrar que la aplicación $\boldsymbol{\varphi}(x,y) = \big(z(x,y), u(x,y)\big)$ es localmente invertible en un entorno de $(1,1)$. *10 ps.*

Solución: Sea $f(x,y,z,u) = (f_1(x,y,z,u), f_2(x,y,z,u)) = (x^3 - y^3 + z^3 + u^3, z^2 + u^2 - 2xy)$.

1) f es de clase C^∞

2) $f(1,1,-1,1) = (0,0)$

3) $\det \dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(z,u)}(1,1,-1,1) = \begin{vmatrix} 3z^2 & 3u^2 \\ 2z & 2u \end{vmatrix}_{(1,1,-1,1)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$

Por el teorema de las funciones implícitas, existen entornos U de (1,1) y V de $(-1,1)$ y una única función $\varphi(x,y) = (z(x,y), u(x,y))$ de U en V, tal que

$$f(x,y,z(x,y),u(x,y)) = (0,0).$$

Además φ es de clase C^∞ en U, por serlo f. (Obsérvese además que $z(1,1) = -1$ y $u(1,1) = 1$ puesto que (1,1,-1,1) satisface el sistema). Derivando el sistema (con z y u como funciones de (x,y)) se obtienen los dos sistemas:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad -3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 3u^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$-2y + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad -2x + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 2u\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

En el punto $(1,1)$

$$3 + 3\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) + 3\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0 \qquad -3 + 3\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) + 3\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 0$$

$$-2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0 \qquad -2 - 2\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0.$$

Resolviendo los dos sistemas queda:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 1,$$

de modo que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) & \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Se verifican las hipótesis del teorema de la función inversa luego también las conclusiones de éste.

Soluciones del examen realizado el 28 de Enero de 2004

CUESTIONES (Tiempo 1:30; 5 puntos cada cuestión)

1.- Se supone que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ son convergentes. ¿Qué se puede decir de $\lim_{n\to\infty} x_n$?

Solución: Debe ser $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. En efecto, razonemos por reducción al absurdo:

Si fuese $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n > 0$ se tendría, en primer lugar, que $x_n > 0$ para n mayor que un cierto n_0. Así pues, excepto una cantidad finita, todos los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ serían positivos. Después, aplicando el criterio de comparación (modalidad Pringsheim), y dado que $\lim_{n\to\infty} n\,\frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n = \ell > 0$, se deduciría que la serie tiene el mismo carácter que la armónica, es decir, no podría ser convergente.

Si fuese $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n < 0$ se razona igual con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x_n}{n}$, que tiene el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.

2.- Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/\sqrt{1}) + \operatorname{tg}(1/\sqrt{2}) + \ldots + \operatorname{tg}(1/\sqrt{n-1}) + \operatorname{tg}(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Solución: Pongamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}\left(1/\sqrt{k}\right)$ y $b_n = \sqrt{n}$. Puesto que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ crece hacia ∞ es lícito aplicar el criterio de Stolz para resolver la indeterminación que se presenta inicialmente:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\operatorname{tg}\left(1/\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \sim \frac{1/\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2} == \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,.$$

De la equivalencia anterior es evidente entonces que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 2$, por lo que también debe converger hacia 2 la sucesión propuesta $\left\{a_n/b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

3.- Se consideran una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y un número natural n impar tales que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. Calcular $\lim_{x\to\infty}(x^n+f(x))$ y $\lim_{x\to-\infty}(x^n+f(x))$, y deducir que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ con $f(x_0) = (-x_0)^n$.

Solución: Sea $g(x) = x^n + f(x)$. Escribiendo $g(x) = x^n\left(1 + f(x)/x^n\right)$ para $x \neq 0$, es obvio que

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x^n\left(1 + f(x)/x^n\right) = \infty,$$

ya que

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1 + f(x)/x^n\right) = 1 > 0.$$

De la misma forma se deduce que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ pues, por ser n impar, $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.

Por ser g continua, la propiedad de Darboux asegura que su imagen es un intervalo, y los valores de los límites anteriores muestran que $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. En particular, ha de existir $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) = 0$, es decir, $f(x_0) = -x_0^n = (-x_0)^n$ (la última igualdad se debe de nuevo a que n es impar).

4.- Una cierta función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad de que $|f''(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ si $x > 0$. Además, se sabe que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$. Obtener un valor aproximado para $f(3/2)$ y estimar el error cometido.

Solución: El teorema de Taylor asegura que para $x \in (0,\infty)$ existe un punto ξ entre 1 y x tal que

$$f(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-1)^2 = 1 + 2\,(x-1) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-1)^2\,.$$

Esto sugiere tomar, para x próximo a 1, $g(x) = 1 + 2\,(x-1)$ como valor aproximado de $f(x)$, con lo que el error cometido es

$$\left|f(x) - g(x)\right| = \frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|(x-1)^2.$$

En particular, para $x = 3/2$, $g(x) = 1 + 2\,(3/2 - 1) = 2$ y el error cometido se puede acotar por

$$\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|(3/2-1)^2 = \frac{1}{8}\left|f''(\xi)\right| \leq \frac{1}{8}\,\frac{1}{1+\xi^2} \leq \frac{1}{8}\,\frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{16}\,,$$

ya que $1 \leq \xi \leq 3/2$.

5.- Si $f(x) = \int_{x^2}^{2x} \sqrt{1+t^2}\, dt$, y $g(x) = e^x$, probar que la función compuesta $h = f \circ g$ es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular $h'(0)$.

Solución: Puesto que la función $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ es continua en $\mathbb{R}$, el teorema fundamental del cálculo, junto con la regla de la cadena garantizan que $f(x) = \int_0^{2x} \sqrt{1+t^2}\, dt - \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt$ es derivable y que

$$f'(x) = \sqrt{1+(2\,x)^2}\,2 - \sqrt{1+(x^2)^2}\,2\,x = 2\sqrt{1+4\,x^2} - 2\,x\sqrt{1+x^4}\,.$$

Es de sobra conocido que la función exponencial es derivable y que coincide con su derivada, de manera que, aplicando de nuevo la regla de la cadena, se deduce la derivabilidad de $h = f \circ g$ en todo $\mathbb{R}$. Además

$$h'(0) = f'(g(0))\,g'(0) = \left(2\sqrt{1+4\,(e^0)^2} - 2\,e^0\sqrt{1+(e^0)^4}\right)e^0 = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\,.$$

Otra solución puede ser la siguiente. Observemos que

$$h(x) = f((g(x)) = \int_{e^{2x}}^{2e^x} \sqrt{1+t^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como en el párrafo anterior, la combinación del teorema fundamental del cálculo y de la regla de la cadena nos permite concluir que h es derivable en $\mathbb{R}$ y que su derivada vale

$$h'(x) = 2e^x\sqrt{1+4e^{2x}} - 2e^{2x}\sqrt{1+e^{4x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $h'(0) = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$.

6.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \begin{cases} (x^4+y^4)/x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ ¿Es f continua en $(0,0)$?

Solución: No. A pesar de que el límite a través de cada recta que pasa por $(0,0)$ existe y vale $0 = f(0,0)$, a través de otros subespacios no sucede lo mismo: por ejemplo, si $B = \{(x,y) : x = y^4\}$, el límite de f en $(0,0)$ a lo largo de B es

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=y^4}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^{16}+y^4}{y^4} = \lim_{y\to 0}(y^{12}+1) = 1 \neq 0\,.$$

7.- Estudiar si la función $f(x,y) = y^3 + \operatorname{sen}(xy)$ presenta un extremo relativo en el punto $(0,0)$.

Solución: La función f no presenta ningún extremo relativo en $(0,0)$. La forma más sencilla de probarlo es observar que en cualquier entorno del origen hay puntos de la forma $(0,y)$ (dígase, con $|y| < \varepsilon$) y para ellos se tiene que:

∗ si $y > 0$, entonces $f(0,y) = y^3 > 0 = f(0,0)$,
∗ si $y < 0$, entonces $f(0,y) = y^3 < 0 = f(0,0)$.

Nota: No obstante se puede hacer un estudio sistemático, como sugiere la teoría de extremos relativos:

1. $\nabla f(0,0) = \big(y\cos(xy), 3\,y^2 + x\cos(xy)\big)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = (0,0)$, es decir, $(0,0)$ es un punto crítico de f.
2. $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -y^2\operatorname{sen}(xy) & \cos(xy) - xy\cos(xy) \\ \cos(xy) - xy\cos(xy) & 6\,y - x^2\operatorname{sen}(xy) \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matriz cuyos autovalores son 1 y -1, por lo que la forma cuadrática asociada es indefinida, y el punto crítico $(0,0)$ es en realidad un punto de silla.

8.- Probar que la aplicación $f(x,y) = (x^2 - \operatorname{sen}(x) - y, y - e^x)$ tiene inversa diferenciable en un entorno del punto $(0,0)$. ¿Cuánto vale el jacobiano de f^{-1} en el punto $f(0,0)$?

Solución: La aplicación f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, pues las funciones polinómicas, trigonométricas y exponencial son indefinidamente derivables en $\mathbb{R}$. La matriz jacobiana de f en $(0,0)$ es

$$\begin{pmatrix} 2\,x - \cos(x) & -1 \\ -e^x & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $-2 \neq 0$; por tanto, la respuesta a la primera parte es consecuencia directa del teorema de las funciones inversas.

Por otro lado (puesto que $(f^{-1})'(f(\boldsymbol{x})) \circ f'(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$) se tiene que $\mathcal{J}f^{-1}(f(\mathbf{0}))\,\mathcal{J}f(\mathbf{0}) = 1$, de donde se sigue que $\mathcal{J}f^{-1}(f(\mathbf{0})) = \dfrac{1}{\mathcal{J}f(\mathbf{0})} = \dfrac{-1}{2}$.

PROBLEMAS (Tiempo: 2:15)

A. Sea $\alpha > 1$. Dado un valor $x_1 > 0$ se define por recurrencia la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante la relación

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\alpha + x_n^2}, \quad n \geq 1.$$

a) Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de términos positivos y monótona. *6 ps.*

b) Estudiar la convergencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y, en caso de converger, calcular el valor del límite. *5 ps.*

c) Determinar el carácter de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{\alpha + x_n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$. *9 ps.*

Solución:

a) Supuesto que $x_n > 0$, y dado que $\alpha + x_n^2 \geq \alpha > 0$, también ha de ser $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\alpha + x_n^2} > 0$. Habida cuenta de que $x_1 > 0$ por hipótesis, el principio de inducción garantiza que $x_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Después, de la relación de recurrencia se sigue que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\alpha + x_n^2} < \frac{1}{\alpha} < 1\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

lo que prueba que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente.

b) La convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ está garantizada por ser monótona decreciente y acotada inferiormente (por 0). En cuanto a su límite, que denotaremos por ℓ, haciendo uso de nuevo de la fórmula de recurrencia debe suceder que

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha + x_n^2} = \frac{\ell}{\alpha + \ell^2}\,.$$

Puesto que $\alpha + \ell^2 \geq \alpha > 1$, la ecuación $\ell = \ell/(\alpha + \ell^2)$ sólo admite la solución $\ell = 0$; éste ha de ser, necesariamente, el límite de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

c) Las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n^2}{\alpha + x_n^2}$ son de términos positivos, por lo que es lícito aplicar los criterios de comparación en el estudio de su convergencia: En cuanto a la primera,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha + x_n^2} = \frac{1}{\alpha} < 1\,,$$

y el criterio del cociente garantiza su convergencia. Para la segunda, si ponemos $a_n = \dfrac{x_n^2}{\alpha + x_n^2}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + x_n^2}{\alpha + x_{n+1}^2}\,\frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = \frac{1}{\alpha^2} < 1\,,$$

y de nuevo el criterio del cociente asegura su convergencia (también se podría haber comparado con la primera serie, ya que $a_n = x_n x_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n/x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 0$, o bien aplicar los criterios de Abel o Dirichlet).

Finalmente, puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n x_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente (se puede aplicar también el criterio de Leibnitz, ya que se trata de una serie alternada y la sucesión de valores absolutos de los términos decrece hacia 0, según se ha probado en los dos apartados anteriores).

B. Dado el número real $a > 0$, se considera la función f dada por $f(x) = e^x - \cos(x) - \log(1 + ax)$.

a) Calcular el desarrollo limitado de f de orden 4 en $x_0 = 0$. *4 ps.*

b) ¿Para qué valores de los parámetros a y b el límite $\lim_{x\to 0} x^b f(x)$ existe y es finito? *6 ps.*

c) Determinar para qué valores del parámetro a es convergente la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^{5/2} e^{x^2}}$. *10 ps.*

Solución:

a) Teniendo en cuenta los siguientes desarrollos de Taylor en $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \qquad -\cos(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$
$$-\log(1+ax) = -a\,x + \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^3}{3}x^3 + \frac{a^4}{4}x^4 + o(x^4),$$

es inmediato que

$$f(x) = (1-a)\,x + \Big(1 + \frac{a^2}{2}\Big)x^2 + \Big(\frac{1}{6} - \frac{a^3}{3}\Big)x^3 + \frac{a^4}{4}x^4 + o(x^4) \qquad \text{en } \; x_0 = 0\,.$$

b) Recordemos que el comportamiento en x_0 de una función viene determinado por el primer término no nulo de sus desarrollos limitados en dicho punto. Según lo obtenido en el apartado anterior se deduce que:

1. Si $a \neq 1$, para que el límite
$$\lim_{x\to 0} x^b f(x) = \lim_{x\to 0}\big(x^b(1-a)\,x + x^b o(x)\big) = \lim_{x\to 0}\big((1-a)\,x^{b+1} + o(x^{b+1})\big) = \lim_{x\to 0}(1-a)\,x^{b+1}$$
exista y sea finito, necesariamente tiene que ser $b+1 \geq 0$, es decir $b \geq -1$ (concretamente, el límite es $1-a$ si $b=-1$ y 0 si $b > -1$).
2. Si $a = 1$, para que que exista y sea finito este límite
$$\lim_{x\to 0} x^b f(x) = \lim_{x\to 0}\Big(x^b\Big(1 + \frac{a^2}{2}\Big)x^2 + x^b o(x^2)\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{3}{2}x^{b+2} + o(x^{b+2})\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}x^{b+2}$$
debe suceder obligatoriamente que $b+2 \geq 0$, esto es, $b \geq -2$ (el límite es $3/2$ si $b=-2$ y 0 si $b > -2$).

c) A la vista del intervalo de integración y del integrando se hace necesario estudiar por separado el comportamiento asintótico de esta función cuando x tiende a 0 y cuando x tiende a ∞.

Comencemos por lo segundo. Resulta que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x^2}} - \lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{e^{x^2}} - \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+ax)}{e^{x^2}} = 0\,,$$

así que la función $\dfrac{f(x)}{e^{x^2}}$, que es continua en $\mathbb{R}$, está acotada en cualquier intervalo de la forma $[\gamma,\infty)$ con $\gamma > 0$. Por ejemplo, si M es tal que

$$\frac{|f(x)|}{e^{x^2}} \leq M \quad \text{para cada } \; x \geq 1$$

entonces

$$\frac{|f(x)|}{x^{5/2}e^{x^2}} \leq \frac{M}{x^{5/2}} \quad \text{para cada } \; x \geq 1$$

y puesto que la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{M}{x^{5/2}}\,dx$ es convergente (ver la tabla de funciones test), en virtud del criterio de comparación, también lo es $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{5/2}e^{x^2}}\,dx$.

Para el estudio de $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{5/2}e^{x^2}}\,dx$ haremos uso de lo obtenido en el apartado anterior:

1. Si $a \neq 1$, se tiene que el límite
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \frac{f(x)}{x^{5/2}e^{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha - 5/2} f(x)$$
es finito sólo si $\alpha - 5/2 + 1 \geq 0$, es decir $\alpha \geq 3/2$, de hecho, para $\alpha = 3/2$ el límite vale $1 - a \neq 0$. La existencia de este límite garantiza, primero, que el integrando tiene signo constante en un intervalo de la forma $(0,\varepsilon)$, por lo que es aplicable el criterio de comparación, que afirma que las integrales impropias $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{5/2}e^{x^2}}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ tienen el mismo carácter, es decir, no son convergentes.
2. Si $a = 1$, el límite
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \frac{f(x)}{x^{5/2}e^{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha - 5/2} f(x)$$
es finito si $\alpha - 5/2 + 2 \geq 0$, es decir, $\alpha \geq 1/2$. Razonando como antes, tomando ahora $\alpha = 1/2$, se deduce que las integrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{5/2}e^{x^2}}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ tienen el mismo carácter; puesto que la segunda converge, también lo hace la primera.

Resumiendo, la integral impropia propuesta converge si, y sólo si $a = 1$.

C. Se considera la ecuación $x^6+y^6+xz+yz-\cos(z)=1$.

a) Probar que la ecuación define a z como función implícita $z=f(x,y)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$, en un entorno abierto D del punto $(1,1)$, con $f(1,1)=0$. *5 ps.*

b) Determinar dos vectores linealmente independientes y tangentes al grafo de la función f en el punto $P_0=(1,1,0)$. *15 ps.*

Solución:

a) Consideremos la función $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z)=x^6+y^6+xz+yz-\cos(z)-1.$$

La función F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, $F(1,1,0)=0$ y

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)=\big(x+y+\operatorname{sen}(z)\big)\big|_{(1,1,0)}=2.$$

Entonces del teorema de las funciones implícitas se sigue que existen un entorno abierto $U\subset\mathbb{R}^2$ de $(x_0,y_0)=(1,1)$, un entorno abierto $V\subset\mathbb{R}$ de $z_0=0$, y una función $f:U\to V$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ (por serlo F) tales que $f(1,1)=0$ y

$$F\big(x,y,f(x,y)\big)=0\quad\text{para todo }(x,y)\in U,$$

o, lo que es lo mismo,

$$x^6+y^6+xf(x,y)+yf(x,y)-\cos\big(f(x,y)\big)=1\quad\text{para todo }(x,y)\in U. \tag{1}$$

b) Como se menciona en la observación 1.11 del tema 10, dos vectores linealmente independientes y tangentes al grafo de la función f en el punto $P_0=(1,1,0)$ vienen dados por

$$\Big(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Big)\qquad\text{y}\qquad\Big(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Big).$$

De modo que el problema se reduce al cálculo de las derivadas parciales de f en el punto $(1,1)$.

Derivando los dos términos de la igualdad dada en (1), primero respecto de la variable x y luego respecto de la variable y, se deduce que

$$\begin{aligned}
6x^5+f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\operatorname{sen}\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=0,\\
6y^5+x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+f(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\operatorname{sen}\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=0.
\end{aligned}$$

Al evaluar en $(x,y)=(1,1)$, puesto que $f(1,1)=0$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
6+2\,\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)&=0,\\
6+2\,\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)&=0,
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-3\quad\text{y}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-3.$$

En conclusión, $\boldsymbol{v}_1=(1,0,-3)$ y $\boldsymbol{v}_2=(0,1,-3)$ son dos vectores linealmente independientes y tangentes al grafo de la función f en el punto $P_0=(1,1,0)$.

Nota: Si se pretende utilizar para resolver el problema el plano tangente al grafo de la función f en el punto $P_0=(1,1,0)$, cuya ecuación es

$$\begin{aligned}
z&=0+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,(y-1)\\
&=-3(x-1)-3(y-1),
\end{aligned}\tag{2}$$

es importante no confundir vectores tangentes a la gráfica con puntos que satisfacen la ecuación del plano tangente. Así, por ejemplo, $Q_1=(0,0,6)$ y $Q_2=(0,2,0)$ son dos **puntos** del plano tangente, mientras que $\boldsymbol{u}_1=\overline{P_0Q_1}=(-1,-1,6)$ y $\boldsymbol{u}_2=\overline{P_0Q_2}=(-1,1,0)$ son dos **vectores** (linealmente independientes) tangentes al grafo de la función f en el punto $P_0=(1,1,0)$.

Soluciones del examen realizado en Septiembre de 2004

CUESTIONES (Tiempo 1:30; 6 puntos cada cuestión)

1.- Sean a, b, c tres números reales estrictamente positivos. Dar una condición necesaria y suficiente sobre tales números para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}\Big)$ sea convergente.

Solución: Denotemos por a_n el término general de la serie, es decir,

$$a_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n} = \frac{n - c(an+b)}{(an+b)n} = \frac{(1-ac)n - bc}{(an+b)n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Distinguiremos dos casos:

(i) $ac = 1$. En este caso, $a_n = \dfrac{-bc}{(an+b)n}$, $n \in \mathbb{N}$, y se trata de una serie de términos negativos, por tanto, podemos aplicarle los criterios de comparación. Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente y el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-bcn^2}{(an+b)n} = \frac{-bc}{a}$$

existe y es finito, podemos concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también convergente.

(ii) $ac \neq 1$. Observemos que en este caso no es sencillo, a priori, determinar el signo de los términos de la serie. Sin embargo, vamos a comparar nuestra serie con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ justificando después la validez de la comparación. En efecto, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-ac)n - bc}{an+b} = \frac{1-ac}{a}$$

existe y es no nulo. Al ser el límite distinto de cero, podemos garantizar que a partir de uno determinado, todos los términos de la serie tienen signo constante (el mismo que el del límite) y, en consecuencia, podemos aplicar los criterios de comparación y concluir que las dos series, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tienen el mismo carácer, es decir, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es convergente.

2.- Hallar el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\Big(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.

Solución: Obviamente se trata del típico ejercicio de aplicación del criterio de Stolz. En efecto, si escribimos

$$a_n = \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}, \qquad b_n = n^2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

se trata de calcular un límite del tipo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, donde la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y tiende hacia infinito. Por lo tanto, si el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ existe, también existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, y ambos coinciden. En este caso,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^k/k^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} (k+1)^k/k^{k-1}}{(n+1)^2 - n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n+1}/(n+1)^n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^n \frac{n+2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^n \frac{n+2}{2n+1} = \frac{e}{2}.\end{aligned}$$

3.- Probar que la ecuación $x^4 + 2x - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[0, 2]$.

Solución: Se trata de probar que la función $f(x) = x^4 + 2x - 5$ tiene una única raíz en $[0, 2]$. Es claro que f es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ (es un polinomio). En particular, f es continua en $[0, 2]$ y como $f(0) = -5 < 0 < 15 = f(2)$, en virtud del teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Además, como f es derivable y su derivada es

$$f'(x) = 4x^3 + 2, \quad x \in \mathbb{R},$$

se tiene que $f'(x) \geq 2 > 0$ si $x \in [0,2]$; por lo tanto, f es estrictamente creciente en el intervalo $[0,2]$ y, por consiguiente, f es inyectiva en $[0,2]$, luego sólo puede alcanzar cada valor (en particular el cero) a lo sumo en un punto.

4.- Estudiar si son equivalentes en $x_0 = 0$ las funciones $f(x) = e^{2x} - e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(x)$.

Solución: Puesto que $f(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, lo más sencillo es comprobar si el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ vale 1. Para hacer el cálculo podemos seguir varias vías, todas válidas: aplicar la regla de l'Hopital, aplicar desarrollos limitados o utilizar equivalencias. Aquí se seguirá la tercera opción: puesto que

$$f(x) = e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1) \sim_0 e^x x\,,$$
$$g(x) = \operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)\big(2\cos(x) - 1\big) \sim_0 x\big(2\cos(x) - 1\big)\,,$$

tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(x)}{e^{2x} - e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\big(2\cos(x) - 1\big)}{e^x x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 1}{e^x} = \frac{2\cos(0) - 1}{e^0} = 1\,.$$

Por tanto, $f \sim_0 g$.

5.- Demostrar que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2004} \operatorname{sen}(x) e^{-x^2}\,dx$ es convergente.

Solución: Puesto que la función $f(x) = x^{2004}\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}$ es continua en $(-\infty, \infty)$, es localmente integrable y tiene sentido hablar de su integral impropia en ese intervalo. Por otra parte, como no parece sencillo encontrar una primitiva de f, parece razonable intentar aplicar los criterios de comparación. Pero es claro que la función seno provoca que f no tenga signo constante, lo que nos motiva a estudiar su convergencia absoluta. Acotemos:

$$|f(x)| \leq x^{2004} e^{-x^2} = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ es convergente, entonces es absolutamente convergente la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2004}\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}\,dx$. Notemos que g es par, de modo que basta estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^{\to\infty} g(x)\,dx$.

Para garantizar la convergencia de esta última integral bastaría con hacer referencia a la tabla de funciones test; otra posiblidad es compararla con otra aún más sencilla como, por ejemplo, $\int_1^{\to\infty} 1/x^2\,dx$. En efecto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} x^{2006} e^{-x^2} = 0 \in \mathbb{R}\,.$$

6.- Sea $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\boldsymbol{f}(x,y) = (e^x, 2x - y)$. Si $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = v\,,\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = u\,,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$, calcular las derivadas parciales, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)$, de la función compuesta $h = g \circ f$.

Solución: La respuesta consiste en la simple aplicación de la regla de la cadena. Como es habitual, abusando de la notación y confundiendo variables con componentes, si escribimos $\boldsymbol{f}(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$, entonces $u(x,y) = e^x$ y $v(x,y) = 2x - y$; la regla de derivación citada establece que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\big(\boldsymbol{f}(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}\big(\boldsymbol{f}(x,y)\big)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = v(x,y)\cdot e^x + u(x,y)\cdot 2\,;$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\big(\boldsymbol{f}(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}\big(\boldsymbol{f}(x,y)\big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = v(x,y)\cdot 0 + u(x,y)\cdot(-1)\,.$$

En conclusión

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = (2x - y)e^x + 2e^x = (2x - y + 2)e^x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -e^x\,.$$

7.- Se considera la ecuación $e^z + (x^2 + y^2)z = 1$. Probar que define implícitamente una única función $z = z(x,y)$ en un entorno de $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$.

Solución: La respuesta consiste simplemente en verificar las hipótesis del teorema de las funciones implícitas. En efecto: consideremos la función $f(x,y,z) = e^z + (x^2 + y^2)z - 1$ que está bien definida en todo $\mathbb{R}^3$.

1. La función f es de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$, de hecho es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^3$ pues así son los polinomios (en particular $(x^2 + y^2)z - 1$), la composición de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ (la exponencial lo es), y la suma de tales funciones.

2. $f(0,0,0) = e^0 + 0 - 1 = 0$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = \left(e^z + x^2 + y^2\right)\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = 1 \neq 0$.

El citado teorema garantiza que, en estas condiciones, existen un entorno V de $(x_0, y_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, un entorno U de $z_0 = 0 \in \mathbb{R}$ y una función $\varphi\colon V \to U$ tal que para cada $(x,y) \in V$ se tiene que $z = \varphi(x,y)$ es el único punto de U que satisface $f\big(x, y, \varphi(x,y)\big) = 0$.

PROBLEMAS (Tiempo: 2:15)

1. Para cada $p > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función $f_{n,p}$ definida por $f_{n,p}(x) = \log(p^n x - n - p)$.

a) Determinar el dominio de la función $f_{n,p}$ y probar que la ecuación $f_{n,p}(x) = 0$ tiene un única solución, que denotaremos por $\alpha_{n,p}$, en dicho dominio. Obtener explícitamente dicha solución $\alpha_{n,p}$ en función de los parámetros p y n. *7 ps.*

b) Determinar para qué valores de $p > 0$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,p}$ es convergente y probar que, en ese caso, el correspondiente valor de su suma es $S(p) = \dfrac{p^2 + p - 1}{(p-1)^2}$. *7 ps.*

c) Obtener el inferior de las sumas, $\inf S(p)$, para los valores de p obtenidos en el apartado anterior. ¿Se alcanza ese inferior para algún valor de p? *7 ps.*

Solución:

a) El logaritmo (natural) sólo admite argumentos positivos. Por tanto, el dominio de $f_{n,p}$ será el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que $p^n x - n - p > 0$, desigualdad que, por ser $p > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, es equivalente a $x > \dfrac{n+p}{p^n}$. Así pues, para cada $p > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, el dominio de definición de $f_{n,p}$ es el intervalo $\Big((n+p)/p^n, \infty\Big)$.

Puesto que $\log(x) = 0$ si y sólo si $x = 1$,

$$f_{n,p}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^n x - n - p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1+n+p}{p^n} =: \alpha_{n,p}\,.$$

Más aún, puesto que $f_{n,p}$ es de clase C^∞ en su dominio de definición, siendo su derivada

$$f'_{n,p}(x) = \frac{p^n}{p^n x - n - p} > 0 \quad \text{para cada } x \in \left(\frac{n+p}{p^n}, \infty\right),$$

la función $f_{n,p}$ es estrictamente creciente en dicho dominio y puede tomar cada valor a lo más una vez. Por tanto, $\alpha_{n,p}$ es la única solución de la ecuación $f_{n,p}(x) = 0$.

b) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+n+p}{p^n}$ es aritmético-geométrica, y converge si y sólo si la razón $r = 1/p$ es menor que 1, esto es, cuando $p > 1$. Para calcular su suma utilizamos el método expuesto en el ejercicio 24 del tema *Series Numéricas*: Para cada $p > 1$ y $k \in \mathbb{N}$, la suma parcial k-ésima de la serie es

$$S_k(p) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_{n,p} = \frac{2+p}{p} + \frac{3+p}{p^2} + \ldots + \frac{1+k+p}{p^k}.$$

Multiplicamos por la razón $1/p$ y obtenemos

$$\frac{1}{p}\, S_k(p) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{p}\, \alpha_{n,p} = \frac{2+p}{p^2} + \frac{3+p}{p^3} + \ldots + \frac{1+k+p}{p^{k+1}}.$$

Al restar ambas expresiones llegamos a

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) S_k(p) = \frac{2+p}{p} + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{p^n} - \frac{1+k+p}{p^{k+1}}.$$

Tras calcular la suma geométrica que aparece, $\sum\limits_{n=2}^{k} \dfrac{1}{p^n} = \dfrac{1/p^2 - 1/p^{k+1}}{1 - 1/p}$, podemos despejar $S_k(p)$:

$$S_k(p) = \frac{p}{p-1}\left(\frac{2+p}{p} + \frac{1/p^2 - 1/p^{k+1}}{1 - 1/p} - \frac{1+k+p}{p^{k+1}}\right) = \frac{2+p}{p-1} + \frac{1 - 1/p^{k-1}}{(p-1)^2} - \frac{1+k+p}{(p-1)\,p^k}.$$

Finalmente, la suma total $S(p)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales:

$$S(p) = \lim_{k\to\infty} S_k(p) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2+p}{p-1} + \frac{1-1/p^{k-1}}{(p-1)^2} - \frac{1+k+p}{(p-1)\,p^k}\right) =$$

$$= \frac{2+p}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{p^2+p-1}{(p-1)^2}.$$

c) La función suma $S(p)$ es de clase C^∞ en el dominio de convergencia ($p > 1$) y su derivada es

$$S'(p) = \frac{-3\,p+1}{(p-1)^3} < 0 \quad \text{para cada } p \in (1,\infty).$$

Por tanto, $S(p)$ es estrictamente decreciente en $(1,\infty)$ y su inferior es entonces $\inf_{p\in(1,\infty)} S(p) = \lim_{p\to\infty} S(p) = 1$. Obviamente, dicho inferior no se alcanza en ningún $p \in (1,\infty)$, por ser $S(p)$ estrictamente monótona en este intervalo.

2. Para cada $t > 1$ se considera la parábola P_t, gráfica de un polinomio de segundo grado, que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(t,0)$.

a) Demostrar que el área del recinto limitado en el primer cuadrante del plano por la parábola P_t es igual a $A(t) = \dfrac{1}{6}\,\dfrac{t^3}{t-1}$. *9 ps.*

b) Determinar, en función de α, el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty A(t)\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha\,t)}{t^4}\,dt$. *10 ps.*

Solución:

a) Escribimos la ecuación de la parábola P_t como $P_t(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, cuyos coeficientes a, b y c dependerán obviamente del valor de $t > 1$ considerado. Para que dicha parábola pase por los puntos dados, se han de cumplir las siguientes condiciones:

$$P_t(0) = c = 0\,, \quad P_t(1) = a + b = 1\,, \quad \text{y} \quad P_t(t) = a\,t^2 + b\,t = 0\,.$$

Resolviendo estas ecuaciones lineales, se obtiene la siguiente expresión:

$$P_t(x) = \frac{-1}{t-1}\,x^2 + \frac{t}{t-1}\,x\,.$$

El valor del área que delimita esta parábola en el primer cuadrante queda determinado por la integral de la función en el intervalo $[0,t]$. Aplicando la regla de Barrow,

$$A(t) = \int_0^t P_t(x)\,dx = \left(\frac{-1}{t-1}\,\frac{x^3}{3} + \frac{t}{t-1}\,\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=t} = \frac{-t^3}{3\,(t-1)} + \frac{t^3}{2\,(t-1)} = \frac{1}{6}\,\frac{t^3}{t-1}\,.$$

b) Para estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_1^\infty A(t)\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha\,t)}{t^4}\,dt = \int_1^\infty \frac{1}{6}\,\frac{t^3}{t-1}\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha\,t)}{t^4}\,dt = \frac{1}{6}\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(\alpha\,t)}{t\,(t-1)}\,dt\,,$$

consideramos la función $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha\,t)}{t\,(t-1)}$, que está definida y es continua en el intervalo abierto $(1,\infty)$, y es por lo tanto localmente integrable en dicho intervalo.

De acuerdo con los resultados estudiados relativos a integración impropia, fijemos un valor arbitrario $c > 1$ y estudiemos el carácter de las dos integrales impropias siguientes:

$$\int_1^c \frac{\operatorname{sen}(\alpha\,t)}{t\,(t-1)}\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_c^\infty \frac{\operatorname{sen}(\alpha\,t)}{t\,(t-1)}\,dt\,.$$

Comenzamos estudiando la segunda. Podemos acotar

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\alpha\,t)}{t\,(t-1)}\right| \le \frac{1}{t\,(t-1)} = g(t)\,, \qquad t \ge c\,.$$

Puesto que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{t\,(t-1)} = 1$, la integral $\int_c^\infty g(t)\,dt$ tiene el mismo carácter que $\int_c^\infty dt/t^2$, que es convergente. Por el criterio de comparación por mayoración $\int_c^\infty f(t)\,dt$ converge absolutamente para cualquier valor del parámetro, y en particular converge.

En cuanto a la primera integral, distinguimos los casos en que $\operatorname{sen}(\alpha)=0$ y $\operatorname{sen}(\alpha)\neq 0$. Si $\operatorname{sen}(\alpha)=0$, basta aplicar la regla de l'Hopital para obtener que existe

$$\lim_{t\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(\alpha\, t)}{t\,(t-1)}=\lim_{t\to 1^+}\frac{\alpha\cos(\alpha\, t)}{2\,t-1}=\alpha\cos(\alpha)\,.$$

Esto significa que la función $f(t)$ se puede prolongar con continuidad al intervalo $[1,c]$, trantándose entonces de una integral convergente. Ahora bien, si $\operatorname{sen}(\alpha)\neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to 1^+}\frac{f(t)}{1/(t-1)}=\lim_{t\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(\alpha\, t)}{t}=\operatorname{sen}(\alpha)\neq 0\,.$$

En este caso la función $f(t)$ mantiene el signo constante (e igual al de $\operatorname{sen}(\alpha)$) en un intervalo $(1,\delta)$, y el criterio de comparación por cociente para funciones de signo constante nos permite garantizar que el carácter de la integral $\int_1^c f(t)\,dt$ es el mismo que el de $\int_1^c dt/(t-1)$; es decir, se trata de una integral no convergente.

Resumiendo, la integral converge si, y sólo si, $\operatorname{sen}(\alpha)=0$, es decir, si, y sólo si, $\alpha=n\,\pi$ para algún $n\in\mathbb{Z}$.

3.

a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=\cos(xy)+\operatorname{sen}(x^2+y)\,.$$ *9 ps.*

b) Calcular el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(xy)+\operatorname{sen}(x^2+y)-1-y-x^2}{x^2+y^2}$. *9 ps.*

Solución:

a) No cabe duda de que la función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^2$, así que admite desarrollos de Taylor de cualquier orden en cualquier punto. Para calcular el solicitado se puede proceder a determinar sus coeficientes por derivación sucesiva:

$$f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\,x\,y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\,,$$

pero también se puede recurrir a los desarrollos de funciones conocidas, y de paso encauzar la respuesta al segundo apartado; procederemos de esta segunda forma. Se tiene que

$$\cos(t)=1-\frac{t^2}{2}+\ldots=1-\frac{t^2}{2}+\varepsilon(t)\,t^2 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(t)=t-\frac{t^3}{6}+\ldots=t+\delta(t)\,t^2$$

siendo $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=\lim_{t\to 0}\delta(t)=0$ (en la notación de Landau las funciones $\varepsilon(t)\,t^2$ y $\delta(t)\,t^2$ son $o(t^2)$).

Por otro lado $|x|\le\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|$ y también $|y|\le\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|$, de manera que $|x\,y|\le x^2+y^2=\|(x,y)\|^2$, o si se prefiere $xy=O(\|(x,y)\|^2)$. Del mismo modo, en un entorno del origen (basta con que $|x|\le 1$) podemos establecer que $|x^2+y|\le|x|+|y|\le 2\,\|(x,y)\|$, esto es, $|x^2+y|=O(\|(x,y)\|)$. Según lo anterior

$$\cos(xy)+\operatorname{sen}(x^2+y)=1-\frac{x^2y^2}{2}+\varepsilon(xy)\,x^2y^2+(x^2+y)+\delta(x^2+y)\,(x^2+y)^2$$

y teniendo en cuenta que xy y x^2+y tienden a 0 cuando (x,y) tiende hacia $(0,0)$, por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x^2y^2/2+\varepsilon(xy)\,x^2y^2+\delta(x^2+y)\,(x^2+y)^2}{x^2+y^2}=0,$$

podemos escribir

$$\cos(xy)+\operatorname{sen}(x^2+y)=1+y+x^2+o(\|(x,y)\|^2)\,.$$

Para concluir basta recordar (ver lema 2.10 del tema 10) que el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(0,0)$ es el único polinomio P de grado 2 que verifica $f(x,y)-P(x,y)=o(\|(x,y)\|^2)$ en el citado punto, es decir, el polinomio buscado no puede ser otro que $P(x,y)=1+y+x^2$.

b) La respuesta ya ha sido dada arriba, pues la expresión $f(x,y)-P(x,y)=o(\|(x,y)\|^2)$ significa precisamente que

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-P(x,y)}{\|(x,y)\|^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(xy)+\operatorname{sen}(x^2+y)-1-y-x^2}{x^2+y^2}\,.$$

Soluciones del examen realizado en Febrero de 2005

CUESTIONES (Tiempo 1:30; 6 puntos cada cuestión)

1.- Se supone que la sucesión de números reales positivos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $\lim_{n\to\infty} n\,a_n = 1$. Calcular $\lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

Solución: Sea L el límite pedido. Por ser $n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} > 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, podemos tomar logaritmos y

$$\log(L) = \lim_{n\to\infty} \log\left(n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^n a_1a_2\cdots a_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(n) + \sum_{k=1}^{n}\log(a_k)}{n}.$$

La sucesión $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ que aparece en el denominador de la última expresión es creciente y tiende hacia ∞ cuando $n\to\infty$; podemos entonces aplicar el criterio de Stolz para obtener

$$\begin{aligned}\log(L) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\log(n+1) + \sum_{k=1}^{n+1}\log(a_k) - n\log(n) - \sum_{k=1}^{n}\log(a_k)}{(n+1)-n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\big((n+1)\log(n+1) + \log(a_{n+1}) - n\log(n)\big) = \lim_{n\to\infty}\log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)\,a_{n+1}\right) = 1,\end{aligned}$$

ya que $\lim_{n\to\infty}\log((n+1)a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\log(na_n) = \log(1) = 0$. Así, $L = e^1 = e$.

Nota: Otra solución más rápida, pero que en el fondo consiste también en la aplicación del criterio de Stolz, consiste en escribir $n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt[n]{n^n a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt[n]{x_n}$; según la propiedad 5.9.iii esta sucesión tiene el mismo límite, si existe, que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n+1}}{n^n a_1a_2\cdots a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)\,a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e\,.$$

2.- Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n!}{(5+1)(5+2)\cdots(5+n)}$.

Solución: Denotemos por a_n al término general de la serie. No es difícil probar que la serie es alternada y que $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ decrece hacia 0, lo que garantiza su convergencia según el criterio de Leibnitz. Sin embargo es más sencillo probar la convergencia absoluta de esta serie:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{n+6}\,. \tag{C2}$$

Este cociente tiende hacia 1 cuando n tiende a ∞ y el correspondiente criterio no concluye, aunque sí lo hace el de Raabe; pero tampoco es esto necesario pues, con la terminología y notación de los apuntes del curso, la expresión (C2) muestra que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es hipergeométrica con parámetros $\alpha = 1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 6$. Puesto que $\gamma > \alpha+\beta$ la convergencia de esta serie está garantizada, es decir la serie del enunciado converge absolutamente y, en consecuencia, es también convergente.

3.- Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{5+\cos\left(\pi x/3\right)}{10+x^3}\,dx \le \frac{3}{5}$.

Solución: Es obvio que la función integrando, que llamaremos f, es continua en $[0,1]$. Por otra parte, para $0\le x\le 1$ se tiene que

$$10 \le 10+x^3 \le 11 \qquad \text{y} \qquad \frac{11}{2} = 5+\frac{1}{2} = 5+\cos\left(\pi/3\right) \le 5+\cos\left(\pi x/3\right) \le 5+\cos(0) = 6\,;$$

las últimas desigualdades son consecuencia del carácter decreciente del coseno en el intervalo $[0,\pi/3]$. Así pues

$$\frac{1}{2} = \frac{11/2}{11} \le f(x) = \frac{5+\cos(\pi x/3)}{10+x^3} \le \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

para todo $x\in[0,1]$. Ahora la consecuencia es inmediata de la propiedad de monotonía de la integral,

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \frac{3}{5}\,dx = \frac{3}{5}\,.$$

4.- Sea $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f(1,2) = 4$ y $\lim_{x\to1} f(x,x+1) = 4$. Probar que si existe $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$ entonces f es continua en el punto $(1,2)$.

Solución: El límite $\lim_{x\to 1} f(x, x+1)$ es el límite de f cuando $(x,y) \to (1,2)$ a lo largo de la recta de ecuación $y = x+1$. Según el teorema 4.5 del tema 9 este límite debe ser igual a $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$; pero entonces

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 4 = f(1,2),$$

propiedad equivalente a la continuidad de f en el punto $(1,2)$ según la proposición 5.2 del mismo tema.

5.- Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables. Se define $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $h(x,y) = f\big(x+g(y)\,,\, g(x\,y)\big)$. Calcular la derivada parcial $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ en función de las derivadas de f y de g.

Solución: Sea $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $\boldsymbol{\varphi}(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big) = \big(x+g(y)\,,\, g(x\,y)\big)$. Obviamente $\boldsymbol{\varphi}$ es diferenciable y

$$D_2u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = g'(y) \qquad \text{y} \qquad D_2v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = x\,g'(x\,y)\,.$$

Entonces $h = f\circ\boldsymbol{\varphi}$ y la respuesta consiste en la simple aplicación de la regla de la cadena

$$D_2h(x,y) = D_1 f\big(\boldsymbol{\varphi}(x,y)\big)\,D_2u(x,y) + D_2 f\big(\boldsymbol{\varphi}(x,y)\big)\,D_2v(x,y)\,,$$

o con la notación de Jacobi, permitiéndonos la licencia habitual de denotar igual a funciones y variables,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\boldsymbol{\varphi}(x,y)\big)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\boldsymbol{\varphi}(x,y)\big)\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\boldsymbol{\varphi}(x,y)\big)\,g'(y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\boldsymbol{\varphi}(x,y)\big)\,x\,g'(x\,y)\,.$$

6.- Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = x^2 + x\,y - 4\,y + 2$ en el punto $(1,1)$.

Solución: Puesto que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$ no hay más que aplicar la fórmula de Taylor en el punto $(1,1)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\,(x-1)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\,(y-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\,(x-1)(y-1) + o\big((x-1)^2 + (y-1)^2\big)\,, \end{aligned}$$

de manera que sólo hay que calcular las derivadas correspondientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,x + y\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 4\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1\,,$$

cuyos valores en el el punto $(1,1)$ son 3, -3, 2, 0 y 1, respectivamente. Finalmente $f(1,1) = 0$ y resulta

$$f(x,y) = 3\,(x-1) - 3\,(y-1) + (x-1)^2 + (x-1)(y-1) + o\big((x-1)^2 + (y-1)^2\big)\,.$$

Nota: Podemos decir más. Puesto que f es ya un polinomio de grado 2 ha de coincidir con sus polinomios de Taylor de grado mayor o igual que 2 en cualquier punto, es decir, el correspondiente resto de Taylor, el término de la forma $o(\|(x-1, y-1)\|^2)$, es idénticamente nulo. Esto da lugar a una segunda solución que consiste simplemente en escribir f en potencias de $(x-1)$ e $(y-1)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + x\,y - 4\,y + 2 = (x-1+1)^2 + (x-1+1)\,(y-1+1) - 4\,(y-1+1) + 2 \\ &= (x-1)^2 + 2\,(x-1) + 1 + (x-1)(y-1) + (x-1) + (y-1) + 1 - 4(y-1) - 4 + 2 \\ &= (x-1)^2 + (x-1)(y-1) + 3(x-1) - 3(y-1)\,. \end{aligned}$$

7.- Se considera en $\mathbb{R}^3$ la curva intersección del plano de ecuación $x - y + z = 1$ y la superficie de ecuación $x^3 - z = 1$. Parametrizar el arco Γ de esta curva de extremos $(-1,-4,-2)$ y $(1,0,0)$. Determinar todos los vectores de módulo 1 en la dirección de la recta tangente a Γ en el punto $(0,-2,-1)$.

Solución: De la ecuación de la superficie obtenemos, despejando z, que los puntos de la curva satisfacen $z = x^3 - 1$. Si luego llevamos esta expresión a la ecuación del plano y despejamos y se obtiene que $y = x + z - 1 = x + x^3 - 2$. Esto sugiere tomar x como parámetro, es decir, construir la parametrización

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(t, t^3 + t - 2, t^3 - 1\big)\,.$$

Es evidente que $\boldsymbol{\gamma}(-1) = (-1,-4,-2)$ y que $\boldsymbol{\gamma}(1) = (1,0,0)$, así que el intervalo de parametrización de Γ es $[-1,1]$ (si se toma t en todo $\mathbb{R}$ se parametriza toda la curva intersección de las dos superficies citadas). Por otro lado, es inmediato que $(0,-2,-1) = \boldsymbol{\gamma}(0)$ y la recta tangente a la curva en dicho punto tiene la dirección del vector $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \big(1, 3\,t^2 + 1, 3\,t^2\big)_{|t=0} = (1,1,0) = \boldsymbol{t}$. Los dos únicos vectores de módulo 1 proporcionales a $\boldsymbol{t}$ son

$$\frac{\boldsymbol{t}}{\|\boldsymbol{t}\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\,, 0\Big) \qquad \text{y} \qquad \frac{-\boldsymbol{t}}{\|\boldsymbol{t}\|} = \Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,,\, \frac{-1}{\sqrt{2}}\,, 0\Big)\,.$$

PROBLEMAS (Tiempo: 2:15)

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(x) = e^x + n(x-1)$, $x \in [0,1]$.

a) Probar que la ecuación $f_n(x) = 0$ tiene una única solución, que llamaremos x_n, en el intervalo $[0,1]$. *6 ps.*

b) Comprobar que $1 - x_n = e^{x_n}/n$ y deducir que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ y que $\lim_{n\to\infty} n(1-x_n) = e$. *4 ps.*

c) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n(x_n - x_{n+1}) + e^{x_{n+1}}(e^{x_n - x_{n+1}} - 1) = x_{n+1} - 1$ y deducir que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente. *6 ps.*

d) Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x_n)$. *6 ps.*

Solución:

a) La función f_n es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Puesto que $f_n'(x) = e^x + n > 0$ para todo $x \in [0,1]$, la función es estrictamente creciente, y por lo tanto inyectiva, en dicho intervalo, lo que garantiza que se anulará a lo sumo una vez en el mismo. Como $f_n(0) = 1 - n$ y $f_n(1) = e$, es claro que si $n = 1$ la función f_1 se anula en $x_1 = 0$, mientras que si $n > 1$ se tiene que $f_n(0)\, f_n(1) < 0$, y el teorema de Bolzano asegura que existe $x_n \in (0,1)$ tal que $f_n(x_n) = 0$.

b) La igualdad $f_n(x_n) = 0$ consiste en $e^{x_n} + n(x_n - 1) = 0$, de donde $e^{x_n} = -n(x_n - 1) = n(1 - x_n)$ o equivalentemente $1 - x_n = e^{x_n}/n$. Dado que $0 \le x_n \le 1$, y por la monotonía de la exponencial, es claro que

$$\frac{1}{n} = \frac{e^0}{n} \le \frac{e^{x_n}}{n} \le \frac{e^1}{n} = \frac{e}{n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

y como las sucesiones de los extremos en las desigualdades anteriores convergen hacia 0, el criterio del Sandwich permite afirmar que $\lim_{n\to\infty} (1 - x_n) = \lim_{n\to\infty} e^{x_n}/n = 0$, de donde $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} n(1-x_n) = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^1 = e\,.$$

c) Si se restan las relaciones $e^{x_n} + n(x_n - 1) = 0$ y $e^{x_{n+1}} + (n+1)(x_{n+1} - 1) = 0$ que definen x_n y x_{n+1}, respectivamente, se obtiene que $n(x_n - 1) - n(x_{n+1} - 1) - x_{n+1} + 1 + e^{x_n} - e^{x_{n+1}} = 0$, de donde se deduce inmediatamente la igualdad pedida. Para deducir el crecimiento de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, razonemos por reducción al absurdo: si se supone que para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n > x_{n+1}$, entonces el miembro a la izquierda de la igualdad probada será claramente positivo, mientras que el de la derecha es negativo, lo que es absurdo.

Nota: Otra forma de probar el crecimiento es observar que

$$f_n(x_{n+1}) = e^{x_{n+1}} + n(x_{n+1} - 1) = e^{x_{n+1}} + (n+1)(x_{n+1} - 1) + 1 - x_{n+1} = 1 - x_{n+1} > 0,$$

lo que, teniendo en cuenta que $f_n(x_n) = 0$ y el crecimiento estricto de f_n en $[0,1]$, garantiza que $x_n < x_{n+1}$.

d) Puesto que $x_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, la serie es alternada. De los apartados b) y c) sabemos que la sucesión $\{1 - x_n\}_{n=1}^{\infty}$ decrece hacia 0, por lo que el criterio de Leibnitz asegura que la serie converge. Por otra parte,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|(-1)^n (1 - x_n)\big| = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - x_n)\,,$$

y el segundo límite obtenido en el apartado b) permite deducir la divergencia de esta serie, bien mediante el criterio de Pringsheim, bien mediante la comparación con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Otra posibilidad es aplicar el segundo criterio logarítmico, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log\big(n(1-x_n)\big)}{\log\big(\log(n)\big)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-x_n}{\log\big(\log(n)\big)} = 0 < 1.$$

2. Dado $a \in \mathbb{R}$ se considera la función $f(x) = e^x - a\,x + \log(x)$.

a) Calcular el desarrollo limitado de orden 2 de f en el punto $x_0 = 1$. *6 ps.*

b) Determinar para qué valores de a la función f es positiva en $(1, \infty)$. *6 ps.*

c) Deducir que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)}\, dx$ es convergente para cada $a \le e$. *8 ps.*

Solución:

a) La función f está bien definida y es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en el intervalo $(0,\infty)$, así que admite desarrollo limitado de cualquier orden en cualquier punto de este intervalo, y es el correspondiente desarrollo de Taylor. Así pues, sólo hay que calcular las derivadas sucesivas de f en el punto 1:

$$f(1)=e^1-a\cdot 1+\log(1)=e-a\,,\;\; f'(1)=\Big(e^x-a+\frac{1}{x}\Big)\Big|_{x=1}=e-a+1\,,\;\; f''(1)=\Big(e^x-\frac{1}{x^2}\Big)\Big|_{x=1}=e-1\,,$$

y se obtiene que

$$f(x)=(e-a)+(e-a+1)\,(x-1)+\frac{e-1}{2}\,(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)\quad \text{en}\;\; x_0=1\,.$$

Nota: Otra solución, que es más conveniente para calcular desarrollos de orden elevado, aunque en este caso no aporta ninguna ventaja, consite en utilizar los desarrollos de Taylor conocidos de las funciones elementales en $t_0=0$, nótese que $t=x-1$ tiende a 0 cunado x tiende hacia 1, así que

$$\begin{aligned} f(x)&=e^{1+(x-1)}-a\,\big(1+(x-1)\big)+\log\big(1+(x-1)\big)\;=\;e\,e^t-a-a\,t+\log(1+t)\\ &=e\Big(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\Big)-a-a\,t+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\;=\;(e-a)+(e-a+1)\,t+\frac{e-1}{2}\,t^2+o(t^2)\,, \end{aligned}$$

donde la expresión de Landau $o(t^2)$ se refiere, por supuesto, al punto $t_0=0$. Reescribiendo la última expresión en términos de $(x-1)$ se llega al mismo desarrollo de Taylor.

b) Aunque el intervalo en el que se centra la atención es $(1,\infty)$ la función f está definida y es de clase $\mathcal{C}^\infty$, como ya se ha indicado anteriormente, en $(0,\infty)$. Puesto que $f(1)=e-a$ es inmediato que si $a>e$ entonces $f(1)<0$ y por la continuidad f también tomará valores negativos en cierto intervalo $(1-\delta,1+\delta)$, en particular $f(x)<0$ si $x\in(1,1+\delta)$. Por otra parte, si $a\le e$ entonces $f(1)\ge 0$ y para cada $x\ge 1$ se tiene que

$$f'(x)=e^x-a+\frac{1}{x}>e^x-a\ge e-a\ge 0\,.$$

La desigualdad anterior muestra que f es estrictamente creciente en $[1,\infty)$ y, por tanto, $f(x)>f(1)\ge 0$ para cada $x\in(1,\infty)$. En resumen, $f(x)>0$ para todo $x\in(1,\infty)$ si, y sólo si, $a\le e$.

c) Según lo obtenido en el apartado anterior, cuando $a\le e$ el cociente $g(x)=\sqrt{x-1}/f(x)$ está bien definido (el denominador no se anula) y es positivo en el intervalo $(1,\infty)$; es obvio también que la función g es continua en este intervalo, lo que garantiza que la integral impropia considerada tiene sentido.

Aparte del hecho de que el intervalo de integración no es acotado se puede presentar otra singularidad en el extremo inferior si $f(1)=0$ (lo que ocurre cuando $a=e$). Procederemos entonces analizando las dos integrales en que se descompone la original eligiendo un punto intermedio, por ejemplo $c=2$, del dominio de integración:

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)}\,dx=\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)}\,dx+\int_2^\infty \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)}\,dx\,.$$

Para el estudio de la primera distinguiremos dos casos:

1. Si $a<e$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{f(x)}=\frac{0}{e-a}=0$; por lo que en realidad se trata de la integral de una función continua en un intervalo compacto.
2. Si $a=e$ entonces el desarrollo limitado obtenido en el apartado a), $f(x)=(x-1)+o(x-1)$, indica que g se comporta asintóticamente en 1 como $\sqrt{x-1}/(x-1)=(x-1)^{-1/2}$. Entonces

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)}{(x-1)^{-1/2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}^{\,2}}{(x-1)+o(x-1)}=1\,,$$

y puesto que la integral impropia

$$\int_1^2 (x-1)^{-1/2}dx=\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^{1/2}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

es convergente, el criterio de comparación afirma que también lo es $\int_1^2 g(x)\,dx$.

Para probar el carácter convergente de la integral en el intervalo $(2,\infty)$ notemos que, atendiendo a los órdenes de infinitud de las funciones elementales, $g(x)$ se comporta cuando x tiende a ∞ como $\sqrt{x}\,e^{-x}$, es decir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sqrt{x}\,e^{-x}}=1.$$

Puesto que la integral impropia $\int_2^\infty \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$ es convergente también lo es $\int_2^\infty g(x)\,dx$.

La convergencia de las integrales con las que se ha comparado está recogida en la tabla de funciones test del tema 8.

3. Para $x>0$ e $y>0$ se considera $F(x,y)=\displaystyle\int_{2xy}^{x+y}\sqrt{t}\,\operatorname{sen}(t)\,dt.$

a) Demostrar que F está bien definida y es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en el abierto $(0,\infty)\times(0,\infty)$. *6 ps.*

b) Probar que la ecuación $F(x,y)=0$ define una función implícita $y=\varphi(x)$ en un entorno de $x_0=1$ con $\varphi(1)=1$. *4 ps.*

c) ¿Presenta φ un extremo relativo en x_0? *6 ps.*

Solución:

a) Para todo $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ los extremos de integración,

$$u(x,y)=2\,x\,y\,,\qquad v(x,y)=x+y\,,$$

son estrictamente positivos, por lo que el integrando $h(t)=\sqrt{t}\operatorname{sen}(t)$ está bien definido en el intervalo de extremos $u(x,y)$ y $v(x,y)$, es continuo allí y, por tanto, integrable. Así pues, la función F está bien definida para todo $(x,y)\in V=(0,\infty)\times(0,\infty)$.

Para comprobar que la función F es de clase C^∞ en $(0,\infty)\times(0,\infty)$, escribimos F de la forma

$$F(x,y)=\int_a^{v(x,y)}h(t)\,dt-\int_a^{u(x,y)}h(t)\,dt,$$

donde a es un número positivo arbitrario, y observamos que cada una de las dos integrales que aparecen a la derecha se puede expresar como la composición de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ con $H(z)=\int_a^z h(t)\,dt$, una función primitiva de h; esto es,

$$F(x,y)=H\big(v(x,y)\big)-H\big(u(x,y)\big)=(H\circ v)(x,y)-(H\circ u)(x,y)\,.$$

Por ser el integrando $h(t)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0,\infty)$, y en particular continuo, el teorema fundamental del cálculo afirma que la función $H(z)$ es derivable para todo $z>0$ y su derivada es $H'(z)=h(z)$, de manera que H también es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0,\infty)$. Por otro lado, las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son polinómicas y, por tanto, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, aunque basta con que lo sean en el dominio de interés V. Según el lema 2.7 del tema 10 las composiciones $H\circ v$ y $H\circ u$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$, y lo mismo se puede decir de $F=H\circ v-H\circ u$.

Podemos además, aplicando la regla de la cadena, calcular las derivadas parciales de F, cuyo conocimiento será necesario en los siguientes apartados:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)&=H'\big(v(x,y)\big)\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)-H'\big(u(x,y)\big)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=h(x+y)-h(2\,x\,y)\,2\,y\\&=\sqrt{x+y}\operatorname{sen}(x+y)-\sqrt{2\,x\,y}\,\operatorname{sen}(2\,x\,y)\,2\,y\,,\end{aligned}\tag{E3.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)&=H'\big(v(x,y)\big)\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)-H'\big(u(x,y)\big)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=h(x+y)-h(2\,x\,y)\,2\,x\\&=\sqrt{x+y}\operatorname{sen}(x+y)-\sqrt{2\,x\,y}\,\operatorname{sen}(2\,x\,y)\,2\,x\,.\end{aligned}\tag{E3.2}$$

b) Tenemos que $F(1,1)=\int_2^2 h(t)\,dt=0$, por ser iguales los extremos de integración. En el apartado anterior hemos probado que F es de clase C^∞ en el abierto V, un entorno del punto $(1,1)$. Además, a la vista de (E3.2) tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(2)-\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(2)\,2=-\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(2)\neq 0\,.$$

Estamos entonces en condiciones de aplicar el teorema de la función implícita, que asegura la existencia de un abierto U de $\mathbb{R}$, con $x_0=1\in U$, y otro abierto W de $\mathbb{R}$, con $y_0=1\in W$, tales que para cada $x\in U$ existe un único $\varphi(x)\in W$ con $F\big(x,\varphi(x)\big)=0$; además, $\varphi(1)=1$ y $\varphi:U\to W$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U.

c) Siendo φ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U, si esta función presentase un extremo relativo en $x_0=1$, debería verificarse la condición necesaria $\varphi'(x_0)=0$. El valor de φ' lo obtenemos a partir de la ecuación

$$\begin{aligned}0=\frac{d}{dx}F\big(x,\varphi(x)\big)&=\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,\varphi(x)\big)+\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\\&=\Big(\sqrt{x+\varphi(x)}\,\operatorname{sen}\big(x+\varphi(x)\big)-\sqrt{2\,x\,\varphi(x)}\,\operatorname{sen}\big(2\,x\,\varphi(x)\big)\,2\,\varphi(x)\Big)\\&\quad+\Big(\sqrt{x+\varphi(x)}\operatorname{sen}\big(x+\varphi(x)\big)-\sqrt{2\,x\,\varphi(x)}\,\operatorname{sen}\big(2\,x\,\varphi(x)\big)\,2\,x\Big)\,\varphi'(x)\,,\end{aligned}$$

que evaluada en $x_0=1$ (recordemos que $y_0=\varphi(x_0)=1$) resulta ser

$$0=-\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(2)\,\big(1+\varphi'(x_0)\big)\,,$$

de donde se sigue que $\varphi'(x_0)=-1\neq 0$ y, por tanto, φ no presenta un extremo relativo en $x_0=1$.

Soluciones del examen realizado en Septiembre de 2005

CUESTIONES (Tiempo 1:30; 6 puntos cada cuestión)

1.- Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+2}{n}b^n$ en función del parámetro real b.

Solución: Dado que $\displaystyle\binom{n+2}{n}=\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$, la serie es aritmético-geométrica de orden 2 y razón b, y se sabe que este tipo de series converge si, y sólo si, $|b|<1$.

Nota: En cualquier caso, si no se identifica la serie como aritmético-geométrica, para $|b|<1$ la convergencia absoluta de la serie se deduce del criterio del cociente (salvo para el caso trivial $b=0$), mientras que si $|b|\geq 1$ el término general de la serie no tiende a 0.

2.- Probar que la ecuación $x^5-5\,x+1=0$ tiene solución única en el intervalo $[-1,1]$.

Solución: La función f definida en $[-1,1]$ por $f(x)=x^5-5\,x+1$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en dicho intervalo. Por una parte, se tiene que

$$f'(x)=5(x^4-1)<0 \qquad \text{si} \quad x\in(-1,1),$$

lo que garantiza el decrecimiento estricto, y por lo tanto la inyectividad, de f en $[-1,1]$. Por otra parte, $f(1)=-3<0$ y $f(1)=5>0$, por lo que, en virtud del teorema de Bolzano, la función se anula en un punto de $(-1,1)$ que, por lo anterior, será único.

3.- Mediante un cambio de variable, transformar la integral $\displaystyle\int_1^4\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{x}}\,dx$ en una de tipo racional (no se pide calcular su valor).

Solución: Siguiendo la pauta marcada en la sección §5 del tema 6, la integral

$$\int_1^4\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{x}}\,dx=\int_1^4 x^{-1}\Big(\frac{1+x}{x}\Big)^{1/2}dx$$

se transforma mediante el cambio de variable

$$t^2=\frac{1+x}{x}, \quad \text{es decir,} \quad x=\frac{1}{t^2-1}, \quad dx=\frac{-2\,t}{(t^2-1)^2}\,dt,$$

en la integral de tipo racional $\displaystyle -2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}/2}\frac{t^2}{t^2-1}\,dt$.

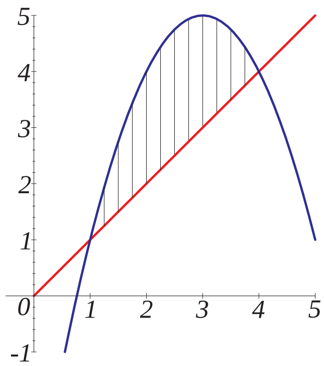
4.- Calcular el área de la región del plano euclídeo limitada por la bisectriz del primer cuadrante y la parábola de ecuación $y=-x^2+6\,x-4$.

Solución: Resolviendo el sistema formado por sus respectivas ecuaciones,

$$\begin{cases} y=-x^2+6\,x-4 \\ y=x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2-5\,x+4=0 \\ y=x \end{cases}$$

se encuentra que los puntos de corte de la parábola y la recta son el $(1,1)$ y el $(4,4)$. En el intervalo $(1,4)$ se tiene que $-x^2+6\,x-4>x$ (nótese que la gráfica de $g(x)=-x^2+6\,x-4$ es cóncava, pues $g''(x)=-2<0$ para todo $x\in\mathbb{R}$) y, tratándose de funciones continuas, el área se puede obtener como

$$A=\int_1^4\big((-x^2+6\,x-4)-x\big)\,dx=\int_1^4(-x^2+5\,x-4)\,dx=\frac{9}{2}.$$



5.- Estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$ de la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{e^{x^2+y^2}-1} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Solución: Expresamos la función, en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, en las coordenadas polares centradas en el origen:

$$f\big(\rho\,\cos(\theta),\rho\,\operatorname{sen}(\theta)\big)=\frac{\rho^3\big(\cos^3(\theta)+\operatorname{sen}^3(\theta)\big)}{\exp(\rho^2)-1}.$$

Entonces, $\big|f\big(\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big)-f(0,0)\big|=\big|f\big(\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big)\big|\leq\dfrac{2\,\rho^3}{\exp(\rho^2)-1}=g(\rho)$, y haciendo uso de la tabla de funciones equivalentes,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{2\,\rho^3}{\exp(\rho^2)-1}=\lim_{\rho\to 0}\frac{2\,\rho^3}{\rho^2}=0\,.$$

Como se conoce, esta condición garantiza que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, y f es continua en $(0,0)$.

6.- Estudiar la existencia de extremos relativos de la función definida en $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y)=x^3+y^3-3\,x\,y$.

Solución: Puesto que $x^3+y^3-3\,x\,y$ es un polinomio en dos variables la función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, así que son aplicables los criterios sobre extremos relativos. En primer lugar, atendiendo a la condición necesaria de extremo relativo, debemos localizar los puntos críticos, es decir, determinar los puntos $\boldsymbol{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ para los que $f'(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$, o lo que es lo mismo, resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\,x^2-3\,y \\[2mm] 0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3\,y^2-3\,x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases} \longrightarrow \big(x^2\big)^2=y^2=x \longrightarrow \begin{array}{ccc} x=0 & \text{ó} & x=1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ y=0 & & y=1 \end{array}$$

Entonces $\boldsymbol{x}_0=(0,0)$ y $\boldsymbol{x}_1=(1,1)$ son los únicos puntos críticos de f. Para concluir, necesitamos recurrir al estudio de la matriz hessiana de f en dichos puntos:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 6\,x & -3 \\ -3 & 6\,y\end{pmatrix};\qquad Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0\end{pmatrix};\qquad Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6\end{pmatrix}.$$

La forma cuadrática asociada a $Hf(0,0)$ es indefinida, pues su determinante es $-9<0$ y coincide con el producto de sus dos autovalores, que han de ser de signos opuestos (es muy fácil calcular estos autovalores, que son 3 y -3). Por otro lado, la forma cuadrática asociada a $Hf(1,1)$ es definida positiva; en efecto, con la notación habitual, se tiene que $\Delta_1=6>0$ y $\Delta_2=6^2-(-3)^2=27>0$. En resumen, f sólo alcanza un extremo relativo, que es un mínimo, en $\boldsymbol{x}_1$; el punto crítico $\boldsymbol{x}_0$ es un punto de silla.

7.- Se considera la superficie S de $\mathbb{R}^3$ que en un entorno U del punto $(0,0,0)$ está definida por $S=\big\{(x,y,z)\in U:\, e^{x+y}=\cos(y+z)+x\,z\big\}$. Calcular la ecuación del plano tangente a S en dicho punto.

Solución: Si definimos $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ por $g(x,y,z)=e^{x+y}-\cos(y+z)-x\,z$, resulta que g es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ y $S=\big\{(x,y,z)\in U:\, g(x,y,z)=0\big\}$; obviamente $g(0,0,0)=e^0-\cos(0)-0=1-1=0$, es decir, $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)\in S$. Además,

$$\nabla g(0,0,0)=\big(e^{x+y}-z\,,\,e^{x+y}+\mathrm{sen}(y+z)\,,\,\mathrm{sen}(y+z)-x\big)\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)}=(1,1,0)\neq\mathbf{0}\,.$$

Estamos en condiciones de aplicar la proposición 3.6 del tema 11 que, entre otras cosas, nos proporciona la ecuación del plano tangente a S en un punto (x_0,y_0,z_0):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,(y-y_0)+\frac{\partial g}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,(z-z_0)=0\,.$$

Particularizando en $(0,0,0)$ tenemos $1\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=0$, es decir, la ecuación del plano buscada es $x+y=0$.

PROBLEMAS (Tiempo: 2:15)

1. Sea $\alpha\in(0,\pi)$ una constante real. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ mediante

$$x_1=1;\qquad x_{n+1}=\frac{n}{n+2}\,x_n\cos\big(\alpha/2^n\big),\quad n\geq 1.$$

a) Demostrar que, para cada $n\in\mathbb{N}$, se tiene que $0\leq x_n\leq\dfrac{2}{n(n+1)}$. *6 ps.*

b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y de la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$. *6 ps.*

c) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{2x_n}\mathrm{arctg}(t)\,dt}{x_n^2}$. *8 ps.*

Solución:

a) En primer lugar, probaremos por inducción que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, $x_1 = 1 \geq 0$, y si se supone que $x_n \geq 0$, se tiene que x_{n+1} es producto de tres factores: el primero es $n/(n+2) > 0$, el segundo x_n es positivo por hipótesis, y el tercero es el coseno de $\dfrac{\alpha}{2^n} \in \big(0, \pi/2\big)$, también positivo.

Aplicamos de nuevo el principio de inducción para la segunda desigualdad, que se cumple para $n = 1$: $1 = x_1 \leq \dfrac{2}{1(1+1)} = 1$. Por otra parte, si $x_n \leq \dfrac{2}{n(n+1)}$ para un natural n, y puesto que la función coseno está acotada superiormente por 1, se obtiene que

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+2}\, x_n \cos\Big(\frac{\alpha}{2^n}\Big) \leq \frac{n}{n+2}\,\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

como se quería.

b) La doble desigualdad obtenida en el apartado anterior establece la acotación de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ entre otras dos cuyo límite es 0. Por lo tanto, el criterio del sandwich prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

En cuanto a la serie, es de términos positivos y está mayorada por la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$, cuya convergencia se obtiene por comparación con la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ o, lo que es lo mismo, del criterio de Pringsheim:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\, \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2.$$

En conclusión, la serie propuesta converge.

c) Dado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia 0 y en virtud del criterio secuencial, el límite pedido coincidirá con el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg}(t)\, dt}{x^2},$$

si éste existe. La función arcotangente es continua en $\mathbb{R}$, por lo que, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral y con la regla de la cadena, la función

$$f(x) = \int_0^{2x} \operatorname{arctg}(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = 2\, \operatorname{arctg}(2x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital para el cálculo del límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg}(t)\, dt}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, \operatorname{arctg}(2x)}{2\,x} = 2,$$

donde se ha utilizado la equivalencia $\operatorname{arctg}(x) \sim_0 x$.

2. Dado $n \in \mathbb{N}$ se considera la función f definida en $(-1, \infty)$ por $f(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$.

a) Determinar los tres primeros términos no nulos de los desarrollos limitados de f, de orden suficientemente grande, en el punto $t_0 = 0$. *7 ps.*

b) Se define $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Calcular los tres primeros términos no nulos de los desarrollos limitados de F en el punto $x_0 = 0$. *7 ps.*

c) Estudiar, en función del parámetro $\alpha > 0$, el carácter de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{F(x) - x}{x^\alpha}\, dx\,. \qquad \textit{7 ps.}$$

Solución: Es evidente que la función racional f está bien definda y es indefinidamente derivable en $I = (-1, \infty)$, así que la existencia de desarrollo limitados, integrabilidad en subintervalos compactos de I, etc. están garantizados para f.

a) Una posibilidad consiste en realizar la división en potencias crecientes de t del numerador $P(t) = 1$ entre el denominador $Q(t) = 1 + t^n$, puesto que por ser polinomios coinciden con sus desarrollos limitados de orden mayor que sus respectivos grados.

Otro método, este lo detallaremos, consiste en aplicar las propiedades sobre composición de funciones. Concretamente, si ponemos $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, y $h(t) = t^n$, $t_0 = 0$, se tiene que $h(t_0) = x_0$ y que $f(t) = g\big(h(t)\big)$. Resulta que h coincide con sus desarrollos limitados de orden mayor o igual que n en t_0, y por otra parte es conocido que $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^m x^m + o(x^m)$ en $x_0 = 0$ (ver tabla 4.7 del tema 5). Según la proposición 4.4 del tema 5 los desarrollos limitados de f los obtenemos sustituyendo la parte regular de uno en otro, despreciando luego las potencias de orden mayor al deseado:

$$f(t) = \frac{1}{1+t^n} = 1 - t^n + \big(t^n\big)^2 - \big(t^n\big)^3 + \ldots \qquad \text{en } t_0 = 0\,,$$

y puesto que en el enunciado no se exige más, podemos quedarnos con $f(t) = 1 - t^n + t^{2n} + o(t^{2n})$ como aproximación para f.

b) Si $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ el teorema fundamental del Cálculo asegura que F es una primitiva de f en el intervalo I. Aplicando el resultado 4.3.4 del tema 5, los desarrollos limitados de F en x_0 tienen por partes regulares a las primitivas de las de los desarrollos de f cuyo valor en x_0 coincide con $F(x_0)$. Para nuestros propósitos basta tomar

$$\int \big(1 - x^n + x^{2n}\big)\,dx = C + x - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2\,n+1}\,;$$

puesto que $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$, la constante C debe ser cero, concluyendo que el desarrollo limitado de F en $x_0 = 0$ y de orden $2\,n+1$ es $F(x) = x - \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \dfrac{x^{2n+1}}{2\,n+1} + o(x^{2n+1})$.

c) La función $(F(x) - x)/x^\alpha$ está bien definida y es continua para $x > 0$, por tanto localmente integrable en $(0, 1]$, y la integral propuesta tiene sentido. El carácter impropio viene dado por la indeterminación $0/0$ que se presenta en $x_0 = 0$ en el caso de que $\alpha > 0$. Para estudiar el carácter asintótico del integrando en este punto recurrimos a lo obtenido en el apartado anterior:

$$F(x) - x = -\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \quad \text{en } x_0 = 0$$

(recordemos que la rapidez con que la función tiende a 0 en x_0 está gobernada por el término no nulo de exponente más bajo de sus desarrollos limitados). Entonces, la función $(F(x) - x)/x^\alpha$ es equivalente en x_0 a $-\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\,\dfrac{1}{x^\alpha} = \dfrac{-1}{n+1}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-n-1}}$ o, si se prefiere,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - x}{x^\alpha}\, x^{\alpha-n-1} = \frac{-1}{n+1} \neq 0\,.$$

De lo anterior se sigue, en primer lugar, que el integrando tiene signo constante (negativo) en un intervalo de la forma $(0, \varepsilon)$, por lo que es aplicable el criterio de comparación, del que se deduce, después, que la integral propuesta tiene el mismo carácter que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-n-1}}$, y está perfectamente establecido que esta última converge (ver proposición 3.1 del tema 8) si, y sólo si, $\alpha - n - 1 < 1$. En conclusión, la integral propuesta es convergente si, y sólo si, $\alpha < n + 2$.

3. Se consideran las funciones f_1 y f_2 definidas en $\mathbb{R}^3$ por

$$f_1(x, y, z) = \cos(x^2) + y\,z - 1\,; \qquad f_2(x, y, z) = y^2 - 2\,x\,e^z - 1\,.$$

a) Probar que el sistema de ecuaciones $(f_1, f_2) = (0, 0)$ define en un entorno V del punto $x_0 = 0$ funciones implícitas $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ y tales que $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$. *5 ps.*

b) Estudiar si la función g, definida en V por

$$g(x) = x\,\varphi(x) - x + \psi(x)\,,$$

presenta un extremo relativo en x_0. *12 ps.*

Solución:

a) Es inmediato que las funciones f_1 y f_2 son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, pues así lo son las trigonométricas, exponenciales y polinómicas en sus respectivos dominios y, en consecuencia, sus composiciones, sumas y productos.

Pongamos, a tenor del enunciado, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $z_0 = 0$. Resulta que

$$f_1(x_0, y_0, z_0) = \cos(0) + 0 - 1 = 0\,; \qquad f_2(x_0, y_0, z_0) = 1^2 - 0 - 1 = 0\,.$$

Además, en (x_0, y_0, z_0) el menor de las derivadas parciales respecto a las variables que se pretende despejar es

$$\begin{pmatrix} \partial f_1/\partial y & \partial f_1/\partial z \\ \partial f_2/\partial y & \partial f_2/\partial z \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \begin{pmatrix} z & y \\ 2\,y & -2\,x\,e^z \end{pmatrix}\Big|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

puesto que esta matriz es regular (su determinante es $-2 \neq 0$), estamos en condiciones de aplicar el teorema de las funciones implícitas, es decir, concluimos la existencia de un intervalo abierto V de $\mathbb{R}$ que contiene a x_0, un entorno W de (y_0, z_0), y una aplicación $\boldsymbol{g} = (\varphi, \psi)\colon V \to W$ tan regular como f_1 y f_2 (de clase $\mathcal{C}^\infty$), tales que para cada $x \in V$ el punto $\big(\varphi(x), \psi(x)\big)$ es el único de W que satisface $f_1\big(x, \varphi(x), \psi(x)\big) = 0$ y $f_2\big(x, \varphi(x), \psi(x)\big) = 0$, en particular, $\varphi(0) = \varphi(x_0) = y_0 = 1$ y $\psi(0) = z_0 = 0$.

Para lo que sigue, nos serán de utilidad las funciones (idénticamente nulas) definidas en V por

$$F_1(x) = f_1\big(x, \varphi(x), \psi(x)\big) = \cos(x^2) + \varphi(x)\,\psi(x) - 1\,,$$
$$F_2(x) = f_2\big(x, \varphi(x), \psi(x)\big) = \varphi(x)^2 - 2\,x\,e^{\psi(x)} - 1\,.$$

b) Puesto que φ y ψ son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en el intervalo V, también lo será la función $g(x) = x\,\varphi(x) - x + \psi(x)$, por lo que son aplicables los resultados sobre condiciones de extremo relativo.

La condición necesaria de extremo relativo, $g'(0) = 0$, nos lleva al estudio de

$$g'(0) = \big(\varphi(x) + x\,\varphi'(x) - 1 + \psi'(x)\big)\Big|_{x=0} = \varphi(0) - 1 + \psi'(0) = \psi'(0)\,,$$

cuyo valor obtendremos derivando en las relaciones implícitas:

$$0 = F_1'(x) = -2\,x\,\mathrm{sen}(x^2) + \varphi'(x)\,\psi(x) + \varphi(x)\,\psi'(x)\,, \tag{1}$$
$$0 = F_2'(x) = 2\,\varphi(x)\,\varphi'(x) - 2\,e^{\psi(x)} - 2\,x\,e^{\psi(x)}\psi'(x)\,. \tag{2}$$

Evaluando en $x = 0$ (recordemos que $\varphi(0) = 1$ y $\psi(0) = 0$) se sigue que

$$0 = \varphi'(0)\,\psi(0) + \varphi(0)\,\psi'(0) = \psi'(0) \quad\longrightarrow\quad \psi'(0) = 0\,,$$
$$0 = 2\,\varphi(0)\,\varphi'(0) - 2\,e^{\psi(0)} = 2\,\varphi'(0) - 2\,e^0 \quad\longrightarrow\quad \varphi'(0) = 1\,,$$

y efectivamente $g'(0) = \psi'(0) = 0$ y $x_0 = 0$ es un punto crítico de g.

Para determinar si en este punto crítico g alcanza realmente un extremo debemos examinar el signo de su derivada segunda en dicho punto:

$$g''(0) = \big(\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\,\varphi''(x) + \psi''(x)\big)\Big|_{x=0} = 2\,\varphi'(0) + \psi''(0) = 2 + \psi''(0)\,.$$

Sólo queda calcular $\psi''(0)$, lo que se realiza derivando de nuevo en (1):

$$0 = F_1''(x) = -2\,\mathrm{sen}(x^2) - 4\,x^2\cos(x^2) + \varphi''(x)\,\psi(x) + \varphi'(x)\,\psi'(x) + \varphi'(x)\,\psi'(x) + \varphi(x)\,\psi''(x),$$

y al evaluar en $x = 0$ se tiene que

$$0 = \varphi''(0)\,\psi(0) + 2\,\varphi'(0)\,\psi'(0) + \varphi(0)\,\psi''(0) = \psi''(0)\,.$$

En conclusión, $g''(0) = 2 > 0$ y ya podemos afirmar que g presenta un mínimo relativo estricto en $x_0 = 0$.

(Puesto que no se requiere el valor de $\varphi''(0)$ nos podemos ahorrar la derivación de la ecuación (2) y la posterior evaluación en 0).

Soluciones del examen realizado en Febrero de 2006

CUESTIONES (Tiempo 1:45; 7 puntos cada cuestión)

1.- Estudiar, para $a > 0$, el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a^n}{n^n}$.

Solución: Pongamos $x_n = \dfrac{n!\, a^n}{n^n}$; obviamente estos términos son positivos, así que es lícito aplicar el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!\, a^n} = \lim_{n\to\infty} a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}.$$

Entonces la serie converge si $a < e$ y no converge para $a > e$.

El caso dudoso al que conduce la condición $a = e$ se puede resolver mediante el criterio de Raabe, pero es mucho más sencillo estudiar el término general aplicando la fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\,\pi\, n}\ e^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\,\pi\, n} = \infty.$$

Así pues, si $a = e$ la serie no converge pues su término general no converge hacia 0.

En resumen, la serie converge si, y sólo si, $a < e$.

2.- Demostrar que el polinomio $P(x) = x^3 - 3\,x + 1$ tiene tres raíces reales, una en cada uno de los intervalos $(-2,-1)$, $(0,1)$ y $(1,2)$.

Solución: Toda función polinómica en una variable es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. En particular, el polinomio P es continuo en los intervalos cerrados y acotados $[-2,-1]$, $[0,1]$ y $[1,2]$. Además, $P(-2) = -1$, $P(-1) = 3$, $P(0) = 1$, $P(1) = -1$ y $P(2) = 3$, esto es, $P(-2)\,P(-1) < 0$, $P(0)\,P(1) < 0$ y $P(1)\,P(2) < 0$. Entonces, por el teorema de Bolzano, P tiene al menos una raíz en cada uno de los intervalos $(-2,-1)$, $(0,1)$ y $(1,2)$. Puesto que un polinomio de grado tres puede tener a lo sumo tres raíces reales, P tiene exactamente tres raíces reales, una en cada uno de los intervalos citados.

Nota: Si no se cae en la cuenta de que el número de raíces de un polinomio no excede su grado, también se puede comprobar la unicidad de estas raíces en los correspondientes intervalos estudiando la monotonía de la función, esto es, el signo de su derivada $P'(x) = 3\,(x^2 - 1)$.

3.- Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)\big(\operatorname{tg}^2(x) + 1\big)^2}$.

Solución: Por ser $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \cos^{-2}(x)$, tenemos que

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)\big(\operatorname{tg}^2(x) + 1\big)^2} = \int \cos^2(x)\, dx = \int \frac{\cos(2\,x) + 1}{2}\, dx = \frac{\operatorname{sen}(2\,x)}{4} + \frac{x}{2} + C.$$

Nota: Esta primitiva también puede calcularse aplicando el cambio de variable $\operatorname{tg}(x) = t$ para llegar a $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$, la cual se obtiene mediante el método de recurrencia expuesto en la sección 8.1 del tema VI.

4.- Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $h(x) = o(x^3)$ en $x_0 = 0$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x h(t)\, dt$.

Solución: Definamos $H(x) = \int_0^x h(t)\, dt$. Por el teorema fundamental del cálculo, $H'(x) = h(x)$, ya que h es una función continua. Puesto que la función $g(x) = x^4$ no se anula para $x \neq 0$, al igual que su derivada, podemos aplicar la regla de L'Hôpital y la definición de "o pequeña de Landau" para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x h(t)\, dt = \lim_{x\to 0} \frac{H(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{4\,x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{4\,x^3} = 0.$$

5.- Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función f definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^5 - y\,x^5}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solución: En los puntos distintos de $(0,0)$ la continuidad de f es evidente: se trata del cociente de dos polinomios (funciones continuas), y en esos puntos no se anula el denominador $x^2 + y^2$. En cuanto al punto $(0,0)$, obsérvese que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y\,(y^4 - x^4)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,y\,(y^2 - x^2) = 0 = f(0,0).$$

Nota: También se puede calcular fácilmente el límite anterior en coordendas polares:

$$\left|f\big(\varrho\cos(\theta),\varrho\operatorname{sen}(\theta)\big)\right| = \frac{\varrho^6\,\big|\cos(\theta)\operatorname{sen}^5(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)\cos^5(\theta)\big|}{\varrho^2} \le 2\,\varrho^4 \underset{\varrho\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

6.- Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ admite inversa local diferenciable la función $g\circ f$, siendo

$$f(x,y)=\big(x^2+2\,y, x\,y\big) \quad \text{y} \quad g(u,v)=\big(e^u+v, e^v+u\big)\,.$$

Solución: Ambas funciones f y g son de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$. Entonces, la composición $g\circ f$ también es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y su diferencial en cada punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ es $(g\circ f)'(x,y)=g'(f(x,y))\circ f'(x,y)$ (regla de la cadena). Según el teorema de la función inversa, los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ en los que los que la función $g\circ f$ admite inversa local diferenciable son aquellos en los que su determinante jacobiano $\mathcal{J}(g\circ f)(x,y)=\mathcal{J}g(f(x,y))\cdot\mathcal{J}f(x,y)$ es no nulo, esto es,

$$\begin{vmatrix} e^u & 1\\ 1 & e^v\end{vmatrix}_{(u,v)=\boldsymbol{f}(x,y)} \cdot \begin{vmatrix} 2\,x & 2\\ y & x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x^2+2\,y} & 1\\ 1 & e^{x\,y}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\\ y & x\end{vmatrix} = (e^{x^2+2y+xy}-1)(2\,x^2-2\,y)\neq 0\,.$$

Para que esto suceda debe ser $y\neq x^2$ y $x^2+2\,y+x\,y\neq 0$.

7.- Se considera en $\mathbb{R}^3$ la curva intersección del plano de ecuación $2\,x+y+z=3$ y la superficie de ecuación $2\,x^2+y-z=1$. Parametrizar el arco Γ de esta curva de extremos $(0,2,1)$ y $(1,0,1)$ y determinar un vector tangente a Γ en el punto $(0,2,1)$.

Solución: Aunque no se exija en el enunciado, comprobemos que el conjunto citado es, en efecto, una curva de clase $\mathcal{C}^\infty$. Pongamos $g_1(x,y,z)=2\,x+y+z-3$ y $g_2(x,y,z)=2\,x^2+y-z-1$. Tanto g_1 como g_2 son de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$. Además, la matriz

$$\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 4\,x & 1 & -1\end{pmatrix}$$

tiene rango 2 (máximo) en cada punto. Entonces, el teorema de las funciones implícitas garantiza que el conjunto $C=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0\big\}$ se puede parametrizar localmente de forma regular. Lo anterior sugiere también cómo proceder; el hecho de que el menor correpondiente a las derivadas parciales respecto de y y z sea constante y de determinante no nulo, invita a despejar estas variables en función de x:

$$\begin{cases} 2\,x+y+z=3\\ 2\,x^2+y-z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=3-2\,x\\ y-z=1-2\,x^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x^2-x+2\\ z=x^2-x+1\end{cases}$$

para obtener una parametrización

$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)=(t\,,\,-t^2-t+2\,,\,t^2-t+1)\,.$$

Evaluando en $t=0$ y $t=1$ se tienen los extremos del arco Γ, de manera que el intervalo de parametrización debe ser $[0,1]$.

Puesto que $(0,2,1)=\boldsymbol{\gamma}(0)$, un vector tangente a Γ en $(0,2,1)$ es

$$\boldsymbol{\gamma}'(0)=\big(1,-2\,t-1,2\,t-1\big)\big|_{t=0}=(1,-1,-1)\,.$$

PROBLEMAS (Tiempo: 2:00)

1. Sea $x_1\in\big(0,\sqrt{3}\big)$. Se define $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^3}{3}$, $n\ge 1$.

a) Demostrar que $0<x_n<\sqrt{3}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. *4 ps.*

b) Estudiar la monotonía de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, deducir que es convergente y calcular su límite. *6 ps.*

c) Estudiar el carácter de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty(-1)^n x_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \log\Big(1-\frac{x_n^2}{3}\Big)$. *8 ps.*

Solución:

a) Por hipótesis el primer término de la sucesión cumple $0<x_1<\sqrt{3}$. Si para un $n\in\mathbb{N}$ suponemos que $0<x_n<\sqrt{3}$, entonces $x_n^2<3$ y $0<1-x_n^2/3<1$, de manera que también $0<x_{n+1}=x_n\big(1-x_n^2/3\big)<\sqrt{3}$. Aplicando el principio de inducción concluimos que la relación se cumple para todo $n\ge 1$.

Notas: También se puede ver que $0<x_{n+1}<\sqrt{3}$ haciendo un estudio de la gráfica de $f(x)=x-x^3/3$ para $x\in(0,\sqrt{3})$, ya que $x_{n+1}=f(x_n)$.

Un error común ha sido tratar de probar por separado que $0<x_n$ y que $x_n<\sqrt{3}$ para todo $n\ge 1$. En la hipótesis de inducción hace falta considerar conjuntamente las dos desigualdades para obtener el resultado.

b) Como $x_{n+1} - x_n = -x_n^3/3 < 0$ para todo $n \geq 1$ según el apartado a), se tiene que $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \geq 1$, es decir, la sucesión es estrictamente decreciente. Como es monótona y acotada (de nuevo de acuerdo con el apartado anterior), es una sucesión convergente. Para calcular el valor de $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$, deducimos de la relación de recurrencia que ha de ser $\ell = \ell - \ell^3/3$, de donde se obtiene que $\ell = 0$.

Nota: Si bien es cierto que $\ell = \inf\{x_n : n \geq 1\}$ por ser la sucesión decreciente, en el apartado a) sólo se afirma que 0 es una cota inferior de la sucesión, y en principio no tiene por qué ser su extremo inferior.

c) La primera serie es alternada y el criterio de Leibnitz garantiza su convergencia, ya que hemos visto que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ decrece hacia 0. En cuanto a la segunda, que es una serie de términos negativos, basta observar que

$$\log\left(1 - \frac{x_n^2}{3}\right) = \log\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \log(x_{n+1}) - \log(x_n)\,,$$

de modo que la serie es telescópica y no converge, porque $\lim_{n\to\infty} \log(x_n) = -\infty$.

> **2.** Sea f la función definida en $(0, \infty)$ por $f(x) = \operatorname{sen}(x-1) - \log(x)$.
>
> **a)** Calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en el punto $x_0 = 1$. *6 ps.*
>
> **b)** Estudiar, para $p > 0$, la convergencia absoluta de la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x-1) - \log(x)}{(x-1)^p}\,dx$. *10 ps.*

Solución: En primer lugar notemos que, efectivamente, la función f está bien definida para $x > 0$; además, puesto que el logaritmo es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ en $I = (0, \infty)$ y el seno en toda la recta, esta función es igual de regular en su dominio de definición.

a) Según lo anterior tiene sentido considerar desarrollos de Taylor de f de cualquier orden en cualquier punto $x_0 \in I$. Para dar respuesta a la pregunta basta aplicar la definición

$$f(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2}\,(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)\,,$$

que en este caso es sin duda lo más sencillo; pero también se pueden usar los desarrollos conocidos del $\operatorname{sen}(t)$ y $\log(1+t)$ en $t_0 = 0$, método que resulta más económico para calcular desarrollos de orden elevado. Explicitaremos la solución, no obstante, mediante este segundo procedimiento:

$$\operatorname{sen}(t) = t - \frac{t^3}{6} + \ldots = t + o(t^2)\,, \qquad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\,,$$

con lo que al poner $x - 1 = t$ ($t_0 = 0 \to x_0 = 1$) se deduce que

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x-1) - \log(x) = \operatorname{sen}(x-1) - \log\big(1 + (x-1)\big) \\ &= (x-1) + o\big((x-1)^2\big) - \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}\right) + o\big((x-1)^2\big) = \frac{(x-1)^2}{2} + o\big((x-1)^2\big) \end{aligned}$$

b) Pongamos $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x-1) - \log(x)}{(x-1)^p} = \dfrac{f(x)}{(x-1)^p}$. Es obvio que F es continua en $(1, \infty)$ y, en consecuencia, localmente integrable, así que la integral propuesta, $\int_1^{\infty} F(x)\,dx$, tiene sentido y es impropia por no estar el intervalo acotado superiormente, pero también porque el denominador de la fracción que define a F se anula en el extremo inferior. Para determinar el carácter de la integral elijamos cualquier punto de ese intervalo, por ejemplo 2, y examinemos por separado

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{sen}(x-1) - \log(x)}{(x-1)^p}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_2^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x-1) - \log(x)}{(x-1)^p}\,dx\,. \tag{E2.1}$$

En ambos casos utilizaremos el criterio de comparación (corolario 2.3.i del tema VIII), utilizando como referencia las funciones test de las proposiciones 3.1 y 3.3.ii) del mismo tema.

Para la primera, a tenor de lo obtenido en el apartado anterior, consideremos la función $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^p} = \dfrac{1}{(x-1)^{p-2}}$. Resulta que g es integrable en $(1, 2)$ si, y sólo si, $p - 2 < 1$, es decir, $p < 3$; por otra parte

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1) - \log(x)}{(x-1)^p}\,\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2/2 + o\big((x-1)^2\big)}{(x-1)^p}\,(x-1)^{p-2} = \frac{1}{2}\,,$$

y por ser este finito y no nulo se deduce, en primer lugar que las dos funciones comparadas tienen el mismo signo en un cierto intervalo $(1, \delta)$ y después que las integrales correspondientes tiene el mismo carácter; así pues la integral de F en $(1, 2)$ es absolutamente convergente si, y sólo si, $p < 3$.

Para la segunda consideremos la función $h(x) = \dfrac{\log(x)}{x^p} = \dfrac{1}{x^p|\log(x)|^{-1}}$, que es integrable en $(2,\infty)$ si, y sólo si, $p > 1$. Se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x-1) - \log(x)}{(x-1)^p} \frac{1}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{(x-1)^p} \frac{\operatorname{sen}(x-1) - \log(x)}{\log(x)} = -1\,.$$

Entonces F mantiene el signo constante (negativo) a partir de un punto en adelante y su integral en $(2,\infty)$ tiene el mismo carácter que la de h, es decir, converge absolutamente si, y sólo si, $p > 1$.

En conclusión, la integral de F en $(1,\infty)$ converge absolutamente si, y sólo si, convergen las dos integrales de (E2.1) y esto ocurre si $1 < p < 3$.

Notas: También es posible deducir el carácter de $\int_2^\infty F(x)\,dx$ aplicando el criterio de comparación 2.1 del tema VIII, acotando

$$0 \le h_1(x) = \frac{\log(x) - 1}{x^p} \le \big|F(x)\big| = \frac{\big|\operatorname{sen}(x-1) - \log(x)\big|}{(x-1)^p} \le \frac{\log(x)+1}{(x-1)^p} = h_2(x)\,, \qquad x > e\,,$$

y comparando luego h_1 y h_2 con h. Pero no es suficiente aplicar el criterio 2.1 sólo con la desigualdad $|F| \le h_2$, pues esto implica que si h_2 es integrable en $(2,\infty)$ (i.e., si $p > 1$) también lo es F, y no el recíproco.

El desarrollo de Taylor de f en $x_0 = 1$ aproxima bien a $f(x)$ cuando x tiende hacia 1, pero en ningún otro punto. No es lícito, para estudiar la segunda integral de (E2.1), sustituir $f(x)$ por el monomio $(x-1)^2/2$.

3. Sea f la función definida en $\mathbb{R}^3$ por $f(x,y,z) = e^{x^2+z} + \cos(y+z) - 2$.

a) Probar que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $z = \varphi(x,y)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de $(x_0,y_0) = (0,0)$, y con $\varphi(0,0) = 0$. *3 ps.*

b) Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *6 ps.*

c) ¿Presenta φ un extremo relativo en $(0,0)$? *8 ps.*

Solución:

a) La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, por ser el resultado de operaciones válidas (suma, composición) de funciones de esa clase (polinómicas, exponencial, coseno). Además, $f(0,0,0) = 0$ y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = \left(e^{x^2+z} - \operatorname{sen}(y+z)\right)\Big|_{(0,0,0)} = 1 \ne 0,$$

por lo que el teorema de la función implícita permite asegurar que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $z = \varphi(x,y)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno U de $(x_0,y_0) = (0,0)$, con $\varphi(0,0) = 0$ y de modo que

$$e^{x^2+\varphi(x,y)} + \cos(y + \varphi(x,y)) - 2 = 0, \qquad (x,y) \in U. \tag{E3.1}$$

b) El límite es indeterminado, pues la continuidad de φ en $(0,0)$ implica que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = \varphi(0,0) = 0.$$

Calcularemos el desarrollo limitado de orden 1 de φ en $(0,0)$, para lo que necesitamos las derivadas parciales primeras de φ en dicho punto. Derivando en (E3.1) respecto de x obtenemos que, para cada $(x,y) \in U$,

$$e^{x^2+\varphi(x,y)}\Big(2x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\Big) - \operatorname{sen}\big(y + \varphi(x,y)\big)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 0. \tag{E3.2}$$

Evaluando en $(0,0)$ deducimos que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = 0$. Si derivamos en (E3.1), ahora respecto de y, deducimos que para cada $(x,y) \in U$,

$$e^{x^2+\varphi(x,y)}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) - \operatorname{sen}\big(y + \varphi(x,y)\big)\Big(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\Big) = 0, \tag{E3.3}$$

y particularizando en $(0,0)$ se tiene que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) = 0$. Por lo tanto, el desarrollo buscado es

$$\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)\,(x-0) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)\,(y-0) + o\big(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\big) = o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big),$$

lo que implica que, por la propia definición de la notación de Landau,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

c) Puesto que φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U, para que f pueda presentar un extremo relativo en el punto $(0,0)$ éste ha de ser un punto crítico, lo que ya se ha comprobado en el apartado anterior.

Ahora bien, la condición de punto crítico no es suficiente para la existencia de extremo, y se hace necesario el estudio de la matriz hessiana de φ en ese punto. Pasamos al cálculo de dicha matriz:

Derivando en (E3.2) respecto de x, se tiene que para cada $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned} e^{x^2+\varphi(x,y)}\Big(2x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\Big)^2 \;+\; e^{x^2+\varphi(x,y)}\Big(2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)\Big) \\ -\; \cos\big(y+\varphi(x,y)\big)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\Big)^2 - \operatorname{sen}\big(y+\varphi(x,y)\big)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Si evaluamos en $(0,0)$ resulta que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0) = -2$.

Ahora derivamos en (E3.2) respecto de y, obteniendo que para cada $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned} e^{x^2+\varphi(x,y)}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\Big(2x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\Big) + e^{x^2+\varphi(x,y)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) \\ -\cos\big(y+\varphi(x,y)\big)\Big(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) - \operatorname{sen}\big(y+\varphi(x,y)\big)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) = 0; \end{aligned}$$

evaluando en $(0,0)$ se deduce que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$.

Finalmente, si se deriva en (E3.3) respecto de y resulta que para cada $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned} e^{x^2+\varphi(x,y)}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\Big)^2 \;+\; e^{x^2+\varphi(x,y)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y) \\ -\; \cos\big(y+\varphi(x,y)\big)\Big(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\Big)^2 - \operatorname{sen}\big(y+\varphi(x,y)\big)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Particularizando en $(0,0)$ tenemos que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0) = 1$.

En conclusión, la hessiana de φ en $(0,0)$ es

$$H\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que representa una forma cuadrática indefinida, lo que garantiza que φ no presenta extremo en el punto $(0,0)$.

Nota: En muchas de las respuestas se ha obtenido el desarrollo de Taylor de orden 2 de φ en $(0,0)$, y se ha utilizado éste para el cálculo del límite en el apartado segundo. Por supuesto, esto es perfectamente válido, únicamente se hacen con anterioridad unos cálculos que sólo serán estrictamente necesarios para la respuesta del tercer apartado.

Soluciones del examen realizado en Septiembre de 2006

CUESTIONES (Tiempo 1:45; 7 puntos cada cuestión)

1.- Se supone que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^2} = 2$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n^3}$.

Solución: Como la sucesión del denominador $\{n^3\}$ es estrictamente creciente y tiende a $+\infty$, podemos aplicar el criterio de Stolz. Calculamos pues el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{3n^2 + 3n + 1},$$

cuyo valor es $2/3$, como se comprueba fácilmente sin más que dividir numerador y denominador por $(n+1)^2$ y aplicar la hipótesis.

2.- Determinar el carácter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2\,n-1}\right)^n (-1)^{n(n-1)/2}$.

Solución: Lo más sencillo es comprobar que la serie es absolutamente convergente usando el criterio de la raíz: si llamamos $a_n = \left(\dfrac{n}{2\,n-1}\right)^n (-1)^{n(n-1)/2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\,n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Nota: Muchas de las respuestas proporcionadas en los exámenes afirman que la serie es alternada, lo que no es cierto. Por lo tanto, no es aplicable el criterio de Leibnitz. Sin embargo, puesto que la sucesión de signos de los términos es $+, -, -, +, +, -, -, +, +, \ldots$, no es difícil aplicar el criterio de Dirichlet.

3.- Demostrar que la ecuación $x - \operatorname{sen}(x) = 5$ tiene una única solución en el intervalo $[3, 6]$.

Solución: La función $f(x) = x - \operatorname{sen}(x) - 5$ es continua en toda la recta real y toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo $[3, 6]$. En estas condiciones el teorema de Bolzano garantiza que existe al menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[3, 6]$. Para demostrar la unicidad, basta realizar un estudio de la monotonía de la función. Para ello calculamos su derivada, $f'(x) = 1 - \cos(x)$, que toma valores estrictamente mayores que 0 en el intervalo $[3, 6]$, y por tanto f es estrictamente creciente en dicho intervalo, de manera que puede tomar el valor 0 una única vez.

4.- Estudiar, en función de α, el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha \log\big(\operatorname{sen}(x)\big)}$.

Solución: Si $x \in (0, 1/2]$, la función $\operatorname{sen}(x)$ toma valores en $(0, \operatorname{sen}(1/2)] \subset (0, 1)$, de modo que la función $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \log\big(\operatorname{sen}(x)\big)}$ está bien definida y es continua en $(0, 1/2]$. Por tanto f es localmente integrable en $(0, 1/2]$. Notemos también que $f(x) < 0$ para cada $x \in (0, 1/2]$, es decir, $|f(x)| = -f(x)$, y entonces en este caso la integral impropia es convergente si y sólo si es absolutamente convergente (recuérdese que la convergencia absoluta implica siempre la convergencia de la integral impropia, pero el recíproco en general no es cierto). Según aparece en el formulario, Tema 8, la integral impropia

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\log(x)|} = \int_0^{1/2} \frac{-dx}{x^\alpha \log(x)}$$

converge únicamente si $\alpha < 1$. Ahora bien, como $\operatorname{sen}(x) \sim_0 x$, y $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \neq 1$, se tiene que $\log\big(\operatorname{sen}(x)\big) \sim_0 \log(x)$ (véase la proposición 7.7 del Tema 4). Por tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^\alpha \log(x)}{-x^\alpha \log\big(\operatorname{sen}(x)\big)} = 1,$$

y aplicando el criterio de comparación (para integrales de funciones positivas), es inmediato que la integral impropia considerada converge si, y sólo si, $\alpha < 1$.

5.- Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función f definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^5}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solución: La función f es cociente de dos funciones continuas en todo $\mathbb{R}^2$, y por tanto es continua en todo punto que no anule su denominador, es decir, en todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Falta estudiar la continuidad en

$(0,0)$. En este caso no existe el límite de f en $(0,0)$ y por tanto f no es continua en dicho punto. Para verlo, basta considerar los dos siguientes límites a través de sendos subespacios:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2+y^5}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^5}{y^4} = 0\,, \quad \text{mientras que} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2+y^5}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1\,.$$

Nota: Un error frecuente ha sido realizar un cambio a coordenadas polares y estudiar el límite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2(\theta)+\rho^5\operatorname{sen}^5(\theta)}{\rho^2\cos^2(\theta)+\rho^4\operatorname{sen}^4(\theta)} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cos^2(\theta)+\rho^3\operatorname{sen}^5(\theta)}{\cos^2(\theta)+\rho^2\operatorname{sen}^4(\theta)}$$

sin tener en cuenta que dicho límite ha de estudiarse de forma uniforme para $\theta\in[0,2\pi]$. Obsérvese que para $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ se tiene que $\cos(\theta)=0$ (se trata del primer límite arriba calculado) y para $\theta=0$ y $\theta=\pi$ es $\operatorname{sen}(\theta)=0$ (que corresponde al segundo límite).

6.- Estudiar los extremos relativos de la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-(x+y)}$.

Solución: La función es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}^2$ y en particular diferenciable. Por tanto sus extremos relativos se encontrarán entre los puntos críticos, es decir, los puntos (x,y) tales que $f'(x,y)=(0,0)$. Se ha de resolver entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x-x^2-y^2)\,e^{-(x+y)} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y-x^2-y^2)\,e^{-(x+y)} = 0\,. \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones se tiene que $(2x-2y)\,e^{-(x+y)}=0$, y como la exponencial no se anula, ha de ser $x=y$. Sustituyendo esta condición en cualquiera de las dos ecuaciones, se obtienen finalmente los dos puntos críticos $(0,0)$ y $(1,1)$. A continuación, previo cálculo de las derivadas de segundo orden,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2-4x+x^2+y^2)\,e^{-(x+y)}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2-4y+x^2+y^2)\,e^{-(x+y)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = (-2x-2y+x^2+y^2)\,e^{-(x+y)}\,,$$

examinamos las matrices hessianas:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\,e^{-2} \\ -2\,e^{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente la primera es definida positiva y por tanto f presenta un mínimo relativo en el origen. Sin embargo, la segunda matriz es indefinida (tiene un valor propio estrictamente positivo y otro estrictamente negativo), y f presenta un punto de silla en $(1,1)$, es decir, f no presenta un extremo relativo en $(1,1)$.

7.- Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^3+3\,x\,y-2$ en el punto $(1,1,2)$.

Solución: Se trata de una superficie definida de forma implícita en un entorno de $(1,1,2)$ por la ecuación $g(x,y,z)=0$, para la función $g(x,y,z) = x^3+3\,x\,y-z-2$. En este caso el plano tangente a la superficie en el punto $(1,1,2)$ queda determinado por el vector normal $\nabla g(1,1,2)$. Como $\nabla g(x,y,z) = (3\,x^2+3\,y, 3\,x, -1)$, resulta $\nabla g(1,1,2) = (6,3,-1)$, y la ecuación del plano es $6(x-1)+3(y-1)-(z-2)=0$.

PROBLEMAS (Tiempo: 2:00)

1. Se considera la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$.

a) Probar que la serie es convergente. Denotaremos por S su suma. *4 ps.*

b) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, y $x_{n+1} = (n+1)(x_n + x_{n-1})$ para cada $n \geq 1$. Demostrar que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $x_n - (n+1)\,x_{n-1} = (-1)^{n-1}$. *5 ps.*

c) Utilizando la relación anterior expresar la serie de forma telescópica. *4 ps.*

d) Calcular el valor del límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{(n+1)!}$ en función de S. *5 ps.*

Solución:

a) Lo más sencillo es probar la convergencia absoluta de la serie (que implica su convergencia): si denotamos por a_n al término general de la serie en cuestión, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}$, y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1\,,$$

con lo que el criterio del cociente permite concluir.

Nota: También es posible aplicar el criterio de Leibnitz, puesto que la serie es alternada y de términos decrecientes en valor absoluto hacia 0.

b) Para demostrar que $x_n - (n+1)\,x_{n-1} = (-1)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, haremos uso el principio de inducción. Para ello, en primer lugar comprobamos que la igualdad es cierta para $n = 1$, esto es, que $x_1 - 2\,x_0 = (-1)^0 = 1$, la cual, al sustituir $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$, se convierte en la igualdad $1 = 1$, trivialmente cierta. Ahora, supongamos la igualdad cierta para un natural $n > 1$ arbitrario, esto es, que $x_n - (n+1)\,x_{n-1} = (-1)^{n-1}$, y demostremos que, entonces, la igualdad también se verifica para su sucesor $n+1$, esto es, que

$$x_{n+1} - (n+2)\,x_n = (-1)^n\,.$$

Puesto que $x_{n+1} = (n+1)(x_n + x_{n-1})$ para cada $n \geq 1$, tenemos que

$$x_{n+1} - (n+2)\,x_n = (n+1)(x_n + x_{n-1}) - (n+2)\,x_n = -x_n + (n+1)\,x_{n-1}$$

y, por hipótesis de inducción, la última expresión es igual a $(-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n$. Así pues, la igualdad es cierta para $n+1$ y, por el principio de inducción, la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Debemos encontrar una sucesión de números reales $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})\,.$$

Utilizando la relación del apartado **b)** tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n - (n+1)\,x_{n-1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{(n+1)!} - \frac{x_{n-1}}{n!}\right)\,.$$

Así pues, basta tomar $b_n = \dfrac{x_n}{(n+1)!}$ para todo $n \geq 0$.

d) Según el apartado **c)** y las propiedades generales de las series telescópicas, la suma satisface

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} b_n - b_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{(n+1)!} - \frac{x_0}{1!}\,,$$

esto es,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{(n+1)!} = S + 1\,.$$

2. Para $x \in \mathbb{R}$ sea $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos(x)} e^{t^2}\,dt\,.$

a) Determinar los $x \in \mathbb{R}$ en los que $f(x) = 0$, en los que $f(x) > 0$ y en los que $f(x) < 0$. *4 ps.*

b) Demostrar que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$, periódica y acotada en $\mathbb{R}$. *5 ps.*

c) Estudiar los extremos relativos y absolutos de f. *5 ps.*

d) Calcular $\lim\limits_{x\to\pi/2^+} f(x)\,\mathrm{tg}(x)$. *5 ps.*

Solución:

a) La función $f(x)$ está definida mediante una integral cuyos extremos de integración son 0 y $\cos(x)$. Puesto que $\cos(x)$ toma valores en el intervalo $[-1, 1]$, el intervalo de integración es acotado para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, el integrando e^{t^2} es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ y acotada (por tanto integrable) en el intervalo $[-1, 1]$:

$$1 = e^0 \leq e^{t^2} \leq e^1 = e \quad \text{para cada} \quad t \in [-1, 1]\,.$$

Así pues, la integral que define $f(x)$ es una integral de Riemann para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, la acotación anterior implica en particular que el integrando es estrictamente positivo en el intervalo de interés. De este hecho y la monotonía de la integral se deduce que

i) $f(x) = 0$ si y sólo si los extremos de integración coinciden, esto es, $\cos(x) = 0$;

ii) $f(x) > 0$ si y sólo si el extremo superior de integración es estrictamente mayor que el extremo inferior, esto es, $\cos(x) > 0$;

iii) $f(x) < 0$ si y sólo si el extremo superior de integración es estrictamente menor que el extremo inferior, esto es, $\cos(x) > 0$.

En otras palabras:

i) $f(x) = 0$ si y sólo si $x = \pi/2 + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

ii) $f(x) > 0$ si y sólo si $x \in (-\pi/2 + 2\,k\,\pi, \pi/2 + 2\,k\,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

iii) $f(x) < 0$ si y sólo si $x \in (\pi/2 + 2\,k\,\pi, 3\pi/2 + 2\,k\,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ por ser los extremos de integración de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y serlo también el integrando en el intervalo $[-1, 1]$. Para verlo basta aplicar el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para obtener la derivada de f:

$$f'(x) = -e^{\cos(x)^2}\operatorname{sen}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

la cual es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, por ser composición y producto de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$.

La función f es periódica en $\mathbb{R}$ de periodo 2π por serlo $\cos(x)$, pues

$$f(x + 2\pi) = \int_0^{\cos(x+2\pi)} e^{t^2}\,dt = \int_0^{\cos(x)} e^{t^2}\,dt = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

La función f es acotada en $\mathbb{R}$ ya que, por la monotonía de la integral y la acotación del integrando dada en el apartado anterior,

$$|f(x)| = \Big|\int_0^{\cos(x)} e^{t^2}\,dt\Big| \le \int_0^1 e\,dt = e\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

c) La variación de f depende de la variación del extremo superior de integración, el cual es periódico. Siendo el integrando positivo, es evidente que f alcanzará su valor máximo $\int_0^1 e^{t^2}dt$ cuando $\cos(x) = 1$, esto es, $x = 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, y que f alcanzará su valor mínimo $\int_0^{-1} e^{t^2}dt = -\int_{-1}^0 e^{t^2}dt$ cuando $\cos(x) = -1$, esto es, $x = (2\,k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. El mismo resultado se obtiene estudiando los ceros de f' y el signo de f'' en ellos. Estos extremos relativos son también absolutos, ya que f es periódica y toma el mismo valor en todos los máximos y el mismo valor en todos mínimos.

d) Nos enfrentamos a una indeterminación, pues

$$\lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = \int_0^{0^-} e^{t^2}\,dt = 0\,, \qquad \lim_{x\to\pi/2^+} \operatorname{tg}(x) = -\infty\,.$$

Es posible entonces aplicar la regla de l'Hôpital como sigue:

$$\lim_{x\to\pi/2^+} f(x)\operatorname{tg}(x) = \lim_{x\to\pi/2^+} \frac{f(x)}{1/\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x\to\pi/2^+} \frac{-e^{\cos(x)^2}\operatorname{sen}(x)}{-1/\operatorname{sen}(x)^2} = 1\,.$$

3. Se consideran las funciones definidas en $\mathbb{R}^3$

$$g_1(x, y, z) = x - y^2 + e^{xz} - 1\,, \qquad g_2(x, y, z) = x^2 + e^y + z - 1\,.$$

a) Demostrar que la ecuación $(g_1, g_2) = (0, 0)$ permite despejar x y z como funciones implícitas de y, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno V de $y_0 = 0$, con $x(0) = 0$ y $z(0) = 0$. *4 ps.*

b) Estudiar si la función h, definida en V por $h(y) = x(y) + z(y)^2$, presenta un extremo relativo en $y_0 = 0$. *10 ps.*

Solución:

a) Basta comprobar que se satisfacen las hipótesis del teorema de la función implícita. Es inmediato que tanto g_1 como g_2 son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^3$ y que $g_1(0, 0, 0) = g_2(0, 0, 0) = e^0 - 1 = 0$.

Por otra parte, el determinante de la matriz de derivadas respecto a las variables que se pretende despejar en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\det\left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, z)}(0, 0, 0)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \ne 0\,.$$

Con todo, el citado teorema afirma que existen dos funciones $x(y)$, $z(y)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en un entorno V de $y_0 = 0$, y un abierto W de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $(x_0, z_0) = (0, 0)$, y tales que para cada $y \in V$, $\boldsymbol{\varphi}(y) = \big(x(y), z(y)\big)$ es el único punto de W que satisface

$$g_1\big(x(y), y, z(y)\big) = x(y) - y^2 + e^{x(y)\,z(y)} - 1 = 0 \quad \text{y} \quad g_2\big(x(y), y, z(y)\big) = x(y)^2 + e^y + z(y) - 1 = 0\,; \quad [1]$$

en particular, $x(0) = z(0) = 0$.

b) De acuerdo con el apartado anterior, h está definida en el entorno V de 0 y es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Para estudiar el posible extremo relativo de h en $y_0 = 0$ necesitamos, primero, determinar si dicho punto es crítico para h, es decir, si $h'(0) = 0$: se tiene que

$$h'(y) = x'(y) + 2\,z(y)\,z'(y) \qquad \text{y por tanto} \qquad h'(0) = x'(0)\,. \qquad [2]$$

Luego, si la respuesta ha sido afirmativa (la condición es necesaria, pero no suficiente), deberemos estudiar el signo de $h''(0)$; notemos que

$$h''(y) = x''(y) + 2\,z'(y)\,z'(y) + 2\,z(y)\,z''(y) \qquad \text{con lo que} \qquad h''(0) = x''(0) + 2\,z'(0)^2. \qquad [3]$$

Necesitamos, por tanto, calcular los valores de las derivadas primeras y segundas de x y la derivada de z en el punto $y_0 = 0$; para ello, recurrimos a las relaciones implícitas [1]: derivando la primera se obtiene que

$$x'(y) - 2\,y + e^{x(y)\,z(y)}\big(x'(y)\,z(y) + x(y)\,z'(y)\big) = 0, \qquad [4]$$

y puesto que $x(0) = z(0) = 0$, evaluando en $y = 0$ se deduce que $x'(0) - e^0 \cdot 0 = 0$. Por tanto $h'(0) = x'(0) = 0$ y, en efecto, $y_0 = 0$ es un punto crítico de h.

Derivando la segunda igualdad de [1] se sigue que

$$2\,x(y)\,x'(y) + e^y + z'(y) = 0, \quad \text{por tanto} \quad 0 + e^0 + z'(0) = 0, \quad \text{es decir,} \quad z'(0) = -1.$$

Falta calcular $x''(0)$, para lo cual derivamos de nuevo respecto de y la igualdad [4] obteniendo que

$$x''(y) - 2 + e^{x(y)\,z(y)}\big(x'(y)\,z(y) + x(y)\,z'(y)\big)^2 + e^{x(y)\,z(y)}\big(x''(y)\,z(y) + 2\,x'(y)\,z'(y) + x(y)\,z''(y)\big) = 0,$$

y puesto que $x(0) = z(0) = x'(0) = 0$, evaluando en $y = 0$ se deduce que $x''(0) = 2$.

Finalmente $h''(0) = x''(0) + 2\,z'(0)^2 = 2 + 2(-1)^2 = 4 > 0$, y resulta que la función h presenta un mínimo relativo en 0.