COMPLEMENTOS de MATEMÁTICAS

APUNTES DE TEORÍA

Y

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS

INGENIERO TÉCNICO DE TELECOMUNICACIÓN

Especialidad Telemática

Universidad de Valladolid

Javier Sanz Gil, Luis A. Tristán Vega

UVa Departamento de Análisis Matemático
y Didáctica de la Matemática

Contenido

Capítulo 1

Funciones de Variable Compleja I

Partiendo del conocimiento del cuerpo de los números complejos y de las operaciones definidas en él, se introducen las sucesiones y series de números complejos, lo que permite definir rigurosamente las funciones elementales. Tras observar que las nociones topológicas en $\mathbb{C}$ son las conocidas en $\mathbb{R}^2$, se desarrolla la teoría elemental de las funciones derivables en abiertos de $\mathbb{C}$, denominadas holomorfas.

1.1. Sucesiones y series de números complejos

Definición 1.1. Una *sucesión de números complejos* es una aplicación $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Se representa de forma más compacta por el símbolo $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $z_n = \sigma(n)$; z_n se denomina *término n-ésimo* de la sucesión. Una *subsucesión* de una dada $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la composición de una sucesión estrictamente creciente de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ con aquella, y se representa por $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Observación 1.2. En ciertos campos de la Ciencia, cuando la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ representa una *señal discreta* (dicho mas correctamente "*en tiempo discreto*"), es usual representar por $z[n]$ el término z_n. Esto se hace para distinguir de las señales en tiempo continuo, denotadas de la forma usual $f(t)$.

Definición 1.3. Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es *acotada* si existe $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.4. Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es acotada si, y sólo si, lo son las sucesiones de números reales $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.5. Se dice que una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es *convergente* si existe un número complejo z verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que $|z_n - z| < \varepsilon$".

En este caso el número z, que es único, se llama *límite convergente* de la sucesión; se dice que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z y se escribe $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Proposición 1.6. Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Propiedades 1.7.

i) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0, entonces la sucesión $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

ii) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número complejo a, entonces la sucesión $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $|a|$. *El recíproco, en general, no es cierto*; no obstante, es inmediato a partir de la definición que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 si, y sólo si, la sucesión $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

iii) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número complejo a y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número complejo b, entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (respectivamente, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$) converge hacia el número complejo $a + b$ (resp. $a\,b$).

IV) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número complejo a y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número complejo b, con $b \neq 0$, $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{{}^{a_n}/_{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número complejo ${}^{a}/_{b}$.

Definición 1.8. Dada una sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se le puede asociar una sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de *sumas parciales*: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, construyendo así la *serie* de *término general* a_n, que se representa por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición 1.9. Se dice que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es *convergente* si la sucesión de sus sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. En este caso el número complejo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ se llama *suma* de la serie y es usual escribir, abusando de la notación,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Teorema 1.10 (Condición necesaria de convergencia). Si la serie de números complejos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 1.11. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$ son convergentes. En este caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n).$$

Ejemplos 1.12.

I) Si $a, r \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, la serie (*geométrica*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\, r^n$ converge si, y sólo si, $|r| < 1$; en este caso, su suma es el número complejo

$$\frac{a}{1-r}.$$

II) Una serie *telescópica* de números complejos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ es convergente si, y sólo si, la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente; en este caso, su suma es el número complejo

$$\lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

Definición 1.13. Se dice que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es *absolutamente convergente* si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Teorema 1.14. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es absolutamente convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$ son absolutamente convergentes.

Proposición 1.15. Si la serie de números complejos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente. Además,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Proposición 1.16 (Criterio de comparación). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos y sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie de términos positivos (es decir, $b_n \in \mathbb{R}$ y $b_n \geq 0$). Se supone que existe un número natural n_0, tal que

$$|a_n| \leq b_n, \text{ para cada } n \geq n_0.$$

Entonces, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Habitualmente la comparación se efectúa mediante el estudio de los cocientes $|a_n|/b_n$, como se concreta en el siguiente resultado.

Corolario 1.17. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series como en el resultado anterior. Se supone que $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = L \in \mathbb{R}.$$

Entonces, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

El criterio de comparación adopta múltiples formas, más o menos generales. Entre otras, se puede citar:

Proposición 1.18 (Criterio de d'Alembert o del Cociente). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de números complejos no nulos y existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda \text{ (finito ó infinito)},$$

la serie converge (de hecho, absolutamente) si $\lambda < 1$, y no converge si $\lambda > 1$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

Proposición 1.19 (Criterio de la raíz). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de números complejos y existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \text{ (finito ó infinito)},$$

la serie converge (de hecho, absolutamente) si $\lambda < 1$, y no converge si $\lambda > 1$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

Observación 1.20. Aunque no se deduce de ninguno de los criterios anteriores, razonamientos elementales muestran que la serie de números reales positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad \alpha > 0,$$

es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$. Estas series se utilizan frecuentemente como modelo con las que comparar otras de aspecto más complicado.

Introducimos ahora una operación 'producto' de series y alguna de sus propiedades.

Definición 1.21. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de números complejos. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, donde

$$c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_0, \quad n \geq 0,$$

se llama *producto de Cauchy* de las series dadas.

Teorema 1.22. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de números complejos.

i) Criterio de Mertens: Si una es convergente y la otra es absolutamente convergente, el producto de Cauchy de ambas es convergente. Además, su suma es el producto de las sumas de las series factores:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

ii) Si ambas series son absolutamente convergentes, su producto de Cauchy es absolutamente convergente.

1.2. Funciones elementales

Admitiendo la existencia de las funciones trigonométricas (reales de variable real) 'seno' y 'coseno', se puede definir la exponencial compleja como sigue: Si $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ ($x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$), se define la *exponencial de* z, denotada por $\exp(z)$, como

$$\exp(z) = e^x \big(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y) \big)\,.$$

De aquí se deduce inmediatamente que para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) \in \mathrm{Arg}\big(\exp(z)\big),$$

donde, para un número complejo w, $\mathrm{Arg}(w)$ es el conjunto de todos sus argumentos. También,

$$\exp(z) = 1 \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad z = 2\,k\,\pi\,i \;\; \text{para algún } k \in \mathbb{Z},$$

de donde

$$\exp(z) = \exp(w) \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad z = w + 2\,k\,\pi\,i \;\; \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, la construcción habitual de las funciones trigonométricas reales es más intuitiva que rigurosa. La siguiente sección se destina a presentar la construcción de estas y otras funciones elementales con todo rigor, para lo que sólo es necesario hacer uso de la aritmética compleja y de otros resultados, fundamentalmente relativos a series numéricas.

Definición 1.23. Para cada $z \in \mathbb{C}$ se define $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, denominada *exponencial* de z (la serie que la proporciona es convergente para todo z).

Propiedades 1.24.

i) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$.

ii) $\exp(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

iii) $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

iv) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $\exp(z) = e^z$.

Observación 1.25. De acuerdo con esta última propiedad, es habitual representar, también cuando $z \notin \mathbb{R}$, $\exp(z) = e^z$.

La función exponencial no es inyectiva, pero sí admite inversa si se restringe adecuadamente su dominio. Comentamos a continuación la construcción de dichas inversas, denominadas ramas del logaritmo.

Definición 1.26. Dado $c \in \mathbb{R}$ denotaremos por B_c a la banda

$$B_c = \{z \in \mathbb{C} : c \leq \mathrm{Im}(z) < c + 2\,\pi\} \simeq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y < c + 2\,\pi\}\,,$$

y por $E_c : B_c \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a la restricción de exp a B_c, es decir, $E_c(z) = \exp(z)$, $z \in B_c$.

Nótese que si $c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe en el intervalo $[c, c + 2\,\pi)$ un único argumento de z. A partir de aquí no es difícil probar el siguiente resultado.

Proposición 1.27. Para cada $c \in \mathbb{R}$, la aplicación E_c es una biyección (es inyectiva y suprayectiva) de B_c en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Es lícito considerar, a tenor del resultado precedente, la aplicación inversa

$${E_c}^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to B_c\,.$$

Definición 1.28. La aplicación inversa de E_c se denota por $\log_c$ y se denomina *rama* o *determinación del logaritmo con rango* B_c; cuando $c = -\pi$ recibe el nombre particular de *rama principal del logaritmo.*

Observaciones 1.29.

i) Un sencillo cálculo muestra que si $c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$\log_c(z) = \ln(|z|) + i\,\arg(z)\,,$$

donde $\arg(z)$ es el único elemento de $\mathrm{Arg}(z)$ que pertenece al intervalo $[c, c + 2\,\pi)$. En particular, si se toma la rama principal del logaritmo, resulta que

$$\log_{-\pi}(x) = \ln(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

II) Para un número complejo $z \neq 0$, la expresión '$\log(z)$' representa el conjunto de todos los valores de las ramas del logaritmo en el punto z. Es decir, fijado un argumento de z, $\arg(z)$,

$$\log(z) = \big\{ \ln(|z|) + \arg(z)\, i + 2\, k\, \pi\, i : k \in \mathbb{Z} \big\} .$$

Definición 1.30. Sea z un número complejo, $z \neq 0$. Fijada una rama del logaritmo con rango B_c, se define para $w \in \mathbb{C}$ la *potencia* de base z y exponente w por

$$z^w = \exp\big(w \log_c(z)\big) .$$

En caso de que no se especifique lo contrario, la expresión z^w denotará todos los valores posibles de las potencias en las distintas determinaciones.

Ejemplo 1.31. En la rama principal, $i^i = \exp\big(i\,(\pi\, i/2)\big) = e^{-\pi/2}$. El resto de los valores en las distintas determinaciones viene dado de forma genérica por

$$i^i = \exp\Big(i\,\big(\pi\, i/2 + 2\, k\, \pi\, i\big)\Big) = e^{-\pi/2 - 2\, k\, \pi}\,, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Las funciones trigonométricas se definen en términos de la función exponencial, lo que se presenta a continuación, y sus propiedades de periodicidad, etc., se deducen de sus expresiones en forma de serie.

Definición 1.32. Si $z \in \mathbb{C}$, se definen

$$\cos(z) = \frac{\exp(i\, z) + \exp(-i\, z)}{2}\,, \qquad \operatorname{sen}(z) = \frac{\exp(i\, z) - \exp(-i\, z)}{2\, i}\,,$$

denominadas *coseno* y *seno* de z, respectivamente.

Propiedades 1.33. Si $x \in \mathbb{R}$ se verifica:

I) $\exp(-i\, x) = \overline{\exp(i\, x)}$.

II) $|\exp(i\, x)| = 1$.

III) $\cos(x) = \operatorname{Re}\big(\exp(i\, x)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\, n)!}\, x^{2\, n}$.

IV) $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{Im}\big(\exp(i\, x)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\, n+1)!}\, x^{2\, n+1}$.

V) $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$.

Proposición 1.34. Las funciones $\operatorname{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son periódicas, de periodo $2\,\pi$, es decir,

$$\cos(z + 2\,\pi) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(z + 2\,\pi) = \operatorname{sen}(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C} .$$

Propiedades 1.35. Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica:

I) $\exp(iz) = \cos(z) + i \operatorname{sen}(z)$ y $\exp(-iz) = \cos(z) - i \operatorname{sen}(z)$.

II) $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(-z)$ y $\cos(z) = \cos(-z)$.

III) $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$.

IV) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\operatorname{sen}(w)$.

V) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$.

VI) $\operatorname{sen}(2\, z) = 2\, \operatorname{sen}(z)\cos(z)$ y $\cos(2\, z) = \cos^2(z) - \operatorname{sen}^2(z)$.

VII) $\operatorname{sen}^2(z) = \dfrac{1 - \cos(2\, z)}{2}$ y $\cos^2(z) = \dfrac{1 + \cos(2\, z)}{2}$.

VIII) $\operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w) = \dfrac{\cos(z - w) - \cos(z + w)}{2}$.

IX) $\cos(z)\cos(w) = \dfrac{\cos(z - w) + \cos(z + w)}{2}$.

X) $\operatorname{sen}(z)\cos(w) = \dfrac{\operatorname{sen}(z + w) + \operatorname{sen}(z - w)}{2}$.

xi) $\operatorname{sen}(z)+\operatorname{sen}(w)=2\operatorname{sen}\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$.

xii) $\operatorname{sen}(z)-\operatorname{sen}(w)=2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{z-w}{2}\right)$.

xiii) $\cos(z)+\cos(w)=2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$.

xiv) $\cos(z)-\cos(w)=-2\operatorname{sen}\left(\frac{z+w}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{z-w}{2}\right)$.

Propiedades 1.36.

i) $\cos(0)=1$ y $\operatorname{sen}(0)=0$.

ii) $\cos\left(\pi/2\right)=0$ y $\operatorname{sen}\left(\pi/2\right)=1$.

iii) $\cos(\pi)=-1$ y $\operatorname{sen}(\pi)=0$.

iv) $\operatorname{sen}(z+\pi)=-\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z+\pi)=-\cos(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

v) $\operatorname{sen}\left(\pi/2-z\right)=\cos(z)$ y $\cos\left(\pi/2-z\right)=\operatorname{sen}(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

vi) $\operatorname{sen}(z)=0$ si, y sólo si, $z=k\,\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

vii) $\cos(z)=0$ si, y sólo si, $z=\pi/2+k\,\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

Definición 1.37. Para $z\in\mathbb{C}$, $z\neq k\,\pi+\pi/2$ $(k\in\mathbb{Z})$, se define

$$\operatorname{tg}(z)=\frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}=-i\,\frac{\exp(i\,z)-\exp(-i\,z)}{\exp(i\,z)+\exp(-i\,z)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente* de z. Para $z\in\mathbb{C}$, $z\neq k\,\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, se define

$$\operatorname{cotg}(z)=\frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)}=i\,\frac{\exp(i\,z)+\exp(-i\,z)}{\exp(i\,z)-\exp(-i\,z)}\,,$$

denominada *cotangente* de z.

Definición 1.38. Si $z\in\mathbb{C}$, se definen

$$\operatorname{Ch}(z)=\frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}\,,\qquad \operatorname{Sh}(z)=\frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}\,,$$

denominadas *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de z, respectivamente.

Proposición 1.39. Las funciones $\operatorname{Sh}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ y $\operatorname{Ch}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ son periódicas, de periodo $2\,\pi\,i$, es decir

$$\operatorname{Ch}(z+2\,\pi\,i)=\operatorname{Ch}(z)\quad\text{y}\quad\operatorname{Sh}(z+2\,\pi\,i)=\operatorname{Sh}(z)\quad\text{para cada } z\in\mathbb{C}\,.$$

Propiedades 1.40. Para todos $z,w\in\mathbb{C}$ se verifica:

i) $\operatorname{Sh}(z)=-\operatorname{Sh}(-z)$ y $\operatorname{Ch}(z)=\operatorname{Ch}(-z)$.

ii) $\operatorname{Ch}^2(z)-\operatorname{Sh}^2(z)=1$.

iii) $\operatorname{Sh}(z)=-i\operatorname{sen}(i\,z)$, $\operatorname{sen}(z)=-i\operatorname{Sh}(i\,z)$.

iv) $\operatorname{Ch}(z)=\cos(i\,z)$, $\cos(z)=\operatorname{Ch}(i\,z)$.

v) $\operatorname{Sh}(z+w)=\operatorname{Sh}(z)\operatorname{Ch}(w)+\operatorname{Ch}(z)\operatorname{Sh}(w)$.

vi) $\operatorname{Ch}(z+w)=\operatorname{Ch}(z)\operatorname{Ch}(w)+\operatorname{Sh}(z)\operatorname{Sh}(w)$.

vii) $\operatorname{Sh}(2\,z)=2\operatorname{Sh}(z)\operatorname{Ch}(z)$ y $\operatorname{Ch}(2\,z)=\operatorname{Ch}^2(z)+\operatorname{Sh}^2(z)$.

viii) $\operatorname{Sh}^2(z)=\frac{\operatorname{Ch}(2\,z)-1}{2}$ y $\operatorname{Ch}^2(z)=\frac{\operatorname{Ch}(2\,z)+1}{2}$.

Propiedades 1.41. Si $z\in\mathbb{C}$ y $x=\operatorname{Re}(z)$, $y=\operatorname{Im}(z)$, se verifica:

i) $\operatorname{Sh}(z)=\operatorname{Sh}(x)\cos(y)+i\operatorname{Ch}(x)\operatorname{sen}(y)$.

ii) $\operatorname{Ch}(z)=\operatorname{Ch}(x)\cos(y)+i\operatorname{Sh}(x)\operatorname{sen}(y)$.

iii) $\operatorname{sen}(z)=\operatorname{sen}(x)\operatorname{Ch}(y)+i\cos(x)\operatorname{Sh}(y)$.

IV) $\cos(z) = \cos(x)\,\mathrm{Ch}(y) - i\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{Sh}(y)$.

V) $\mathrm{Sh}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = i\,k\,\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

VI) $\mathrm{Ch}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = i\,\big({}^{\pi}\!/\!{}_{2} + k\,\pi\big)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.42. Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i\,\big(k\,\pi + {}^{\pi}\!/\!{}_{2}\big)$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\mathrm{Tgh}(z) = \frac{\mathrm{Sh}(z)}{\mathrm{Ch}(z)} = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{\exp(z) + \exp(-z)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente hiperbólica* de z. Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i\,k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\mathrm{Cotgh}(z) = \frac{\mathrm{Ch}(z)}{\mathrm{Sh}(z)} = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{\exp(z) - \exp(-z)}\,,$$

denominada *cotangente hiperbólica* de z.

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas que acabamos de definir no son inyectivas, de manera que sus posibles funciones inversas han de buscarse de forma local; el problema es exactamente el mismo que se plantea para la función exponencial, donde aparecen las distintas determinaciones del logaritmo. Ilustraremos esto con un ejemplo:

Pongamos $w = \mathrm{sen}(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i}$. Entonces

$$e^{iz}\big(1 - (e^{-iz})^2\big) = 2\,i\,w\,, \quad \text{o bien} \quad 1 - (e^{-iz})^2 = 2\,i\,w\,e^{-iz}\,.$$

Poniendo $r = e^{-iz}$ se obtiene la ecuación de segundo grado

$$r^2 + 2\,i\,w\,r - 1 = 0\,,$$

cuyas soluciones son $r = -i\,w \pm \sqrt{1 - w^2}$. Nótese que, excepto en el caso $w^2 = 1$, estos dos números complejos corresponden a las dos determinaciones de la raíz cuadrada. De esto se sigue que "$z = i\,\log\big(-i\,w + \sqrt{1 - w^2}\,\big)$", es decir, de manera puramente formal

$$\mathrm{arcsen}(w) = i\,\log\big(-i\,w + \sqrt{1 - w^2}\,\big)\,.$$

Proponemos como ejercicio al lector determinar las ramas de la raíz y del logaritmo que se han de elegir para que la función definida por la expresión anterior en la bola abierta $B(0, 1)$ coincida, al ser restringida a $B(0, 1) \cap \mathbb{R}$, con la función real

$$\mathrm{arcsen} : (-1, 1) \to \big(-{}^{\pi}\!/\!{}_{2}, {}^{\pi}\!/\!{}_{2}\big)\,.$$

1.3. Nociones topológicas en $\mathbb{C}$, límites y continuidad

Observemos que, como conjunto, el cuerpo de los números complejos es $\mathbb{R}^2$. Si a esto se añade el hecho de que el módulo de un número complejo $z = x + i\,y$ es la norma euclídea del punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$, se concluye que todos los conceptos topológicos ya conocidos en $\mathbb{R}^2$ se pueden trasladar a $\mathbb{C}$. Así, no es necesario repetir las definiciones de: bolas abiertas $B(z_0, r)$ y cerradas $\overline{B}(z_0, r)$ de centro z_0 y radio r (también denominadas *discos*); puntos interiores a, adherentes a, o de acumulación de, un subconjunto U de $\mathbb{C}$; conjuntos abiertos, cerrados, acotados o compactos; y límites de funciones y continuidad.

Notación: En lo que sigue, si z es un número complejo, la expresión $z = x + i\,y$ significará que

$$x = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{e} \qquad y = \mathrm{Im}(z)\,,$$

y si f es una función compleja definida en un subconjunto A de $\mathbb{C}$, las expresiones

$$f = u + i\,v \qquad \text{o} \qquad f(z) = f(x + i\,y) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

se utilizarán para significar que

$$u = \mathrm{Re}(f) \qquad \text{y} \qquad v = \mathrm{Im}(f)\,.$$

De este modo, la función f se puede identificar con la función $\tilde{f}$ definida de $A \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ mediante

$$\tilde{f}(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big).$$

Proposición 1.43. Con la notación anterior, la función $f = u + i\,v$ tiene límite ℓ en el punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ si, y sólo si, las funciones reales u y v tienen límites $\mathrm{Re}(\ell)$ e $\mathrm{Im}(\ell)$, respectivamente, en dicho punto.

Observación 1.44. Según la proposición anterior, todos los resultados sobre límites que se verifiquen para aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se verifican para funciones complejas de variable compleja. Por ejemplo, el límite, si existe, es único y se escribirá, en las condiciones anteriores, como es usual:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell\,.$$

Son válidas también las propiedades aritméticas de los límites, etc. Puesto que suponemos conocidas por el lector todas estas propiedades en el caso de aplicaciones a valores en $\mathbb{R}^n$, no insistiremos en estos aspectos.

Proposición 1.45. La función $f = u + i\,v$ es continua en $z_0 = x_0 + i\,y_0$ si, y sólo si, las funciones reales u y v son continuas en dicho punto; es decir, si, y sólo si, la aplicación

$$(x, y) \in A \longmapsto \big(u(x, y), v(x, y)\big) \in \mathbb{R}^2$$

es continua en (x_0, y_0).

Observación 1.46. De nuevo, los resultados sobre aplicaciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se verifican para funciones complejas de variable compleja y por esta razón no se exponen.

En el estudio de las funciones de variable compleja son importantes una clase de conjuntos que definimos a continuación y que generalizan la idea de intervalo.

Definición 1.47. Se dice que un subconjunto E de $\mathbb{C}$ es *inconexo* si se puede escribir de la forma $E = E_1 \cup E_2$ de manera que:

i) $E_1 \neq \emptyset$ y $E_2 \neq \emptyset$.

ii) Existen dos abiertos U_1 y U_2 de $\mathbb{C}$, con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, y tales que

$$E_1 \subset U_1\,, \qquad E_2 \subset U_2\,.$$

En caso contrario se dice que E es *conexo*.

Al tratar con conjuntos abiertos la propiedad de conexión admite una formulación más fácil de visualizar desde el punto de vista geométrico enunciada en términos de curvas:

Definición 1.48. Un subconjunto E de $\mathbb{C}$ es *conexo por caminos* o *arcoconexo* si, para cada par de puntos $z, w \in E$ existe una curva continua $\boldsymbol{\gamma}\colon [a, b] \to E$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(a) = z$ y $\boldsymbol{\gamma}(b) = w$.

Proposición 1.49. Todo subconjunto de $\mathbb{C}$ conexo por caminos es conexo.

Corolario 1.50. Si E es un subconjunto de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ convexo o estrellado respecto de alguno de sus puntos, entonces E es conexo.

Teorema 1.51. Sea U un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Para cada par de puntos $z, w \in U$ existe una curva continua y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, $\boldsymbol{\gamma}\colon [a, b] \to U$, tal que $\boldsymbol{\gamma}(a) = z$ y $\boldsymbol{\gamma}(b) = w$.

Observación 1.52. Los resultados anteriores muestran que para conjuntos abiertos son equivalentes la conexión y la conexión por caminos. Si un conjunto E es conexo pero no abierto, no se puede garantizar que sea arcoconexo.

1.4. Derivabilidad de las funciones complejas de variable compleja

Para funciones de variable compleja el concepto de derivabilidad se define exactamente igual que en el caso de funciones de una variable real, mediante límites de cocientes incrementales, y en principio se obtienen resultados análogos. Ahora bien, la existencia del límite de una función en un punto de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ implica la existencia de límites en todas las direcciones; esto impone una relación entre las partes reales e imaginarias de una función derivable que, como veremos más adelante, proporciona una serie de sorprendentes resultados no válidos en el caso de funciones de variable real.

Definición 1.53. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Se dice que f es *derivable* en z_0 si existe el límite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}\,. \tag{1.1}$$

El límite anterior se denomina *derivada* de f en z_0 y se denota $f'(z_0)$.

La función f es *holomorfa* en el punto z_0 si existe un disco $B(z_0,r) \subset U$ tal que f es derivable en cada punto $z \in B(z_0,r)$. Se dice que f es *holomorfa en* U si es holomorfa en cada punto de U, es decir, si es derivable en cada punto de U.

El siguiente resultado da condiciones equivalentes a la derivabilidad en términos de las partes real e imaginaria de la función bajo estudio.

Teorema 1.54. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f = u + i\,v$ una función compleja definida en U. Es condición necesaria y suficiente para que f sea derivable en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ de U que las funciones u, v sean diferenciables en el punto (x_0,y_0) y verifiquen las *condiciones de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0); \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Corolario 1.55. Sea $f = u + i\,v$ una función compleja en un abierto U tal que u, v son de clase $\mathcal{C}^1$ en U y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en cada punto de U. Entonces la función f es holomorfa en U.

Observación 1.56. Con la notación anterior, si se definen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,,$$

las condiciones de Cauchy-Riemann se expresan de forma equivalente como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0\,,$$

y si f es derivable en el punto z_0 se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Pasamos a exponer las propiedades elementales de las funciones derivables.

Proposición 1.57. Sea f una función compleja definida en un abierto U de $\mathbb{C}$. Si f es derivable en el punto $z_0 \in U$, entonces f es continua en z_0. Como consecuencia, si f es holomorfa en U, entonces f es continua en U.

Propiedades 1.58. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f, g dos funciones complejas definidas en U.

i) Si f y g son derivables en z_0 y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha\, f + \beta\, g$ es derivable en z_0, y además
$$(\alpha\, f + \beta\, g)'(z_0) = \alpha\, f'(z_0) + \beta\, g'(z_0)\,.$$

ii) Si f y g son derivables en z_0, entonces $f\,g$ es derivable en z_0, y además
$$(f\,g)'(z_0) = f'(z_0)\,g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)\,.$$

iii) Si f y g son derivables en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, entonces f/g (que está definida en un entorno adecuado de z_0) es derivable en z_0, y además
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\,g(z_0) - f(z_0)\,g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,.$$

La regla de la cadena se enuncia exactamente igual que en el caso de aplicaciones diferenciables en espacios euclídeos.

Teorema 1.59 (Derivación de la función compuesta). Sean U y V abiertos de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to V$ y $g\colon V \to \mathbb{C}$ funciones tales que:

I) f es derivable en $z_0 \in U$.

II) g es derivable en $w_0 = f(z_0) \in V$.

Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en z_0. Además,

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0) = g'(w_0)\, f'(z_0)\,.$$

Seguidamente nos dedicamos a proporcionar ejemplos de funciones holomorfas. La derivabilidad de estas funciones se obtiene en unos casos directamente de la definición y en otros de los resultados anteriores.

Ejemplos 1.60.

I) Si f es una función constante ($f(z) = c \in \mathbb{C}$ para todo z), entonces f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

II) Si $\mathrm{Id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ denota la *función identidad* ($\mathrm{Id}(z) = z$ para todo z), Id es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y $\mathrm{Id}'(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

III) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la función $p_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $p_n(z) = z^n$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y ${p_n}'(z) = n\, z^{n-1}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

IV) Si P es un polinomio con coeficientes complejos en la variable z,

$$P(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0\,,$$

entonces la función $z \mapsto P(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y

$$P'(z) = n\, a_n\, z^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, z^{n-2} + \ldots + a_1\,.$$

V) Si P y Q son polinomios con coeficientes complejos en la variable z, puesto que Q tiene un número finito de raíces $r_1, r_2, \ldots, r_m$, la función *racional* R dada por $R(z) = {}^{P(z)}\!/_{Q(z)}$ está bien definida en el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ y es holomorfa en él; su derivada es a su vez una función racional,

$$R'(z) = \frac{P'(z)\, Q(z) - P(z)\, Q'(z)}{Q(z)^2} \quad \text{para todo } z \in U.$$

VI) La función exponencial $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $\exp'(z) = \exp(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. (Es fácil comprobar que esta función, como aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en cada punto.)

VII) Las funciones trigonométricas sen, cos, y las funciones hiperbólicas Sh, Ch son holomorfas en todo $\mathbb{C}$, y para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(z) &= \cos(z), & \cos'(z) &= -\operatorname{sen}(z), \\ \operatorname{Sh}'(z) &= \operatorname{Ch}(z), & \operatorname{Ch}'(z) &= \operatorname{Sh}(z). \end{aligned}$$

En cuanto a la derivabilidad de la función inversa, el siguiente resultado se basa en el homónimo para funciones de varias variables reales.

Teorema 1.61 (Teorema de la función inversa). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U tal que su derivada f' es continua en U. Entonces, si $z_0 \in U$ y $f'(z_0) \neq 0$, existen un entorno abierto V de z_0 y un entorno abierto W de $f(z_0)$, tales que:

I) $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in V$.

II) f aplica biyectivamente V en W.

III) La función inversa $f^{-1}\colon W \to V$ es holomorfa en W y su derivada viene dada por

$$(f^{-1})'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{para cada } z \in V,$$

o lo que es lo mismo,

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)} \quad \text{para cada } w \in W.$$

Observaciones 1.62.

i) Al igual que sucede en el caso real, el teorema anterior tiene carácter local; aunque una función holomorfa tenga derivada continua y distinta de 0 en todo punto no se puede garantizar que sea globalmente inyectiva. Un ejemplo sencillo se presenta con la función exponencial, que es periódica de periodo $2\pi i$.

ii) La hipótesis de continuidad de la derivada es necesaria para la aplicación del teorema de las funciones inversas en $\mathbb{R}^2$. Como veremos más adelante, esta hipótesis es redundante, pues resulta que si $f = u + i\,v$ es holomorfa en el abierto U, entonces las funciones reales u y v son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U.

iii) El teorema anterior permite deducir la holomorfía de las inversas de las funciones elementales, tales como ramas del logaritmo, arcos de las funciones trigonométricas, etc., algunas de las cuales presentamos seguidamente.

Ejemplos 1.63.

i) Puesto que la derivada de la función exponencial es ella misma, el teorema de la función inversa garantiza que es localmente invertible en un entorno de cada punto $z_0 \in \mathbb{C}$, pero podemos decir más: Fijado $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < \operatorname{Im}(z_0) < c + 2\pi$, el abierto

$$V_c = \{z \in \mathbb{C} : c < \operatorname{Im}(z) < c + 2\pi\} \simeq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < c + 2\pi\}$$

contiene a z_0 y exp es una biyección entre V_c y el abierto

$$W_c = \mathbb{C} \setminus \{r\,e^{i\,c} : r \in \mathbb{R}\,,\ r \geq 0\}\,,$$

cuya inversa es la correspondiente rama del logaritmo, $\log_c$; el teorema de la función inversa garantiza que $\log_c$ es holomorfa en W_c y que su derivada es

$$\log_c'(w) = \frac{1}{\exp'\big(\log_c(w)\big)} = \frac{1}{\exp\big(\log_c(w)\big)} = \frac{1}{w}\,, \quad w \in W_c\,.$$

ii) Si a es un número complejo y se define, elegida una rama del logaritmo en el abierto W_c correspondiente, la función potencial

$$f(z) = z^a = \exp\big(a\log_c(z)\big)\,, \quad z \in W_c\,,$$

ésta es holomorfa en virtud de la regla de la cadena, y su derivada es

$$f'(z) = \exp\big(a\log_c(z)\big)\,\frac{a}{z} = a\,\frac{z^a}{z}\,.$$

iii) La función seno es derivable en todo $\mathbb{C}$ y su derivada, la función coseno, es nula en los puntos de la forma $k\,\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Para el resto de los puntos existe inversa local, que denominaremos de forma genérica un *arcoseno* y denotaremos por 'arcsen'; en estos puntos se tiene que

$$\operatorname{arcsen}'(w) = \frac{1}{\operatorname{sen}'\big(\operatorname{arcsen}(w)\big)} = \frac{1}{\cos\big(\operatorname{arcsen}(w)\big)} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

El signo $\pm$ hace referencia a la determinación o rama particular elegida para la raíz.

Ejercicios

1.1 Estudiar la convergencia de las sucesiones de números complejos de término general:

i) $a_n = \Big(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i\Big)^n$ ii) $a_n = \Big(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i\Big)^n$

iii) $a_n = \dfrac{n^2 + in + 1}{in^2 + n + i}$ iv) $a_n = \dfrac{2 + (n+1)\,i}{n}$ v) $a_n = \Big(\dfrac{-i}{n}\Big)^n$

1.2 Se considera la determinación principal del logaritmo. Probar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^z$ converge absolutamente si $\operatorname{Re}(z) > 1$.

1.3 Demostrar que:

i) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!\,z^n}$ converge absolutamente si $|z| \neq 0$.

II) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ converge absolutamente si $|z| \leq 1$.

III) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^n}$ converge absolutamente si $|z| > 1$.

1.4 Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar la igualdad

$$\left(1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \ldots + e^{in\theta}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right) e^{in\theta/2}.$$

1.5 Resolver la ecuación $|\operatorname{sen}(z)| = |\cos(z)|$.

1.6 Sean $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, y ω una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1.

I) Probar que se verifica $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

II) Deducir del apartado anterior el valor de la suma

$$\cos\left(\frac{2\,\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{2\,n\pi}{2n+1}\right).$$

III) Calcular $1 + 2\,\omega + 3\,\omega^2 + \cdots + n\,\omega^{n-1}$.

1.7 Probar que la función f definida en $\mathbb{C}$ por $f(z) = \begin{cases} (1+i)\,\dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z^2|} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0, \end{cases}$ verifica las condiciones de Cauchy-Riemann en el punto $z_0 = 0$, pero no es derivable en dicho punto.

1.8 Sea $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f(z) = \sqrt{|x\,y|}\,, \quad x = \operatorname{Re}(z)\,,\ y = \operatorname{Im}(z)\,.$$

¿Es holomorfa dicha función? Estudiar las condiciones de Cauchy-Riemann en $z_0 = 0$.

1.9 Sea f una función definida en $\mathbb{C}$ de la forma

$$f(z) = f(x + i\,y) = u(x) + i\,v(y)\,, \qquad u = \operatorname{Re}(f)\,,\ v = \operatorname{Im}(f)\,,$$

y tal que f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Obtener una expresión de f.

1.10 Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f \colon U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en U. Se supone que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que

$$f'(z) = a\,f(z) \quad \text{para todo } z \in U.$$

Demostrar que para cada par de puntos $z, w \in U$ se verifica que

$$f(z) = f(w)\,e^{a\,(z-w)}.$$

1.11 Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Demostrar que cada una de las condiciones siguientes implica que la función f es constante en U.

I) $f'(z) = 0$ para cada $z \in U$.

II) Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re}\big(f(z)\big) = k$ para cada $z \in U$.

III) Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im}\big(f(z)\big) = k$ para cada $z \in U$.

IV) Existen $a, b, c \in \mathbb{C}$, con a y b no simultáneamente nulos, y tales que para cada $z \in U$ se tiene que

$$a \operatorname{Re}\big(f(z)\big) + b \operatorname{Im}\big(f(z)\big) = c.$$

V) Existe $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, tal que $|f(z)| = k$ para cada $z \in U$.

1.12 Hallar los puntos $z \in \mathbb{C}$ en los que las siguientes funciones son derivables y calcular en ellos la correspondiente derivada:

I) $\operatorname{sen}(\overline{z})$ II) $\operatorname{Ch}(\overline{z})$ III) $z\operatorname{Re}(z)$ IV) e^{e^z} V) $\operatorname{sen}\left(e^z\right)$ VI) $\dfrac{e^z}{z^2+3}$

1.13 Determinar los puntos de $\mathbb{C}$ en un entorno de los cuales la función f correspondiente admite inversa holomorfa:

I) $f(z) = z^2 + z + 1$ II) $f(z) = \exp(z^2 + z)$.

Capítulo 2

Funciones de Variable Compleja II

Recordemos al lector que si una función de variable real f es suficientemente derivable, es posible aproximarla localmente mediante polinomios, los de Taylor. Esto conduce, para funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$, a considerar el caso límite, que consiste en una serie de potencias. Este tema tiene por objeto desarrollar esta idea desde el punto de vista inverso, es decir, el estudio de las propiedades de las funciones definidas mediante una serie de potencias.

Veremos con posterioridad que el concepto de analiticidad, que introducimos aquí, coincide con el de holomorfía, hecho que puede resultar sorprendente al observar que para este último sólo se exige la existencia de la derivada de primer orden. Este aspecto es uno de los más relevantes en lo que se refiere a las diferencias entre las funciones derivables de variable real y las de variable compleja.

2.1. Series de potencias

Definición 2.1. Una *serie de funciones* (o *serie funcional*) definida en un conjunto X es la asignación a cada punto $x \in X$ de una serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,,$$

donde $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ es una función para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definición 2.2. Sea z_0 un número complejo. Si $a_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos, la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

se denomina *serie de potencias centrada en el punto* z_0 (en este contexto, se sigue el convenio de notación $(z - z_0)^0 = 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$).

Observación 2.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el polinomio $f_n(z) = a_n\,(z - z_0)^n$ define una función holomorfa (indefinidamente derivable, de hecho) en $\mathbb{C}$. Se suscitan entonces de forma natural las siguientes cuestiones:

i) En primer lugar, el estudio de la convergencia de este tipo de series funcionales.

ii) En segundo lugar, determinar las propiedades que hereda la función suma de los términos de la serie.

En esta sección y en la siguiente se tratará de dar respuesta a estas dos preguntas.

Definición 2.4. Se considera la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$.

i) Se dice que la serie *converge en el punto* $w \in \mathbb{C}$ si la serie numérica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(w - z_0)^n$ es convergente. Si converge en cada punto w de un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ se dice que *converge puntualmente en* X.

ii) Se dice que la serie *converge absolutamente en* $w \in \mathbb{C}$ si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n\,(w - z_0)^n|$ es convergente. Si converge absolutamente en cada punto w de $X \subset \mathbb{C}$ se dice que *converge absolutamente en* X.

Definición 2.5. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una serie de potencias que converge puntualmente en un conjunto $X \subset \mathbb{C}$. Para cada $z \in X$ denotemos por $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ a la sucesión de sumas parciales correspondiente y por $S(z)$ a la suma de la serie.

Se dice que la serie *converge uniformemente en* X si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende sólo de ε) tal que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \quad \text{para cada } z \in X.$$

Definición 2.6. Se dice que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *converge normalmente* en un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ si existe una serie convergente de números reales positivos $\sum_{n=0}^{\infty} m_n$ tal que

$$|a_n (z-z_0)^n| \leq m_n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y para todo } z \in X.$$

Proposición 2.7 (Criterio M de Weierstrass). Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge normalmente en el conjunto $X \subset \mathbb{C}$, entonces converge absoluta y uniformemente en X.

Proposición 2.8 (Lema de Abel). Se considera la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Si R es un número real estrictamente positivo tal que la sucesión de números reales positivos $\{|a_n| R^n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada, entonces la serie de potencias es absolutamente convergente para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z-z_0| < R$.

Es más, la serie converge normalmente en los discos de la forma $\overline{B}(z_0, r)$ para todo r con $0 < r < R$.

Corolario 2.9. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge en el punto $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente en cada punto z que verifique $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$, y converge normalmente en los discos compactos $\overline{B}(z_0, r)$, $0 < r < |z_1 - z_0|$.

Los resultados precedentes muestran que el conjunto de puntos donde una serie de potencias converge puede ser:

i) Sólo el punto z_0 en el que está centrada.

ii) Un disco abierto centrado en el punto z_0, junto con algunos puntos de su frontera.

iii) Todo el plano.

Esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 2.10. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, se define su *radio de convergencia*, que denotaremos por ρ, como:

i) Si la serie converge únicamente en el punto z_0, entonces $\rho = 0$.

ii) Si la serie converge en cada punto de $\mathbb{C}$, se dice que $\rho = \infty$.

iii) En otro caso, su radio de convergencia se define como el superior del conjunto de los números reales positivos r tales que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ es convergente.

Proposición 2.11. El número real $\rho \geq 0$ es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ si, y sólo si, la serie converge en todo punto z con $|z-z_0| < \rho$ y no converge en cada punto z con $|z-z_0| > \rho$.

Definición 2.12. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con radio de convergencia $\rho > 0$, el disco abierto $B(z_0, \rho)$ se denomina *abierto de convergencia* de la serie (en el caso de que $\rho = \infty$ se entiende que dicho disco coincide con $\mathbb{C}$).

El conjunto de los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde la serie converge se denomina *campo de convergencia* de la serie.

Observaciones 2.13.

I) El campo de convergencia de una serie de potencias contiene al abierto de convergencia y, si su radio de convergencia ρ es finito, está contenido a su vez en el disco cerrado $\overline{B}(z_0, \rho)$. Los siguientes ejemplos ilustran distintas situaciones que se pueden presentar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\, z^n\,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, z^n\,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\, z^n\,.$$

En todos ellos el radio de convergencia es 1, pero el campo de convergencia de la primera es el disco abierto, el de la última el disco cerrado, la segunda converge en -1 pero no en 1 y la tercera converge en 1 pero no en -1.

II) El radio de convergencia de una serie de potencias depende únicamente de sus *coeficientes* a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es decir, las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$$

tienen el mismo radio de convergencia; el campo de convergencia de la primera es el trasladado por z_0 del de la segunda.

Proposición 2.14 (Fórmula de d'Alembert). Dada la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$, se supone que existe el límite, finito o infinito,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda.$$

Entonces, si ρ es el radio de convergencia de la serie, se tiene que

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda = 0; \\ 0 & \text{si } \lambda = \infty; \\ \dfrac{1}{\lambda} & \text{si } 0 < \lambda < \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

En particular, si todos los coeficientes de la serie son no nulos, al menos a partir de un término en adelante, y existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

este límite coincide con ρ.

2.2. Funciones definidas por series de potencias

En lo que sigue consideraremos series de potencias con radio de convergencia no nulo. La convergencia normal, y por tanto uniforme, de este tipo de series en los subconjuntos compactos del abierto de convergencia permite concluir interesantes resultados sobre las propiedades de la función suma.

Teorema 2.15. Sea $\rho > 0$ (quizá ∞) el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$. Si para cada $z \in B(z_0, \rho)$ se denota por $f(z)$ a la suma de la serie numérica correspondiente, resulta que f es continua en $B(z_0, \rho)$ (si $\rho = \infty$ se entiende que dicho disco es $\mathbb{C}$).

De la continuidad de la función suma se sigue la siguiente propiedad.

Teorema 2.16. Si una serie de potencias tiene suma nula en un entorno del punto en el que está centrada, entonces es la serie idénticamente nula.

Corolario 2.17 (Principio de identidad). Se supone que las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z - z_0)^n$ tienen radios de convergencia no nulos ρ_1 y ρ_2, respectivamente, y que existe un número real δ, con $0 < \delta < \min\{\rho_1, \rho_2\}$, de manera que las sumas de ambas series coinciden para cada $z \in B(z_0, \delta)$. Entonces las series son iguales, es decir,

$$a_n = b_n \quad \text{para cada } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para abordar el problema de la derivabilidad de una serie de potencias se hace uso del siguiente lema.

Lema 2.18. Sea ρ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. La *serie derivada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (z-z_0)^n$$

tiene también radio de convergencia ρ.

Teorema 2.19. Sea f la función suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, definida en el abierto de convergencia $B(z_0,\rho)$. Entonces f es holomorfa en este disco y

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (z-z_0)^n \quad \text{para cada } z \in B(z_0,\rho)\,.$$

Corolario 2.20. En las mismas condiciones del teorema anterior, f admite derivadas de cualquier orden en $B(z_0,\rho)$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f^{m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)\, a_{n+m} (z-z_0)^n\,, \quad z \in B(z_0,\rho).$$

En particular,

$$f^{m)}(z_0) = m!\, a_m \qquad \text{ó} \qquad a_m = \frac{f^{m)}(z_0)}{m!} \qquad \text{para cada } \ m \geq 0\,.$$

Teorema 2.21. Sea f la función suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, definida en el abierto de convergencia $B(z_0,\rho)$. Si $C \in \mathbb{C}$, la función F, suma de la serie de potencias

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (z-z_0)^n\,,$$

es una primitiva de f en $B(z_0,\rho)$, es decir, $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in B(z_0,\rho)$.

Prestamos ahora atención a las operaciones con series de potencias, en concreto, con funciones definidas por sumas o productos de éstas.

Definición 2.22. Dadas las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, se define la serie *suma* de ambas por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n\,,$$

y la serie *producto de Cauchy* como

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\,, \quad \text{siendo } \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\,, \quad n \geq 0\,.$$

No existe un criterio general que permita determinar el radio de convergencia de una suma o un producto de series, sin embargo es posible dar una estimación del mismo, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.23. Sean ρ_1 y ρ_2 los radios de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, respectivamente. Entonces las series suma y producto de Cauchy de las anteriores tienen radios de convergencia mayores o iguales que $\rho_0 = \text{mín}\{\rho_1, \rho_2\}$.

Definición 2.24. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función compleja definida en A. Se dice que f es *analítica* en un punto $z_0 \in A$ si existen un número $\delta > 0$ tal que $B(z_0,\delta) \subset A$, y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ convergente en $B(z_0,\delta)$, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{para cada } z \in B(z_0,\delta).$$

Se dice que f es *analítica en A* si es analítica en cada punto de A.

Observaciones 2.25.

i) En las condiciones de la definición anterior es habitual obviar el dominio de definición de la función f; lo que en realidad es relevante es el radio de convergencia de la serie que la representa en un entorno del punto z_0. Diremos simplemente que f es analítica en el punto z_0.

ii) El teorema anterior muestra que la suma y el producto de funciones analíticas en un punto z_0 son también funciones analíticas en dicho punto.

iii) En virtud del corolario 2.20, si f es analítica en el punto z_0, entonces es holomorfa en z_0, e incluso indefinidamente derivable en un entorno de dicho punto. De hecho, se verifica una propiedad más fuerte que se enuncia a continuación.

Teorema 2.26. Se supone que la función f es analítica en el punto z_0, esto es, f se representa en un entorno $B(z_0, \delta)$ mediante la suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$. Entonces f es analítica en cada punto $z_1 \in B(z_0, \delta)$.

En lo que respecta a la división de series de potencias, es decir, de funciones analíticas, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.27. Sean f y g dos funciones analíticas en el punto z_0. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces la función f/g es analítica en z_0.

Observación 2.28. En las condiciones del teorema anterior, supongamos que las series de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z - z_0)^n$ representan a las funciones f y g, respectivamente, en un entorno de z_0. Para calcular los coeficientes de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n$ que representa a f/g se puede proceder efectuando la división formal de las dos series anteriores en potencias crecientes de $(z - z_0)$, lo cual es posible ya que $b_0 = g(z_0) \neq 0$ $\big($en particular, $c_0 = \dfrac{a_0}{b_0}\big)$.

Sin embargo, es más cómodo proceder mediante el método de los coeficientes indeterminados: teniendo en cuenta que se debe verificar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z - z_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n\right),$$

se identifican los coeficientes a_n con los correspondientes al producto de Cauchy de las otras dos series. Esto da lugar a un sistema (infinito) de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0\,c_0 \\
a_1 &= b_0\,c_1 + b_1\,c_0 \\
a_2 &= b_0\,c_2 + b_1\,c_1 + b_2\,c_0 \\
&\ \ \vdots \\
a_n &= b_0\,c_n + b_1\,c_{n-1} + \ldots + b_n\,c_0 \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

cuyas incógnitas c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se despejan recurrentemente.

Por último, respecto a la composición de funciones analíticas se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.29 (Teorema de sustitución). Sean g una función analítica en el punto z_0, y f una función analítica en el punto $w_0 = g(z_0)$. Entonces la función $f \circ g$ (que está bien definida en un entorno de z_0 por ser g continua) es analítica en z_0.

A continuación se presentan desarrollos en serie de potencias de algunas funciones elementales. La analiticidad de las funciones exponencial, trigonométricas e hiperbólicas se deduce de la propia definición, en otros casos de los resultados presentados en este capítulo.

Todos los desarrollos se refieren al punto $z_0 = 0$. En cada caso se relaciona el abierto de convergencia de la correspondiente serie de potencias, donde dicha serie representa a la función.

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
$$\operatorname{Sh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
$$\operatorname{Ch}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad z \in B(0,1).$$
$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad z \in B(0,1).$$
$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \qquad z \in B(0,1). \qquad (\textit{rama principal})$$

2.3. Integral compleja a lo largo de curvas

Dada una curva paramétrica $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, ésta se puede entender también como una curva en $\mathbb{C}$, y viceversa; así, los conceptos de regularidad (continuidad, derivabilidad a trozos, etc.) enunciados para las primeras se trasladan a este otro contexto. Escribiremos habitualmente

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad \text{o} \qquad z(t) = x(t) + i\,y(t),$$

y para los puntos t donde la curva sea derivable se tendrá que

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = x'(t) + i\,y'(t).$$

Otro tanto se puede decir respecto de la noción de curva paramétrica orientada.

Como es habitual, confundiremos las curvas paramétricas regulares y simples $(I, \boldsymbol{\gamma})$ (que no se cortan a sí mismas) con su soporte γ^*, es decir, con la curva geométrica que parametrizan, obviando estos objetos y hablando simplemente de curvas paramétricas, incluso cuando se tenga en mente que se está trabajando en el conjunto

$$\Gamma = \boldsymbol{\gamma}^* = \{\boldsymbol{\gamma}(t) = x(t) + i\,y(t) \in \mathbb{C} : t \in I\},$$

que es el mismo para todas las parametrizaciones regulares equivalentes a $(I, \boldsymbol{\gamma})$.

El teorema del cambio de variable para integrales garantiza la coherencia de la siguiente definición.

Definición 2.30. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua y Γ una curva geométrica orientada y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, parametrizada por la aplicación $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ (coherente con su orientación). Se define la *integral de f a lo largo de la curva* Γ como

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt,$$

que se denota indistintamente por $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ o $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz$.

Propiedades 2.31. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, f, g dos funciones complejas y continuas en U y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una parametrización de una curva geométrica orientada Γ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se verifica:

i) $\displaystyle\int_\Gamma (f+g)(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma g(z)\,dz.$

ii) Si $c \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_\Gamma c\,f(z)\,dz = c\int_\Gamma f(z)\,dz.$

iii) $\displaystyle\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\}\ \operatorname{long}(\Gamma).$

Proposición 2.32. Sean $(I, \boldsymbol{\gamma})$, $(J, \boldsymbol{\varphi})$ dos curvas paramétricas equivalentes que definen orientaciones opuestas en la curva geométrica Γ que parametrizan. Si f es una función continua en un abierto que contiene al soporte de la curva, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\, dz = -\int_{\boldsymbol{\varphi}} f(z)\, dz.$$

Definición 2.33. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua en U. Se dice que f tiene una *primitiva* en U si existe una función F definida y holomorfa en todo el abierto U de tal manera que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in U$.

Proposición 2.34. Sea f una función continua en el abierto U con primitiva F en dicho conjunto, y sea $\boldsymbol{\gamma}\colon [a, b] \to U$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\, dz = F\big(\boldsymbol{\gamma}(b)\big) - F\big(\boldsymbol{\gamma}(a)\big)\,.$$

Teorema 2.35. Sean U un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua. Son equivalentes los siguientes enunciados:

i) La integral de f a lo largo de una curva con soporte contenido en U sólo depende de los extremos de la curva, es decir, si $\boldsymbol{\gamma}\colon [a, b] \to U$ y $\boldsymbol{\varphi}\colon [c, d] \to U$ son dos curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y con los mismos extremos ($\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\varphi}(c)$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{\varphi}(d)$), entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\, dz = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f(z)\, dz.$$

ii) La integral de f a lo largo de cualquier curva cerrada con soporte contenido en U es nula, esto es, si $\boldsymbol{\gamma}\colon [a, b] \to U$ es una curva cerrada de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, entonces

$$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\, dz = 0.$$

iii) f tiene una primitiva en U.

2.4. Fórmula integral de Cauchy

La fórmula integral (de Cauchy) para funciones holomorfas establece una enorme diferencia en el tratamiento y los resultados aplicables a esta clase de funciones. No deja de ser asombroso el hecho de que una condición aparentemente tan simple como la de la derivabilidad proporcione una representación integral como la que sigue.

Teorema 2.36 (Fórmula integral de Cauchy para circunferencias). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo U y $z_0 \in U$. Si el disco cerrado $\overline{B}(z_0, r)$ está totalmente contenido en U y se denota por Γ a su borde con la orientación inducida, entonces para todo $z \in B(z_0, r)$ se verifica que

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Esto es, parametrizando la circunferencia Γ por $\boldsymbol{\gamma}(t) = z_0 + r\, e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\,\pi]$, se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \frac{f(z_0 + r\, e^{i\,t})\, r\, e^{i\,t}}{z_0 + r\, e^{i\,t} - z}\, dt.$$

Corolario 2.37. Si f es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces f es indefinidamente derivable en dicho abierto.

Corolario 2.38. Si f es una función continua en un abierto U de $\mathbb{C}$ y tiene una primitiva en U, entonces es holomorfa en dicho abierto.

Corolario 2.39. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función continua en todo U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos. Entonces f es holomorfa en todo U.

Es posible generalizar la fórmula integral de Cauchy a curvas cerradas, simples y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, siempre que su soporte junto con el *dominio de Jordan* que encierran se encuentre contenido en el abierto de holomorfía correspondiente.

Teorema 2.40 (Fórmula integral de Cauchy). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo U. Si D es un dominio de Jordan tal que su adherencia $D \cup \partial D$ está contenida en U, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \text{para todo } z \in D,$$

considerando en ∂D la orientación inducida por D. En consecuencia, si $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw \quad \text{para todo } z \in D.$$

Recordemos que toda función analítica (es decir, que se puede representar en un entorno de cada punto como la suma de una serie de potencias) es holomorfa; a partir de la fórmula integral de Cauchy se obtiene el recíproco.

Teorema 2.41. Si f es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces f es analítica en U. De hecho, si $z_0 \in U$ y $B(z_0, r) \subset U$, entonces para cada $z \in B(z_0, r)$ se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$

La serie anterior se denomina *serie de Taylor de f en el punto z_0*. El teorema anterior implica que, si $B(z_0, R)$ es el mayor disco abierto centrado en z_0 y contenido en U, entonces el radio de convergencia de esta serie es mayor o igual que R; por tanto, si $U = \mathbb{C}$, la serie de Taylor converge en todo $\mathbb{C}$.

En el corolario 2.17 dábamos una versión del principio de identidad para funciones analíticas. Ahora mejoraremos dicho resultado a partir del teorema siguiente.

Teorema 2.42 (Principio de los ceros aislados). Sea f una función holomorfa en un abierto conexo U de $\mathbb{C}$. Supongamos que existe un subconjunto $A \subset U$ tal que:

i) $f(a) = 0$ para cada $a \in A$.

ii) A tiene al menos un punto de acumulación en U.

Entonces f es la función idénticamente nula en U.

Corolario 2.43 (Principio de identidad). Sean f y g dos funciones holomorfas en un mismo abierto conexo U de $\mathbb{C}$ que coinciden en un subconjunto A que tiene al menos un punto de acumulación en U. Entonces $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U$.

Observación 2.44. De otro modo, el principio de los ceros aislados establece que si una función f, holomorfa en un abierto conexo U y no constante, se anula en un punto a, existe un disco $B(a, \delta)$ tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in B(a, \delta)$, $z \neq a$, y de hecho existen una función g holomorfa en todo U, con $g(a) \neq 0$, y un número natural m tales que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para cada $z \in U$. El número m se denomina el *orden* de a como cero de f, y verifica que

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{m-1)}(a) = 0 \qquad \text{y} \qquad f^{m)}(a) \neq 0.$$

Admitiremos también que pueda ser $m = 0$, entendiendo en este caso que $f(a) \neq 0$, es decir, que a no es cero de f.

Ejercicios

2.1 Determinar el abierto de convergencia de las siguientes series de potencias:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} z^n$ iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3n}} (z-1)^n$ v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2n}$

vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,4^n} (z-1)^n$ vii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\Big(z+\frac{1}{2}\Big)^n$ viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(z+5)^n$ ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+2}} z^n$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n}\right) z^n\ ,\ a,b>0$ xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, n^2}{2n-1}\,(z-2)^n$ xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(z+1)^n}{n\,2^n}$.

2.2 Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, z^{2n}}{4^n\,(n!)^2}.$$

Demostrar que su radio de convergencia es ∞. Si se denota por f a la función suma de esta serie, probar que para cada $z\in\mathbb{C}$ se tiene que

$$z\,f''(z)+f'(z)+z\,f(z)=0.$$

2.3 Sumar las series:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}$ (*Indicación*: considerar el desarrollo de e^z.)

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\,2^n}$ (*Indicación*: considerar el desarrollo de $\log(1-z)$.)

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3\,n^2+4\,n+5)\,\frac{1}{3^n}$ (*Indicación*: considerar la suma de la serie geométrica y sus derivadas.)

2.4 Calcular la derivada décima de la función $f(z)=z^6\,e^z$ en el punto $z_0=0$.

2.5 Desarrollar en serie de potencias en un entorno de $z_0=0$ las siguientes funciones:

i) $\dfrac{2\,z}{1+z^4}$ ii) $\operatorname{sen}^2(z)$ iii) $\dfrac{e^{-z}}{1+z}$

2.6 Determinar la función f, analítica en $z_0=0$, solución de la ecuación diferencial

$$f''(z)+z\,f'(z)+f(z)=0,$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1.$$

2.7 Determinar los radios de convergencia y las funciones suma de las siguientes series de potencias:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2\,n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^n}{n\,(n-1)}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2\,n}{(2\,n+1)!}\,z^{2n+1}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^n}{2^n\,(n+1)}$ v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\,(n+1)\,z^{n-1}$ vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^3+1)\,z^{n-1}$

2.8 Calcular $\displaystyle\int_\Gamma \operatorname{Re}(z)\,dz$ en los siguientes casos:

i) Γ es el segmento de extremos 0 y $1+i$.

ii) Γ es la circunferencia centrada en 0 y de radio 1.

iii) Γ es el borde del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

2.9 Calcular $\displaystyle\int_\Gamma |z|\,dz$ en los siguientes casos:

i) Γ es el segmento de extremos i y $-i$.

ii) Γ es el arco de la circunferencia centrada en 0 y de radio 1 que une los puntos i y $-i$ en el semiplano $\{\operatorname{Re}(z)\geq 0\}$.

iii) Γ es el arco de la circunferencia centrada en 0 y de radio 1 que une los puntos i y $-i$ en el semiplano $\{\operatorname{Re}(z)\leq 0\}$.

2.10 Sea Γ la circunferencia centrada en 0 y de radio 1. Calcular $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z}$ y $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{|z|}$.

2.11 Sean z_0 un punto de $\mathbb{C}$ y D el cuadrado de vértices $z_0 - a - i\,a$, $z_0 + a - i\,a$, $z_0 + a + i\,a$, $z_0 - a + i\,a$ ($a > 0$). Demostrar que, al considerar en el borde de D la orientación inducida por D, se tiene que

$$\oint_{\partial D} \frac{dz}{z - z_0} = 2\,\pi\,i.$$

2.12 Sea Γ el arco de circunferencia centrada en 0 que une el punto 2 con $2\,i$, y recorrido en sentido positivo. Probar que

$$\Big|\int_\Gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz\Big| \le \frac{\pi}{3}.$$

2.13 Sea Γ el borde del triángulo de vértices 0, -4 y $3\,i$. Probar que

$$\Big|\oint_\Gamma (e^z - \overline{z})\,dz\Big| \le 60.$$

2.14 Calcular:

I) $\displaystyle\int_\Gamma \operatorname{sen}(2\,z)\,dz$, donde Γ es el segmento que une $1+i$ con $-i$.

II) $\displaystyle\int_\Gamma z\,e^{z^2}\,dz$, siendo Γ una circunferencia.

2.15 Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^2}$ en los siguientes casos:

I) Γ es la elipse de ecuación $x^2 + 4\,y^2 = 1$.

II) Γ es la elipse de ecuación $4\,x^2 + y^2 = 4$.

2.16 Sea Γ una curva cerrada contenida en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Probar que $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = 0$. ¿Admite la función $f(z) = {}^1\!/_z$ primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

2.17 Evaluar las siguientes integrales:

I) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz$, donde Γ es la circunferencia unidad.

II) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3}\,dz$, donde Γ es el cuadrado de vértices 1, i, -1, $-i$.

III) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{1+z^2}\,dz$, donde Γ es la circunferencia centrada en 0 y de radio 2.

IV) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\,dz$, donde Γ es la circunferencia unidad.

V) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sqrt[m]{z}}{(z-1)^m}\,dz$, donde Γ está parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(t) = 1 + \dfrac{e^{it}}{2}$, $t \in [0, 2\,\pi]$, y la raíz se considera con la determinación principal.

VI) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+1}{z\,(z^2+4)}\,dz$, donde Γ es la circunferencia de centro 0 y radio r, en los casos $0 < r < 2$ y $r > 2$.

VII) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\log(z)}{(z-1)^2}\,dz$, donde Γ es la circunferencia de centro 1 y radio ${}^1\!/_2$, y el logaritmo se considera con la determinación principal.

2.18 Sea α un número complejo con $|\alpha| \neq 1$. Calcular

$$\int_0^{2\,\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\,\alpha\cos(\theta) + \alpha^2}.$$

Indicación: Integrar $f(z) = \dfrac{1}{(z-\alpha)(z - {}^1\!/_\alpha)}$ en la circunferencia unidad.

Capítulo 3

Funciones de Variable Compleja III

3.1. Singularidades aisladas y su clasificación

Un punto singular (en sentido estricto) de una función holomorfa es un punto adherente a su dominio de definición en el cual es imposible definir un valor para extender, al menos de forma continua, la función original.

Por ejemplo, si se considera la rama principal del logaritmo, la función

$$f(z) = \frac{\log(z)}{z^2 + 1}$$

está definida y es holomorfa en el abierto

$$U = \mathbb{C} \setminus \Big(\big\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\,,\ \mathrm{Re}(z) \leq 0 \big\} \cup \{i, -i\} \Big)\,;$$

los puntos de la semirrecta real negativa son todos adherentes a U y es imposible definir en ellos de forma continua una prolongación de f (puesto que es imposible definir el logaritmo de forma continua). Además, en cualquier entorno de uno de estos puntos hay infinitos puntos del mismo tipo, esto es, singulares para f.

Otra cosa bien distinta sucede en i y $-i$: en estos puntos sigue siendo imposible extender la función f de forma continua, puesto que no está acotada en ningún entorno suyo, pero la función es holomorfa en cualquier conjunto del tipo

$$B(i, \delta) \setminus \{i\} \qquad \text{o} \qquad B(-i, \delta) \setminus \{-i\},$$

con $0 < \delta < 1$. Este último tipo de singularidades es el objeto de nuestro estudio.

Definición 3.1. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in U$. Si f es una función definida y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$, se dice que f presenta o tiene una *singularidad aislada* en el punto z_0. En estas condiciones:

- I) Si existe y es finito $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, se dice que la singularidad es *evitable*.
- II) Si $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, se dice que la singularidad es *polar* o que z_0 es un *polo* de la función f.
- III) Si la singularidad en el punto z_0 no es evitable ni polar, se dice que es *esencial*.

Ejemplos 3.2.

- I) La función definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por

  $$f(z) = \frac{\mathrm{Sh}(z)}{z}$$

  tiene una singularidad aislada evitable en el punto $z_0 = 0$ pues

  $$\lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{Sh}(z)}{z} = \mathrm{Sh}'(0) = \mathrm{Ch}(0) = 1.$$

- II) La función definida en $\mathbb{C} \setminus \{k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ por

  $$f(z) = \frac{z}{\mathrm{sen}(z)}$$

  tiene singularidades aisladas en los puntos de la recta real de la forma $k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

  1. El punto $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de f pues

  $$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\mathrm{sen}(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\mathrm{sen}(z)/z} = \frac{1}{\mathrm{sen}'(0)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

2. Las demás singularidades de f son de tipo polar ya que, si $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, se tiene que
$$\lim_{z \to k\pi} \left| \frac{z}{\operatorname{sen}(z)} \right| = \lim_{z \to k\pi} \frac{|z|}{|\operatorname{sen}(z)|} = \infty,$$
ya que el numerador converge hacia $|k|\pi \neq 0$ y
$$\lim_{z \to k\pi} |\operatorname{sen}(z)| = 0.$$

III) La función definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por
$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$
tiene una singularidad aislada de tipo esencial en el punto $z_0 = 0$ pues
$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x \in \mathbb{R}}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{\substack{x \to 0^- \\ x \in \mathbb{R}}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0;$$
el primer límite muestra que la singularidad no puede ser evitable mientras que del segundo se deduce que tampoco puede ser polar.

Observación 3.3. Es habitual obviar el dominio de definición de las funciones a tratar cuando, como sucede en los ejemplos anteriores, sus puntos singulares vienen dados de forma evidente como aquéllos para los que carece de sentido la fórmula que las define.

Los dos teoremas siguientes proporcionan otros criterios para la clasificación de singularidades aisladas que resultan en ciertas ocasiones de aplicación más sencilla que los de la definición.

Teorema 3.4 (Caracterización de singularidades evitables). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

I) z_0 es una singularidad evitable de f.

II) Existe una función g holomorfa en todo U y tal que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$.

III) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \subset U$ y f está acotada en $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.

IV) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0$.

Teorema 3.5 (Caracterización de singularidades polares). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

I) z_0 es una singularidad polar de f.

II) Existe una función g holomorfa en todo U con $g(z_0) \neq 0$ y un número natural m tales que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$.

III) Existe un número natural m tal que el límite $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m\, f(z)$ existe, es finito y no nulo.

Observación 3.6. El número natural m que se cita en los dos últimos apartados del teorema anterior resulta ser el mismo y se denomina *orden del polo* de f en z_0.

En numerosas ocasiones las singularidades aisladas aparecen al considerar cocientes de dos funciones holomorfas en los que el denominador se anula en algunos puntos del dominio de definición, siendo estas singularidades aisladas en virtud del principio de los ceros aislados.

Proposición 3.7. Sean f y g dos funciones definidas y holomorfas en un disco $B(z_0, \delta)$ tales que f tiene un cero de orden p en z_0 y g tiene un cero de orden q en z_0. Entonces la función f/g tiene una singularidad aislada en el punto z_0 y se verifica que:

I) La singularidad es evitable si, y sólo si, $p \geq q$. En este caso f/g tiene un cero de orden $p - q$ en z_0.

II) La singularidad es polar si, y sólo si, $p < q$. En este caso f/g tiene un polo de orden $q - p$ en z_0.

Proposición 3.8. Sean f y g dos funciones holomorfas en $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ tales que f tiene un polo de orden p en z_0 y g tiene un polo de orden q en z_0. Entonces la función f/g tiene una singularidad aislada en el punto z_0 y se verifica que:

I) La singularidad es evitable si, y sólo si, $p \leq q$. En este caso f/g tiene un cero de orden $q - p$ en z_0.

II) La singularidad es polar si, y sólo si, $p > q$. En este caso f/g tiene un polo de orden $p - q$ en z_0.

3.2. Series de Laurent

A la hora de considerar series de Laurent las coronas juegan un papel análogo al de los discos en los desarrollos de Taylor.

Definición 3.9. Si r y R son dos números reales con $0 < r < R$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, el conjunto dado por

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \overline{B}(z_0, r)$$

se denomina *corona* (*abierta*) centrada en z_0 de radios r y R. El concepto de corona se generaliza admitiendo la posibilidad de que $r = 0$ ó $R = \infty$. Concretamente:

En el caso particular de que $r = 0$ y $R \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$$

se representa por $B'(z_0, R)$ y se denomina *disco punteado* de centro z_0 y radio R.

Si $R = \infty$, la corona centrada en z_0 y de radios r e ∞ es

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0|\},$$

es decir, el complementario de la bola cerrada $\overline{B}(z_0, r)$ si $r > 0$, ó $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ si $r = 0$.

Teorema 3.10 (Desarrollos de Laurent). Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$ que contiene a la corona $C = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$. Entonces existen:

i) Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ que converge absolutamente en $B(z_0, R)$ y

ii) Una serie de potencias negativas $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{1}{(z - z_0)^n}$ que converge absolutamente en el complementario de $\overline{B}(z_0, r)$,

tales que, para cada $z \in C$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n}. \tag{3.1}$$

Los coeficientes de estas series vienen dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} f(w)\, (w - z_0)^{n-1}\, dw, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3.2}$$

siendo Γ_ρ cualquier circunferencia centrada en z_0 y de radio ρ, $r < \rho < R$, orientada positivamente.

Observaciones 3.11.

i) La expresión (3.1) se denomina *desarrollo en serie de Laurent* de f en la corona C; la primera serie es la *parte regular* del desarrollo y la segunda la *parte residual* o *singular*. Las expresiones (3.2) muestran que el desarollo en serie de Laurent es único.

ii) Es usual denotar, para $n \ge 1$, $b_n = a_{-n}$ y así la expresión (3.1) se escribe de forma más compacta como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

y las fórmulas dadas en (3.2) se resumen en una:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

iii) Caso de particular interés es el que se refiere a funciones holomorfas en abiertos del tipo $U = V \setminus \{z_0\}$, es decir, con una singularidad aislada en el punto z_0, en los que el radio menor r es nulo. En esta situación la parte regular del desarrollo de Laurent de f define una función holomorfa en $B(z_0, R)$, mientras que la parte residual, si es no nula, aporta el carácter singular de la función en dicho punto. El siguiente resultado precisa esta consideración.

Teorema 3.12 (Clasificación de singularidades). Sean f una función holomorfa en un disco punteado $B'(z_0, R)$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

su desarrollo de Laurent en $B'(z_0, R)$. Entonces:

I) z_0 es una singularidad evitable de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo es nula, es decir, si $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

II) z_0 es un polo de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo es una suma finita, es decir, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > m$. En este caso m es el orden del polo.

III) z_0 es una singularidad esencial de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo tiene infinitos términos no nulos.

El problema de determinar el desarrollo de Laurent de una función, es decir, de encontrar los coeficientes a_n y b_n, es en general difícil si se hace uso de las fórmulas dadas en (3.2). En la práctica se recurre a otro tipo de argumentos basados en las propiedades de series ya conocidas, el producto de Cauchy de series, etc. Ilustraremos esto con unos ejemplos.

Ejemplos 3.13.

I) A la hora de calcular desarrollos de Laurent de fracciones racionales resultan de utilidad los desarrollos de Taylor de la suma geométrica y sus derivadas, válidos en $B(0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n , \\ f^{k)}(w) &= \frac{k!}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)\, w^n , \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Resulta inmediato comprobar que el desarrollo de Laurent de una suma finita de funciones holomorfas en una corona es la suma de los desarrollos de Laurent de cada una de ellas, y puesto que toda fracción racional se descompone en una suma de fracciones simples del tipo

$$\frac{c_{j,m}}{(z - r_j)^m}, \qquad c_{j,m} \in \mathbb{C},$$

siendo las r_j las raíces del denominador, es suficiente determinar los desarrollos de estas últimas:

1. En primer lugar, si $z_0 = r_j$, la fracción

$$\frac{1}{(z - r_j)^m} = \frac{1}{(z - z_0)^m}$$

es ya el desarrollo de Laurent (que consta de un sólo sumando) de la función que representa en la corona $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

2. Si $z_0 \neq r_j$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - r_j)^m} &= \frac{1}{\big((z - z_0) - (r_j - z_0)\big)^m} = \frac{(-1)^m}{(r_j - z_0)^m} \frac{1}{\big(1 - (z - z_0)/(r_j - z_0)\big)^m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(r_j - z_0)^m} \frac{(n+m-1)\cdots(n+1)}{(m-1)!} \frac{(z - z_0)^n}{(r_j - z_0)^n}, \end{aligned}$$

que es el desarrollo de Taylor de dicha función, válido en el disco $B(z_0, |r_j - z_0|)$, puesto que esta serie converge para

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|r_j - z_0|} < 1.$$

También se puede considerar el desarrollo en la corona $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > |r_j - z_0|\}$, en este caso se escribe

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - r_j)^m} &= \frac{1}{\big((z - z_0) - (r_j - z_0)\big)^m} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{\big(1 - (r_j - z_0)/(z - z_0)\big)^m} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)}{m!} \frac{(r_j - z_0)^n}{(z - z_0)^n} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)\cdots(n+1)}{(m-1)!} (r_j - z_0)^n \frac{1}{(z-z_0)^{n+m}},$$

siendo ésta una serie en potencias negativas de $(z - z_0)$ que converge para

$$|w| = \frac{|r_j - z_0|}{|z - z_0|} < 1.$$

II) La función f definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por

$$f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

tiene una singularidad aislada en el punto $z_0 = 0$. Para calcular su desarrollo de Laurent en la corona $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es decir, en potencias de z, basta recurrir a la serie de Taylor de la función exponencial en torno al punto $w_0 = 0$; así, para $z \neq 0$,

$$f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n},$$

siendo este último el desarrollo de Laurent en la citada corona; la parte regular del desarrollo es el polinomio $z^2 + z + \dfrac{1}{2}$ y la parte residual la última serie.

3.3. Residuos

Dedicamos este epígrafe al concepto de *residuo* y a los métodos prácticos de cálculo de residuos que se utilizan de forma constante en las aplicaciones que se expondrán posteriormente.

Definición 3.14. Sean f una función holomorfa en un disco punteado $B'(z_0, R)$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

su desarrollo de Laurent en $B'(z_0, R)$. El número complejo b_1 se denomina *residuo* de f en z_0 y se denota por

$$\mathrm{Res}(f, z_0).$$

Observación 3.15. En las condiciones de la definición anterior, el residuo de f en el punto z_0 se obtiene, de acuerdo con las fórmulas (3.2), mediante la integral

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} f(w)\, dw,$$

siendo Γ_ρ la circunferencia centrada en z_0 y de radio ρ, con $0 < \rho < R$, orientada positivamente. Ahora bien, la evaluación de estas integrales es, salvo en casos muy concretos, de extremada dificultad, y se recurre en la práctica a otros argumentos. Concretamente, en el caso particular de que el punto z_0 sea una singularidad polar de la función f, los siguientes resultados proporcionan diversos métodos de cálculo, obtenidos a partir de las propiedades ya expuestas de las funciones analíticas y las singularidades aisladas.

Proposición 3.16. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ que tiene una singularidad de tipo evitable en el punto z_0. Entonces

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = 0\,.$$

Corolario 3.17. Sean f y g dos funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que tienen un cero del mismo orden en z_0. Entonces

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = 0.$$

Lo mismo sucede si el orden del cero de f en z_0 es superior al del cero de g.

Corolario 3.18. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f, g dos funciones holomorfas en $U \setminus \{z_0\}$ que tienen un polo del mismo orden en z_0. Entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = 0.$$

Lo mismo se puede decir si el orden del polo de g en z_0 es superior al del polo de f.

Proposición 3.19. Sea g una función holomorfa en un disco $B(z_0, r)$ con $g(z_0) \neq 0$. Si $m \in \mathbb{N}$, la función f definida en el disco punteado $B'(z_0, r)$ por

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

tiene un polo de orden m en el punto z_0 y

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Observación 3.20. Toda función f que tenga un polo de orden m en el punto z_0 se puede escribir como en la proposición anterior, pero puede resultar extremadamente laborioso determinar en situaciones concretas esa función g. Seguidamente se presentan algunos resultados relativos a singularidades polares de orden pequeño, que surgen al considerar cocientes de funciones, y que permiten soslayar ese inconveniente.

Proposición 3.21. Sean f y g funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero simple en z_0, es decir,

$$f(z_0) \neq 0, \qquad g(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g'(z_0) \neq 0.$$

Entonces f/g tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

El resultado anterior se generaliza en la siguiente

Proposición 3.22. Sean f y g dos funciones holomorfas en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero de orden m en z_0 y g tiene un cero de orden $m+1$ en z_0. Entonces f/g tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = (m+1)\,\frac{f^{m)}(z_0)}{g^{m+1)}(z_0)}.$$

Proposición 3.23. Sean f y g funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero doble en z_0, es decir,

$$f(z_0) \neq 0\,, \qquad g(z_0) = g'(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g''(z_0) \neq 0.$$

Entonces f/g tiene un polo doble en z_0 y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = 2\,\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3}\,\frac{f(z_0)\,g'''(z_0)}{\big[g''(z_0)\big]^2}.$$

Proposición 3.24. Sean f y g funciones holomorfas en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero simple en z_0 y g tiene un cero de orden 3 en z_0, es decir,

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) \neq 0, \qquad g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g'''(z_0) \neq 0.$$

Entonces f/g tiene un polo doble en z_0 y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = 3\,\frac{f''(z_0)}{g'''(z_0)} - \frac{3}{2}\,\frac{f'(z_0)\,g^{4)}(z_0)}{\big[g'''(z_0)\big]^2}.$$

3.4. Teorema de los residuos. Aplicaciones

La idea clave del teorema que da nombre a este epígrafe es bien simple: utilizar el concepto de residuo para calcular integrales complejas. Las aplicaciones de este teorema que presentamos aquí justifican sobradamente el interés de este resultado.

Teorema 3.25 (Teorema de los residuos). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función definida y holomorfa en U salvo quizá en una familia de puntos que son todos ellos singularidades aisladas de f. Supongamos que D es un dominio de Jordan con $D \cup \partial D \subset U$ y tal que ninguna de las singularidades de f está en la curva $\Gamma = \partial D$. Entonces, si $z_1, z_2, \ldots, z_m$ son las singularidades de f en el interior de D, se tiene que

$$\oint_\Gamma f(w)\, dw = 2\,\pi\, i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_j),$$

cuando en Γ se considera la orientación natural inducida por D.

Observación 3.26. En las condiciones del teorema anterior la función f tiene una cantidad finita o a lo sumo numerable de singularidades aisladas (es decir, éstas se pueden numerar como los términos de una sucesión). Además, en cada subconjunto compacto del abierto U (en particular, en $\overline{D}$) sólo puede haber un número finito de ellas.

Los resultados que se presentan a continuación son consecuencia del teorema de los residuos y proporcionan métodos prácticos para la evaluación de cierto tipo de integrales de Riemann o impropias que en ocasiones son imposibles de obtener mediante el cálculo de primitivas.

3.4.1. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

Proposición 3.27. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano superior

$$\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\},$$

y f una función definida y holomorfa en U excepto para un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real. Si existen constantes $M, R > 0$ y $p > 1$ tales que en Π^+ se tiene que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad \text{si } |z| \geq R, \tag{3.3}$$

entonces f es integrable en $\mathbb{R}$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\,\pi\, i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(f, a).$$

Observaciones 3.28.

I) Si se verifican las condiciones de la proposición anterior sustituyendo Π^+ por el semiplano inferior

$$\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 0\},$$

entonces f es integrable en $\mathbb{R}$ y su integral viene dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -2\,\pi\, i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(f, b).$$

II) Las fórmulas anteriores se obtienen aplicando el teorema de los residuos al borde de semicírculos del tipo

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\,,\, \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \qquad \text{y} \qquad \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\,,\, \operatorname{Im}(z) \leq 0\}\,,$$

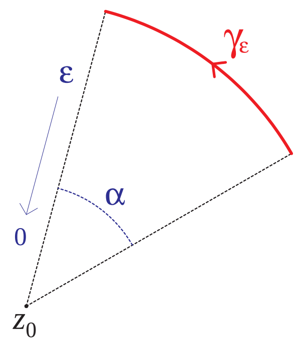
respectivamente; estas curvas consisten en la unión del segmento $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ y una semicircunferencia. Para radios R suficientemente grandes, todas las singularidades de la función en el semiplano correspondiente se encuentran en el interior del semicírculo, y el resultado se deduce al pasar al límite cuando $R \to \infty$.

III) Las funciones racionales $f = P/Q$, donde P y Q son polinomios tales que $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P) + 2$ y Q no tiene ceros en la recta real, verifican la condición (3.3) en ambos semiplanos, concretamente, el exponente p es en este caso

$$p = \text{grado}(Q) - \text{grado}(P) \geq 2 > 1.$$

Proposición 3.29 (Lema de Jordan). Sea f una función holomorfa en un disco punteado $B'(z_0, r)$ y tal que en el punto z_0 tiene un polo simple. Para cada ε con $0 < \varepsilon < r$, sea γ_ε un arco de circunferencia de centro z_0, ángulo fijo α y radio ε, recorrido en sentido antihorario. Entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz = \alpha\, i\, \mathrm{Res}(f, z_0).$$



El lema de Jordan se demuestra sin hacer uso del teorema de los residuos, y combinado con éste proporciona nuevas herramientas de cálculo entre las que se encuentra el método expuesto a continuación.

3.4.2. Valor Principal de Cauchy.

Antes de dar la definición presentaremos un ejemplo sencillo que a buen seguro arrojará mucha luz sobre el asunto que tratamos:

Consideremos la función definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = 1/x$. Es de sobra conocido que f no es integrable en ningún intervalo que tenga a 0 por extremo. Ahora bien, es sencillo comprobar que fijados a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $a < 0 < b$, para cada ε, con $0 < \varepsilon < \min\{|a|, b\}$, se tiene que

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{-a}\right) \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} \right) = \ln\left(\frac{b}{-a}\right).$$

El valor de este límite no es, por supuesto, el de ninguna integral impropia; es el denominado *valor principal de Cauchy* de la integral de f en (a, b) y se escribe

$$VP \int_a^b \frac{dx}{x} \;=\; \ln(b) - \ln(-a)\,.$$

Definición 3.30. Sea f una función definida y continua en $\mathbb{R}$ excepto en un número finito de puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Si f es integrable en $(-\infty, x_1 - \varepsilon)$ y $(x_n + \varepsilon, \infty)$ para todo $\varepsilon > 0$ (o simplemente, si las correspondientes integrales impropias convergen) y existe y es finito el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{x_1 - \varepsilon} f(x)\, dx + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1} + \varepsilon}^{x_n - \varepsilon} f(x)\, dx + \int_{x_n + \varepsilon}^{\infty} f(x)\, dx \right),$$

entonces dicho límite se denomina *valor principal de Cauchy* de la integral de f en $\mathbb{R}$ (o, simplemente, valor principal de Cauchy de f en $\mathbb{R}$) y se denota por

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

Proposición 3.31. Sean U un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano Π^+ y f una función holomorfa en U excepto en un número finito de singularidades aisladas. Sean $x_1, \ldots, x_m$ las posibles singularidades de f en el eje real y supongamos que todas ellas son polos simples. Si se verifica además la condición (3), entonces existe el valor principal de Cauchy de f en $\mathbb{R}$ y se tiene que

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\,\pi\, i \sum_{\mathrm{Im}(a) > 0} \mathrm{Res}(f, a) + \pi\, i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, x_j)\,.$$

Proposición 3.32. Si se sustituye Π^+ por Π^-, y se verifican las restantes condiciones, entonces

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -2\,\pi i \sum_{\mathrm{Im}(b) < 0} \mathrm{Res}(f, b) - \pi\, i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, x_j)\,.$$

Observaciones 3.33.

i) La prueba del resultado anterior se lleva a cabo de forma similar a como se procede en 3.28.ii, modificando las curvas en las que se integra para evitar las singularidades en el eje real; para ello se consideran semicircunferencias (arcos de amplitud π) centradas en los puntos x_j y de radio ε que se hace tender hacia 0.

ii) Toda integral impropia convergente puede ser observada como un valor principal; su convergencia asegura la existencia y finitud del límite mencionado.

3.4.3. Transformadas de Fourier: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$.

Definición 3.34. Dada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y un número real ω, si la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$ es convergente, su valor se denomina *transformada de Fourier* de f en el punto ω y se denota por $\widehat{f}(\omega)$. En particular, si f es integrable en $\mathbb{R}$, $\widehat{f}$ está definida para todo $\omega \in \mathbb{R}$ (la función $e^{-i\omega x} f(x)$ es integrable ya que $e^{-i\omega x}$ es continua y de módulo 1).

Proposición 3.35. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano Π^+ y f una función definida y holomorfa en U excepto para un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real. Supongamos también que existen constantes M, $R > 0$ tales que en Π^+ se tiene que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \qquad \text{si } |z| \geq R\,. \tag{3.4}$$

Entonces, para cada $\omega < 0$ existe $\widehat{f}(\omega)$ y

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), a)\,.$$

Si las condiciones anteriores se verifican sustituyendo Π^+ por el semiplano inferior Π^-, entonces existe $\widehat{f}(\omega)$ para cada $\omega > 0$ y

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = -2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), b)\,.$$

Observaciones 3.36.

i) Las fórmulas anteriores se obtienen aplicando el teorema de los residuos al borde de rectángulos de vértices

$$-R,\ R,\ R(1+i),\ R(-1+i) \qquad \text{y} \qquad -R,\ R,\ R(1-i),\ R(-1-i)\,,$$

respectivamente, pasando luego al límite cuando $R \to \infty$; de la condición (3.4) se deduce, entre otras cosas, que la integral impropia de $e^{i\omega x} f(x)$ en $\mathbb{R}$ converge.

ii) Las funciones racionales $f = P/Q$, donde P y Q son polinomios tales que $\operatorname{grado}(Q) > \operatorname{grado}(P)$ y Q no tiene ceros en la recta real, verifican la condición (3.4) en ambos semiplanos.

iii) En realidad, se puede sustituir la condición (3.4) por esta otra más débil:

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0\,.$$

iv) El valor de la transformada de Fourier de f en $\omega = 0$ se obtiene, cuando se verifican las condiciones oportunas, según lo expuesto en la proposición 3.27 (nótese que en este caso resulta $e^{i0x} f(x) = f(x)$).

3.4.4. Valor principal de Cauchy de transformadas de Fourier.

Proposición 3.37. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano superior Π^+ y f una función definida y holomorfa en U, excepto para un número finito de singularidades aisladas. Sean $x_1, \dots, x_m$ las posibles singularidades en el eje real y supongamos que todas son polos simples. Si se verifica la condición (3.4), entonces, para cada $\omega < 0$ existe el valor principal de Cauchy de $e^{-i\omega x} f(x)$ y

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), a) + \pi\,i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), x_j)\,.$$

Si se sustituye Π^+ por Π^- y se verifican en este semiplano las mismas condiciones, entonces, para cada $\omega > 0$ existe el valor principal de Cauchy de $e^{-i\omega x} f(x)$ y se tiene que

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = -2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), b) - \pi\,i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), x_j)\,.$$

Observación 3.38. Para la prueba del resultado anterior se procede como se relata en 3.33.i, modificando en este caso las curvas que se citan en 3.36.i.

En las dos situaciones es esencial que las singularidades sobre el eje real sean polos simples para garantizar la existencia del valor principal, o si se prefiere, para poder aplicar el lema de Jordan.

Ejercicios

3.1 Analizar las singularidades de las siguientes funciones:

i) $\dfrac{e^z(z-3)}{(z-1)(z-5)}$ ii) $\dfrac{e^z-1}{z}$ iii) $\dfrac{e^z-2}{z}$ iv) $\dfrac{\cos(z)}{1-z}$ v) $\dfrac{1}{z-z^3}$

vi) $\mathrm{Tgh}(z)$ vii) $z\,e^{-z}$ viii) $\dfrac{z^4}{1+z^4}$ ix) $\exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$ x) $\mathrm{tg}(z)$ xi) $\dfrac{\mathrm{tg}(z)}{\mathrm{sen}(z^3)}$.

3.2 Obtener el desarrollo de la función $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2}$:

i) En su serie de Taylor en $z_0=1$, indicando el abierto de convergencia.

ii) En su serie de Laurent en la corona $\{z\in\mathbb{C} : |z-1|>1\}$.

3.3 Proporcionar los desarrollos de Laurent en potencias de z para la función $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$, especificando las regiones donde son válidos cada uno de ellos.

3.4 Desarrollar en serie de Laurent la función $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ en las siguientes coronas:

i) $\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<3\}$ ii) $\{z\in\mathbb{C} : |z|>3\}$ iii) $\{z\in\mathbb{C} : 0<|z|<1\}$

iv) $\{z\in\mathbb{C} : 0<|z+1|<2\}$ v) $\{z\in\mathbb{C} : |z+1|>2\}$ vi) $\{z\in\mathbb{C} : 0<|z+3|<2\}$.

3.5 Determinar, clasificándolas, las singularidades de las siguientes funciones y determinar en ellas los residuos correspondientes:

i) $\dfrac{e^z}{z\,(z-1)}$ ii) $\dfrac{e^{\pi z}}{1+z^2}$ iii) $\dfrac{z^3+z^2+2}{z\,(z^2-1)^2}$ iv) $\mathrm{tg}(z)$

v) $\left(\dfrac{1-\cos(z)}{z^2}\right)^2$ vi) $\mathrm{sen}\left(1/z\right)$ vii) $\dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$ viii) $(z-1)^2\exp\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

3.6 Sean n un número natural. Probar que los residuos de la función $f(z)=\dfrac{z^{n-1}}{z^n+a^n}$, $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, en sus singularidades son todos iguales a $1/n$.

3.7 Evaluar la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z^2-2\,z+5}$ en los siguientes casos:

i) Γ es la circunferencia parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(t)=3\,e^{it}$, $t\in[0,2\,\pi]$.

ii) Γ es el triángulo de vértices 0, $2+3\,i$, $3\,i$.

3.8 Evaluar la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1}$ en los siguientes casos:

i) Γ es la curva formada por el segmento $[-2,2]$ del eje real y la semicircunferencia superior centrada en 0 y de radio 2.

ii) Γ es el cuadrado de vértices 0, 1, $1+i$, i.

3.9 Evaluar la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1+z}{1-\cos(z)}\,dz$, siendo Γ la circunferencia centrada en $z_0=0$ y de radio 7.

3.10 Integrando la función $f(z)=\dfrac{e^z}{z^{n+1}}$ a lo largo de la circunferencia unidad, deducir el valor de

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos\big(n\,t-\mathrm{sen}(t)\big)\,dt\,.$$

3.11 Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{e^x+e^{-x}}\,dx=\frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}\,.$$

Indicación: Integrar la función $f(z)=\dfrac{\cos(z)}{e^z+e^{-z}}$ en rectángulos de vértices $-r$, r, $r+i\,\pi$, $-r+i\,\pi$ y pasar luego al límite cuando r tiende a $+\infty$.

3.12 Calcular, procediendo de forma similar a la del ejercicio anterior,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2\pi x}}\,dx\,.$$

3.13 Si Γ denota la circunferencia unidad, probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{e^{z\,w}}{w^{n+1}}\,dw\,.$$

3.14 Aplicando la proposición 3.27, calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

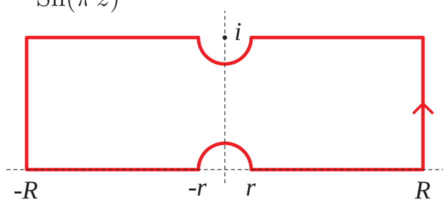
I) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)}$ III) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

IV) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2\,x+4}$ V) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx,\quad a>0.$

3.15 Sea $a \in \mathbb{R}$, $0<a<\pi$. Integrando la función $f(z) = \dfrac{e^{az}}{\mathrm{Sh}(\pi\, z)}$ a lo largo de curvas como la de la figura, probar que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{Sh}(a\,t)}{\mathrm{Sh}(\pi\,t)}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{a}{2}\right).$$

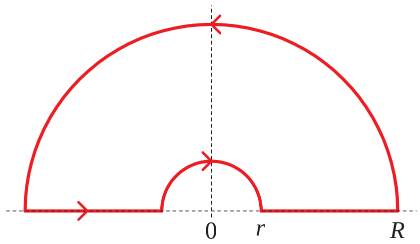
(Háganse tender R hacia ∞ y r hacia 0.)



3.16 Integrando la función $f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ a lo largo de curvas como la de la figura, calcular $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}\,dx\,.$

Procediendo igual con la función $f(z) = \dfrac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}$ calcular

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^3(x)}{x^3}\,dx\,.$$



3.17 Calcúlense los siguientes valores principales de Cauchy:

I) $\displaystyle VP\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x\,(x^2-1)}$ II) $\displaystyle VP\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2\,(x-1)},\quad \mathrm{Im}(a)>0.$

3.18 Aplicando el método expuesto en la proposición 3.35:

I) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx.$

II) Probar que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi\,e^{-b}}{2\,b}$ para todo $b>0$.

III) Probar que, para todos $a,b>0$, $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(a\,x)}{\left(x^2+b^2\right)^2}\,dx = \frac{\pi}{4\,b^3}\,(1+a\,b)\,e^{-a\,b}.$

3.19 Aplicando la proposición 3.37, calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

I) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,dx$ II) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,\frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ III) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(\pi\,x)}{x\,(x+1)\,(x^2+1)}\,dx.$

Capítulo 4

La transformada Z

Es indudable que las transformaciones funcionales juegan un papel esencial en el estudio de los modelos matemáticos que rigen los modelos de las Ciencias. La que presentamos en este tema tiene la virtud de permitir el análisis de procesos discretos mediante el estudio de funciones analíticas. Entran en juego ahora las nociones de *polo*, *serie de Laurent*, etc., que se han introducido en los temas precedentes.

Entre las aplicaciones de la transformada Z se encuentra el estudio de sistemas (de señales) discretos, y aunque el propósito de estas notas es la presentación rigurosa del aparato matemático, sin entrar en detalles que serían propios de un curso específico de Teoría de la Señal, usaremos también la terminología y notación propias de ese campo del conocimiento.

4.1. Definiciones y propiedades generales

A partir de ahora consideraremos series de Laurent centradas en $z_0 = 0$, que según la notación de 3.11.II se identifican con una familia numerable indexada en $\mathbb{Z}$, esto es, $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ que denominaremos *sucesión* (*doblemente infinita*). En ciertos ámbitos, especialmente en Teoría de la Señal, es habitual denotar a_n por $a[n]$ para $n \in \mathbb{Z}$, usando los corchetes para enfatizar que se trata de una *señal discreta* en distinción de las señales continuas, en las que se usan los paréntesis: p.e. $f(t)$.

Por supuesto, también se contemplan las series de Laurent que representan funciones analíticas en $z_0 = 0$, es decir, con parte residual nula. Análogamente, juegan un papel destacado las denominadas *sucesiones causales*, que son aquellas del tipo $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ con $a_n = 0$ si $n < 0$.

Recordemos que para una serie de Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ el conjunto de puntos donde converge absolutamente, supuesto no vacío, es una corona circular determinada por dos radios $0 \leq \rho_1 < \rho_2$, concretamente:

$*$ La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge si $|z| < \rho_2$ y no converge si $|z| > \rho_2$.

$*$ La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ converge si $|z| > \rho_1$ y no converge si $|z| < \rho_1$.

Diremos que una serie de Laurent es *convergente* si su corona de convergencia absoluta es no vacía.

Definición 4.1. Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite *transformada Z* si la serie de Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$ es convergente. En este caso, la función

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n \tag{4.1}$$

(identificada con la sucesión $\{a_{-n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$) se denomina *transformada Z* de $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ se denomina *parte causal* de la transformada, mientras que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ es la *parte anticausal*.

Se denomina *corona de convergencia de la transformada Z* de $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ a la corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$ de la serie de Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$.

En adelante usaremos la abreviatura TZ para referirnos a la transformada Z de una sucesión.

Teorema 4.2 (inversión de la TZ). Sea f una función holomorfa en un abierto que contiene a la corona $C = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$. Existe una única sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tal que en la corona C la función f coincide con la TZ de dicha sucesión. Además se verifica:

I) La corona de convergencia de la TZ de $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ contiene a la corona C.

II) Para cada número real r, con $\rho_1 < r < \rho_2$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$a_n = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{|z|\,=\,r} f(z)\, z^{n-1} dz$$

La sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ así determinada se denomina *transformada inversa* Z de la función f.

Propiedades 4.3 (de la TZ). Sean $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dos sucesiones que admiten TZ, siendo

$$C_a = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\} \qquad \text{y} \qquad C_b = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$$

sus respectivas coronas de convergencia y F, G las correspondientes TZ.

I) **Linealidad:** Si $R_1 = \max\{\rho_1, r_1\} < R_2 = \min\{\rho_2, r_2\}$, entonces para cada par de números complejos α, β, la sucesión $\{\alpha\, a_n + \beta\, b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ en una corona que contiene a

$$C_a \cap C_b = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}\,.$$

Además, en esta corona la TZ de $\{\alpha\, a_n + \beta\, b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es la función

$$H = \alpha\, F + \beta\, G\,.$$

II) **Conjugación:** La sucesión $\{\overline{a_n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$C_a = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$$

y su transformada es la función

$$H(z) = \overline{F(\overline{z})}\,.$$

III) **Traslación (desfase):** Sea p un número entero. La sucesión $\{a_{n+p}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$C_a = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$$

y su transformada es la función

$$H(z) = z^p F(z)\,.$$

IV) **Modulación:** Sea w un número complejo no nulo. La sucesión $\{w^n a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$\{z \in \mathbb{C} : |w|\rho_1 < |z| < |w|\rho_2\}$$

y su TZ es la función

$$H(z) = F\Big(\frac{z}{w}\Big)\,.$$

V) **Derivación:** La sucesión $\{n\, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$C_a = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$$

y su TZ es la función

$$H(z) = -z\, F'(z)\,.$$

VI) **Simetría (inversión en tiempo o "time reversal"):** La sucesión $\{a_{-n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$\Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\rho_2} < |z| < \frac{1}{\rho_1}\Big\}$$

y su TZ es la función

$$H(z) = F\Big(\frac{1}{z}\Big)\,.$$

VII) **Convolución discreta:** Si $R_1 = \max\{\rho_1, r_1\} < R_2 = \min\{\rho_2, r_2\}$, para cada número entero n se tiene que la serie numérica

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, b_{n-k}$$

converge absolutamente; sea c_n su suma. La sucesión $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ se denomina *convolución* de las sucesiones $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Esta sucesión admite TZ en una corona que contiene a

$$C_a \cap C_b = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$$

y la TZ de $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es la función

$$H(z) = F(z)\, G(z)\,.$$

Notas: El producto de convolución se denota por el símbolo '$*$', esto es, $c[n] = (a * b)[n]$. Si las sucesiones $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ son ambas causales, entonces la convolución no es otra cosa que el producto de Cauchy

$$c_n = 0 \quad \text{para} \quad n < 0 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \quad \text{para} \quad n \geq 0\,.$$

VIII) **Producto de sucesiones:** Si $\rho_1 r_1 < \rho_2 r_2$ la sucesión $\{a_n b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ en una corona que contiene a

$$\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 r_1 < |z| < \rho_2 r_2\}\,.$$

Además, si la función H es la TZ de $\{a_n b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, se tiene que

$$H(z) \;=\; \frac{1}{2\,\pi\, i}\int_{|w|\,=\,r} F\Big(\frac{z}{w}\Big)\,\frac{G(w)}{w}\,dw\,, \qquad \text{donde } \ r_1 < r < r_2 \ \text{ y } \ r\,\rho_1 < |z| < r\,\rho_2$$

o también

$$H(z) \;=\; \frac{1}{2\,\pi\, i}\int_{|w|\,=\,\rho} \frac{F(w)}{w}\,G\Big(\frac{z}{w}\Big)\,dw\,, \qquad \text{donde } \ \rho_1 < \rho < \rho_2 \ \text{ y } \ \rho\, r_1 < |z| < \rho\, r_2$$

Ejemplos 4.4. En los siguientes ejemplos utilizaremos la notación simplificada $a[n]$ para referirnos a la sucesión (o señal, como se prefiera) $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Este abuso, suprimiendo el dominio de las funciones, es habitual y en el contexto adecuado no causa mayores inconvenientes.

I) Si denotamos por $\boldsymbol{\delta}$ al *impulso unidad*, es decir, la sucesión cuyos elementos son

$$\delta_n = \boldsymbol{\delta}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0; \end{cases}$$

su TZ es la función C_1 constantemente igual a 1: $C_1(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Entonces, para $p \in \mathbb{Z}$ la función $G(z) = z^p = z^p\, C_1(z)$ es la transformada del desfase $\boldsymbol{\delta}[n+p]$ (ver propiedad 4.3.III), de donde se sigue inmediatamente que para $\alpha \in \mathbb{C}$

- $TZ\big(\alpha\, \boldsymbol{\delta}[n+p]\big) = \alpha\, z^p$

con corona de convergencia igual a todo $\mathbb{C}$ si $p \geq 0$ o $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $p < 0$.

II) Consideremos la señal *escalón* $\boldsymbol{\epsilon}$, cuyos valores son

$$\epsilon_n = \boldsymbol{\epsilon}[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ 1 & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Su TZ, que tiene parte anti-causal nula, es la suma geométrica

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - {}^1\!/_z} = \frac{z}{z-1}\,, \qquad |z| > 1$$

(recuérdese que una serie geométrica converge si, y sólo si, su razón tiene módulo menor que 1). En consecuencia, si $w \neq 0$, la sucesión $\{w^n \boldsymbol{\epsilon}[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ (ver propiedad 4.3.IV) y

- $TZ\big(w^n \boldsymbol{\epsilon}[n]\big) = G(z) = F\Big(\dfrac{z}{w}\Big) = \dfrac{z}{z-w}$

con corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |w|\}$.

III) Si se revierten en tiempo las señales del apartado anterior, esto es, considerando

$$\boldsymbol{\gamma}[n] = w^{-n} \boldsymbol{\epsilon}[-n] = \begin{cases} w^{-n} & \text{si } n \leq 0, \\ 0 & \text{si } n > 0; \end{cases}$$

en virtud de la propiedad 4.3.VI, estas admiten TZ y

- $TZ(w^{-n} \boldsymbol{\epsilon}[-n]) = G\Big(\dfrac{1}{z}\Big) = \dfrac{{}^1\!/_z}{{}^1\!/_z - w} = \dfrac{1}{1 - w\,z} = \dfrac{-w}{z - {}^1\!/_w}$

con corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| < {}^1\!/_{|w|}\}$.

IV) Aplicando la propiedad 4.3.V la señal cuyos valores son

$$f[n] = n\,\boldsymbol{\epsilon}[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \le 0, \\ n & \text{si } n > 0; \end{cases}$$

admite TZ con la misma corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, y su valor es:

- $$TZ\big(n\,\boldsymbol{\epsilon}[n]\big) = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2} = z\,(z-1)^{-2}\,.$$

Según 4.3.III, resulta que $TZ\big((n-1)\,\boldsymbol{\epsilon}[n-1]\big) = z^{-1}TZ(n\,\boldsymbol{\epsilon}[n]) = (z-1)^{-2}$ para $|z| > 1$; y derivando de nuevo

- $$TZ\big(n(n-1)\,\boldsymbol{\epsilon}[n-1]\big) = -z\,\big((z-1)^{-2}\big)' = 2\,z\,(z-1)^{-3}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Volviendo a razonar igual $TZ\big((n-1)(n-2)\,\boldsymbol{\epsilon}[n-2]\big) = z^{-1}TZ\big(n(n-1)\,\boldsymbol{\epsilon}[n-1]\big) = 2\,(z-1)^{-3}$, y derivando

- $$TZ\big(n(n-1)(n-2)\boldsymbol{\epsilon}[n-2]\big) = -z\Big(2\,(z-1)^{-3}\Big)' = 6\,z\,(z-1)^{-4}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Recurrentemente, se deduce que

- $$TZ\big(n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\boldsymbol{\epsilon}[n-k+1]\big) = k!\,\frac{z}{(z-1)^{k+1}}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Finalmente, nótese que $n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\boldsymbol{\epsilon}[n-k+1] = n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]$ pues para $n < k$ el coeficiente $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ se anula y para $n \ge k$, es decir, $n-k \ge 0$, se tiene que $\boldsymbol{\epsilon}[n] = 1 = \boldsymbol{\epsilon}[n-k+1]$. Atendiendo a los coeficientes binomiales, la fórmula anterior se reescribe

- $$TZ\left(\binom{n}{k}\,\boldsymbol{\epsilon}[n]\right) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Combinando lo anterior con la propiedad 4.3.IV, para $w \ne 0$ se sigue que

- $$TZ\left(\binom{n}{k}\,w^n\boldsymbol{\epsilon}[n]\right) = \frac{w^k z}{(z-w)^{k+1}}\,, \qquad |z| > |w|\,.$$

V) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es causal y admite TZ, entonces la corona de convergencia de su transformada $F(z)$ es el exterior de un disco, es decir, de la forma $\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z|\}$; lo mismo se puede decir para cualquier desfase suyo $\{a_{n+p}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, pues la parte anticausal consta de una cantidad finita de términos no nulos.

Supongamos además que $p > 0$ y que "truncamos" el desfase $a[n+p]$ haciendo nulos los valores para $n < 0$, o lo que es lo mismo, consideramos la señal

$$g[n] = \boldsymbol{\epsilon}[n]\,a[n+p] = \{\ldots, 0, 0, 0, \overset{n=0}{a_p}, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_{p+n}, \ldots\}$$

entonces $g[n]$ tiene TZ igual a la función

$$G(z) = z^p\Big(F(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \ldots - \frac{a_{p-1}}{z^{p-1}}\Big)$$

con la misma corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z|\}$.

4.2. Transformada inversa Z de fracciones racionales

La fórmula de inversión dada en el teorema 4.2 es, a todas luces, de difícil ejecución en la práctica. No obstante, para funciones sencillas (en concreto, los cocientes de polinomios) las propiedades anteriores proporcionan argumentos viables para determinar tal inversión. Explicaremos someramente estos argumentos, ilustrados luego con algunos ejemplos:

Recordemos primero que todo polinomio $Q(z)$ con coeficientes complejos se puede descomponer de forma única como un producto

$$Q(x) = C\,(z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2}\ldots(z-r_k)^{m_k}\,,$$

donde C es una constante (el coeficiente del monomio de mayor grado), $r_1, \ldots, r_k$ son las raíces de Q, y $m_1, \ldots, m_k$ son sus multiplicidades respectivas.

Si P y Q son polinomios en la variable z con coeficientes complejos es posible reescribir la *fracción racional* $F(z) = {}^{P(z)}/_{Q(z)}$ de la forma

$$F(z) = C(z) + \frac{R(z)}{Q(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p + \frac{R(z)}{Q(z)}\,,$$

donde C es el cociente de la división de P entre Q (si eventualmente el grado de P es mayor o igual que el de Q) y R es el resto de tal división. Luego, si $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son las raíces de Q, la fracción ${}^{R(z)}/_{Q(z)}$ se puede descomponer en *fracciones simples* para concluir que $F(z)$ se escribe de forma única

$$\begin{aligned} F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p \quad &+ \quad \frac{b_{1,1}}{(z-r_1)} + \frac{b_{1,2}}{(z-r_1)^2} + \ldots + \frac{b_{1,m_1}}{(z-r_1)^{m_1}} + \\ &\ \ \vdots \\ &+ \quad \frac{b_{k,1}}{(z-r_k)} + \frac{b_{k,2}}{(z-r_k)^2} + \ldots + \frac{b_{k,m_k}}{(z-r_k)^{m_k}} \end{aligned}$$

donde los a_j y los $b_{i,j}$ son números complejos.

En virtud de la linealidad es suficiente determinar la transformada inversa de los monomios del cociente y de las fracciones simples:

I) Según el ejemplo 4.4.I es obvio que para $p \geq 0$

$$\text{la transformada inversa de } \ a_p\, z^p \ \text{ es } \ a_p\, \boldsymbol{\delta}[n+p] = \{\ldots, 0, 0, 0, \overset{n=-p}{a_p}, 0, 0, \ldots, \overset{n=0}{0}, \ldots\}$$

con corona de convergencia igual a todo $\mathbb{C}$.

II) Para fracciones simples $G(z) = \dfrac{1}{(z-r)^m}$ la cuestión es un poco más complicada, pues si $r \neq 0$ existen dos coronas disjuntas donde tales funciones admiten desarrollos de Laurent centrados en $z_0 = 0$: $\{|z| > |r|\}$ y $\{|z| < |r|\}$. Si atendemos a la práctica:

a. cuando en Teoría de la Señal se consideran desfases u de señales causales (i.e., con *tiempo de encendido* finito: $u[n] = 0$ para $n < n_0$, ver ejercicio 4.5), la corona de convergencia de su TZ es el exterior de un disco centrado en $z_0 = 0$;

b. por otro lado, en la teoría de *sistemas discretos* se consideran señales u *sumables* (la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \big|u[n]\big|$ es convergente), lo que implica que la corona de convergencia contiene a la circunferencia unidad $\{|z| = 1\}$.

Estas consideraciones nos indican la forma de proceder:

Pongamos $m = k+1$ (i.e. $k = m-1$) y consideremos la función $G(z) = \dfrac{1}{(z-r)^m} = \dfrac{1}{(z-r)^{k+1}}$.

Según el ejemplo 4.4.IV se tiene que

$$z\,G(z) = \frac{z}{(z-r)^{k+1}} = TZ\left(\frac{1}{r^k}\binom{n}{k} r^n \boldsymbol{\epsilon}[n]\right) = TZ\left(\frac{1}{r^{m-1}}\binom{n}{m-1} r^n \boldsymbol{\epsilon}[n]\right), \qquad |z| > |r|\,.$$

Pero según la propiedad 4.3.III

$$G(z) = z^{-1} z\, G(z) = TZ\left(\frac{1}{r^{m-1}}\binom{n-1}{m-1} r^{n-1} \boldsymbol{\epsilon}[n-1]\right), \qquad |z| > |r|\,.$$

Ejemplos 4.5. En estos ejemplos aplicaremos las consideraciones anteriores a dos casos concretos.

I) Sea $F(z) = \dfrac{z^3}{z^2-1}$. Esta función tiene polos simples en $z = 1$ y $z = -1$, por lo que las coronas donde es susceptible de desarrollar en serie de Laurent son $\{|z| > 1\}$ y $\{|z| < 1\}$. Calculemos su transformada Z inversa en la primera de ellas. Primero escribamos

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1}\,, \qquad |z| > 1\,,$$

de donde se sigue que (ver ejemplos 4.4.I y 4.4.II)

$$F(z) = z + \frac{1}{2}\,\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\,\frac{z}{z+1} = TZ\big(\boldsymbol{\delta}[n+1]\big) + \frac{1}{2}\,TZ\big(\boldsymbol{\epsilon}[n]\big) - \frac{1}{2}\,TZ\big((-1)^n \boldsymbol{\epsilon}[n]\big)\,,$$

con corona de convergencia $\{|z| > 1\}$. En resumen, la transformada inversa de F es la señal

$$\varphi[n] = \boldsymbol{\delta}[n+1] + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon}[n] - \frac{1}{2}\,(-1)^n \boldsymbol{\epsilon}[n]\,.$$

II) Sea $F(z) = \dfrac{z}{(z - 1/2)(z - 2)}$. Esta función tiene polos simples en $z = 1/2$ y $z = 2$.

Si buscamos soluciones de $TZ(\varphi) = F$ con $\varphi[n]$ sumable, de entre todas las coronas donde F admite desarrollo de Laurent, la única que contiene a la circunferencia unidad es $\{1/2 < |z| < 2\}$; en ella buscaremos la transformada Z inversa. Se tiene que

$$F(z) = \frac{z}{(z - 1/2)(z - 2)} = z\,\frac{1}{(z - 1/2)(z - 2)} = z\Big(\frac{2}{3}\,\frac{1}{z-2} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{z - 1/2}\Big) = \frac{2}{3}\,\frac{z}{z-2} - \frac{2}{3}\,\frac{z}{z - 1/2}\,.$$

Por una parte, según 4.4.II, se tiene que

$$\frac{z}{z - 1/2} = TZ\big(2^{-n}\boldsymbol{\epsilon}[n]\big)\,, \qquad |z| > \frac{1}{2}\,,$$

y atendiendo al ejemplo 4.4.III y la propiedad 4.3.III, se deduce que

$$\frac{z}{z-2} = -2\,z\,\frac{-2^{-1}}{z - 1/2^{-1}} = TZ\big(-2^{n}\boldsymbol{\epsilon}[-n-1]\big)\,, \qquad |z| < \frac{1}{|2^{-1}|} = 2\,.$$

Recogiendo la aportación de los dos términos, la transformada Z inversa de F con corona de convergencia $\{1/2 < |z| < 2\}$ es la señal

$$\varphi[n] = \frac{2}{3}\Big(-2^{n}\boldsymbol{\epsilon}[-n-1] - 2^{-n}\boldsymbol{\epsilon}[n]\Big) = -\frac{2^{n+1}}{3}\,\boldsymbol{\epsilon}[-n-1] - \frac{2^{-n+1}}{3}\,\boldsymbol{\epsilon}[n]\,.$$

Si se buscan soluciones φ con tiempo de encendido finito, la corona de convergencia resulta ser $\{|z| > 2\}$; en este caso para la fracción $z/(z-2)$ se razona igual que con la otra obteniendo

$$\varphi[n] = \frac{1}{3}\big(2^{n+1} - 2^{-n+1}\big)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]\,.$$

4.3. Relación de la TZ con las series de Fourier

Definición 4.6. Por *serie trigonométrica* se entiende toda serie funcional del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(k\,x) + b_k\,\mathrm{sen}(k\,x)\Big)\,, \tag{4.2}$$

donde a_0 es un número complejo y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sendas sucesiones de números complejos; estos números se denominan *coeficientes* de la serie.

Observaciones 4.7.

I) Las sumas parciales de una serie trigonométrica

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(k\,x) + b_k\,\mathrm{sen}(k\,x)\Big)\,,$$

son *polinomios trigonométricos*, que se pueden reescribir en términos de la exponencial como

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(a_k - i\,b_k)\,e^{i\,k\,x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(a_k + i\,b_k)\,e^{-i\,k\,x}\,,$$

así que es usual representar también la serie (1) por

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,e^{i\,k\,x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\,e^{-i\,k\,x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{i\,k\,x}\,, \tag{4.3}$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,; \qquad c_k = \frac{(a_k - i\,b_k)}{2} \qquad \text{y} \qquad c_{-k} = \frac{(a_k + i\,b_k)}{2}\,, \qquad k \geq 1\,;$$

o dicho de otra forma,

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{para} \quad k \geq 0, \qquad \text{y} \qquad b_k = i\,(c_k - c_{-k}) \quad \text{si} \quad k \geq 1\,.$$

La expresión (4.3) se denomina *forma compleja* de la serie trigonométrica (4.2). Los conceptos de convergencia, convergencia uniforme, etc. se trasladan a las series dadas en forma compleja (4.3) en términos de los ya conocidos para series funcionales generales.

ii) Si la serie trigonométrica (4.2) (resp. (4.3)) converge uniformemente, entonces su suma define una función f continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo 2π; además, es fácil comprobar que

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(k\,x)\,dx \quad k \geq 0\,, \qquad \text{y} \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen}(k\,x)\,dx\,, \quad k \geq 1\,, \tag{4.4}$$

o lo que es lo mismo,

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.5}$$

Lo anterior sugiere la siguiente definición:

Definición 4.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función acotada, periódica de periodo 2π e integrable en el sentido de Riemann en cada intervalo compacto de la recta. Se define la *serie de Fourier de f* como la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos(k\,x) + b_k \operatorname{sen}(k\,x)\Big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,x}\,,$$

cuyos coeficientes vienen dados por las expresiones (4.4) y (4.5), respectivamente. El número c_k recibe el nombre de *k-ésimo coeficiente de Fourier de f* y se denota también por $\widehat{f}(k)$. Si $n \in \mathbb{N}$, el polinomio trigonométrico

$$s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k \cos(k\,x) + b_k \operatorname{sen}(k\,x)\Big) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{i\,k\,x}$$

se denomina *polinomio n-ésimo de Fourier* de la función f.

Observaciones 4.9.

i) Para funciones de periodo 2π, las integrales que aparecen en (4.4) y (4.5) extendidas al intervalo $[-\pi,\pi]$ se pueden considerar en cualquier otro intervalo de amplitud 2π sin alterar su valor, consecuencia esto del teorema del cambio de variable.

ii) Una función f periódica en $\mathbb{R}$, de periodo 2π, viene determinada por sus valores en el intervalo $[-\pi,\pi]$, es más, a cada una de estas funciones se le puede asignar de forma biunívoca una función g definida en la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mediante la fórmula

$$f(x) = g(e^{i\,x})\,, \quad x \in [-\pi,\pi]\,.$$

iii) Supongamos ahora que $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ y que su corona de convergencia contiene a la circunferencia $\mathbb{T}$. Si F es su transformada, entonces

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^n$$

es holomorfa en esa corona, lo que implica que las series numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen absolutamente y, por tanto, la serie trigonométrica

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

es la serie de Fourier de una función continua y 2π-periódica f hacia la que converge uniformemente.

4.4. Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias

De forma coloquial, en Teoría de la Señal se denomina *sistema* a toda transformación que recibe una señal (*entrada, input*) y devuelve otra (*salida, output*). Si las señales de entrada y salida son discretas el sistema se denomina *discreto*, estos serán los que consideraremos en adelante. A continuación se relatan, brevemente, la nomenclatura y nociones más usuales.

Un sistema L se denomina *lineal* si para cada par de señales u, v y escalares α, β se tiene que $L(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha\, L(u) + \beta\, L(v)$.

Un sistema L se denomina *invariante en el tiempo* si verifica que $L(u[n-n_0]) = L(u)[n-n_0]$, es decir, si verifica que a un desfase en la señal de entrada responde con el mismo desfase en la de salida.

Un sistema L se denomina *causal* si para cada par de señales u y v tales que $u[n] = v[n]$ para $n \leq n_0$, se tiene que $L(u)[n] = L(v)[n]$ para $n \leq n_0$.

Teorema: Un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo es causal si, y sólo si, la respuesta a cada señal causal es también causal.

Es usual referirse a los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo como LTI (del inglés "*linear, time invariant*").

Para un sistema LTI la respuesta $\boldsymbol{h} = L(\boldsymbol{\delta})$ al impulso unidad se denomina *respuesta al impulso.*

Un sistema LTI se denomina *estable* si la respuesta a cada señal acotada es también acotada. Resulta que un LTI es estable si, y sólo si, la respuesta al impulso $\boldsymbol{h}[n] = L(\boldsymbol{\delta})[n]$ verifica que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|\boldsymbol{h}[n]\big| < \infty$.

Ejemplo 4.10. La fórmula

$$y[n] = L(u)[n] = u[n] - 2\,u[n-1] + u[n-2]\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

define un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal.

La respuesta al impulso está definida por

$$\boldsymbol{h}[0] = \boldsymbol{\delta}[0] = 1, \quad \boldsymbol{h}[1] = -2\,\boldsymbol{\delta}[0] = -2, \quad \boldsymbol{h}[2] = \boldsymbol{\delta}[0] = 1; \qquad \boldsymbol{h}[n] = 0 \ \text{ si } \ n \neq 0, 1, 2\,,$$

lo que permite reescribir el sistema en términos de una convolución

$$y[n] = \boldsymbol{h}[0]\,u[n] + \boldsymbol{h}[1]\,u[n-1] + \boldsymbol{h}[2]\,u[n-2] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{h}[j]\,u[n-j]\,. \tag{4.6}$$

La fórmula (4.6) no es anecdótica, es válida para todo sistema LTI. Si denotamos por $Y(z)$, $H(z)$ y $U(z)$ a las correspondientes transformadas Z de las señales, la propiedad 4.3.VII establece que

$$Y(z) = H(z)\,U(z)$$

en la correspondiente corona de convergencia.

Definición 4.11. Para un sistema LTI, la TZ de su respuesta al impulso $\boldsymbol{h}$, $H(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \boldsymbol{h}[n]\,z^{-n}$, se denomina *función de transferencia* del sistema.

La función de transferencia caracteriza también ciertas propiedades de un sistema LTI, por ejemplo:

Teorema 4.12. Un sistema LTI es causal si, y sólo si, su función de transferencia H converge en el exterior de un disco centrado en $z_0 = 0$ y existe $\lim\limits_{|z|\to\infty} H(z) \in \mathbb{C}$.

Teorema 4.13. Si un sistema LTI tiene función de transferencia racional $H(z) = {}^{P(z)}\!/_{Q(z)}$, entonces:

I) El grado de P es menor o igual que el de Q.

II) El sistema es estable si, y sólo si, los polos de H están dentro del disco unidad $\{|z| < 1\}$.

Las *ecuaciones en diferencias* juegan, para señales discretas, un papel análogo al de las ecuaciones diferenciales con señales continuas. Al igual que en este último caso las complicaciones de cálculo son enormes salvo para situaciones sencillas. No es difícil de comprender el porqué nos restringimos al estudio de ecuaciones lineales con coeficientes constantes que, por otra parte, caracterizan los sistemas LTI que se manejan habitualmente y que se describen a continuación.

Definición 4.14. Se dice que un sistema L está definido por una ecuación en diferencias si existen naturales N, M y constantes complejas $a_0, a_1, \ldots, a_N$ y $b_1, \ldots, b_M$ tales que para cada señal u, siendo $y[n] = L(u)[n]$, se verifica que

$$y[n] + b_1 y[n-1] + \ldots + b_M y[n-M] = a_0 u[n] + a_1 u[n-1] + \ldots + a_N u[n-N]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.7}$$

Observaciones 4.15.

I) El ejemplo 4.10 es un caso particular sencillo de lo descrito arriba. Dejamos como ejercicio al lector comprobar que, efectivamente, la fórmula (4.7) define un sistema LTI y que, además, estos sistemas son causales.

II) En general, para una señal de entrada fija u la ecuación (4.7) puede admitir múltiples soluciones. Pero si se fijan M valores (*iniciales*) de la señal de salida $y[j+1], y[j+2], \ldots, y[j+M]$, entonces la solución es única y, de forma teórica, puede ser obtenida recurrentemente. Por ejemplo si u es causal, entonces y es causal, entonces $y[-1] = y[-2] = \ldots = y[-M] = 0$ y queda determinado el valor $y[0]$; conocido éste último se determina $y[1]$, y así sucesivamente.

III) La fórmula (4.6) proporciona otra forma de resolución directa del sistema que evita la recurrencia. Para ello es necesario conocer la respuesta al impulso o, lo que es lo mismo, la función de transferencia y su inversa Z. Abordamos a continuación el estudio de esta cuestión.

Si tomamos TZ en (4.7), de las propiedades de linealidad y desfase se deduce que las funciones Y, U, transformadas respectivas de y y u, satisfacen

$$\left(1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}\right) Y(z) = \left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}\right) U(z)$$

y resulta que la función de transferencia del sistema es racional

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}} = z^{M-N}\, \frac{a_N + a_{N-1} z + \ldots + a_o z^N}{b_M + b_{M-1} z + \ldots + z^M}\,. \tag{4.8}$$

Puesto que el sistema es causal, según el teorema 4.12, la corona de convergencia de H es el exterior de un disco centrado en $z_0 = 0$. Esto determina de forma unívoca la transformada inversa Z de H y, por lo tanto, la respuesta al impulso.

Ejemplos 4.16.

I) Consideremos el sistema $y = L(u)$ definido por

$$y[n] - 3\, y[n-1] + 2\, y[n-2] = u[n] + u[n-1]\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

La función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 3\, z^{-1} + 2\, z^{-2}} = \frac{z + z^2}{z^2 - 3\, z + 2} = \frac{z + z^2}{(z-1)(z-2)} = \frac{3\, z}{z-2} - \frac{2\, z}{z-1}\,,$$

cuyos polos se encuentran en $z = 1$ y $z = 2$, por lo que su corona de convergencia es $\{|z| > 2\}$. De lo obtenido en el ejemplo 4.4.IV se deduce que la respuesta al impulso $\boldsymbol{h}$ es

$$\boldsymbol{h}[n] = (3 \cdot 2^n - 2)\, \boldsymbol{\epsilon}[n]\,.$$

El sistema no es estable pues la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{h}[n]\right| = \sum_{n=0}^{\infty} (3 \cdot 2^n - 2)$ no converge (véase también el teorema 4.13). Las soluciones vienen dadas según la fórmula (4.6):

$$y = (\boldsymbol{h} * u); \qquad \text{es decir,} \qquad y[n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{h}[j]\, u[n-j] = \sum_{j=0}^{\infty} (3 \cdot 2^j - 2)\, u[n-j]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Obviamente las sumas anteriores no tienen sentido para toda señal u; ahora bien, si se trabaja con señales causales y sus desfases (con tiempo de encendido finito, i.e. verificando que $u[n] = 0$ para $n < N$, con lo que $u[n-j] = 0$ para $n - N < j$), esas sumas resultan ser finitas

$$y[n] = \sum_{j=0}^{n-N} (3 \cdot 2^j - 2)\, u[n-j]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

II) Si el sistema $y = L(u)$ está definido por

$$y[n] - 3\, y[n-1] + 3\, y[n-2] - y[n-3] = u[n-2]\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

su función de transferencia es

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 3\, z^{-1} + 3\, z^{-2} - z^{-3}} = \frac{z}{z^3 - 3\, z^2 + 3\, z - 1} = \frac{z}{(z-1)^3}\,,$$

con corona de convergencia $\{|z| > 1\}$; según el teorema 4.13 el sistema no es estable.

Ejercicios

4.1 Determinar la corona de convergencia de la TZ de una sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ con un número finito de términos no nulos.

4.2 En los siguientes casos, determinar la corona de convergencia de la TZ de la sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$:

I) $a_n = (2^{-n} + 3^{-n})\,\boldsymbol{\epsilon}[n]$ II) $a_n = (2^n + 3^n)\,\boldsymbol{\epsilon}[-n]$

III) $a_n = \cos({}^{n\pi}\!/_2)\,\boldsymbol{\epsilon}[n] + (2^n + 3^n)\,\boldsymbol{\epsilon}[-n]\,.$

4.3 Calcular la TZ de las sucesiones siguientes, indicando asimismo la corona de convergencia:

I) $a_n = 2\,n\,\boldsymbol{\epsilon}[n-2]$ II) $a_n = 2\,n\,\boldsymbol{\epsilon}[-n-2]$ III) $a_n = (-1)^n\,\boldsymbol{\epsilon}[-n]$

IV) $a_n = \boldsymbol{\epsilon}[4-n]$ V) $a_n = (n^2 + n\,4^n)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]\,.$

4.4 Calcular la TZ de las sucesiones siguientes, indicando asimismo la corona de convergencia:

I) $a_n = \cos({}^{n\pi}\!/_2)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]$ II) $a_n = \operatorname{sen}({}^{n\pi}\!/_2)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]$ III) $a_n = e^{inw}\boldsymbol{\epsilon}[n] + 2^n e^{inw}\boldsymbol{\epsilon}[-n]\,.$

4.5 Se dice que $N \in \mathbb{Z}$ es el *tiempo de encendido* (*switch-on time*) de la señal discreta u si $u[n] = 0$ para $n < N$ y $u[N] \neq 0$. Análogamente, M es el *tiempo de apagado* (*switch-off time*) de la señal u si $u[n] = 0$ para $n > M$ y $u[M] \neq 0$.

Sean u, v dos señales discretas con tiempos de encendido finitos N_1, N_2, respectivamente, y tiempos de apagado finitos M_1, M_2, respectivamente. Calcular los tiempos de encendido y apagado del producto de convolución $u * v$.

4.6 Una señal u se dice *periódica* si existe un número natural $k > 0$ tal que

$$u[n+k] = u[n] \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Una señal causal u se dice *periódica* si existe un número natural $k > 0$ tal que

$$u[n+k] = u[n] \qquad \text{para todo } n \geq 0\,.$$

I) Investigar qué sucesiones periódicas admiten TZ.

II) Determinar la TZ de una señal causal y periódica.

4.7 Sea F una función racional que no tiene polos en la corona $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$. Probar que, si $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es la transformada inversa Z de F en la citada corona, entonces

$$a_n = \sum_{\substack{a \text{ es polo de } z^{n-1}F(z) \\ |a| \leq \rho_1}} \operatorname{Res}\big(z^{n-1}F(z), a\big)\,.$$

4.8 Para una señal causal u su TZ viene dada por

$$F(z) = \frac{1}{4\,z^2 + 1}\,.$$

Probar que u es sumable y calcular u.

4.9 Para las siguientes funciones determinar la transformada inversa Z en las distintas coronas admisibles. Indíquese también el caracter sumable de la señal, o si tiene un tiempo de encendido finito.

I) $F(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^2}$ II) $F(z) = \dfrac{z^4 + z^3 - 2\,z + 1}{z^2 + 2\,z + 2}$ III) $F(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$

IV) $F(z) = \dfrac{z^3}{(z+3)(z + {}^1\!/_2)}\,.$

4.10

I) Calcular la señal causal cuya TZ es $F(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}\,.$

II) Utilizando la convolución, calcular la señal causal cuya TZ es $G(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}\,.$

4.11 Determinar la transformada inversa Z de las siguientes funciones en la corona $\{0 < |z|\}$:

I) $F(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ II) $F(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ III) $F(z) = \frac{\operatorname{Ch}(z) - 1}{z^7}$.

4.12 Para los siguientes LTI se pide calcular la respuesta al impulso y determinar cuáles son causales y cuáles estables:

I) $y[n] = \sum_{j=-\infty}^{n-1} 2^{j-n} u[j]$. II) $y[n] = \frac{u[n+1] + u[n-1]}{2}$. III) $y[n] = \sum_{j=n}^{\infty} 2^{j-n} u[j]$.

4.13 Un LTI causal viene descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] + \frac{1}{2}\, y[n-1] = u[n]\,.$$

I) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

II) Calcular la respuesta a la entrada $u[n] = 2^{-n}\boldsymbol{\epsilon}[n]$.

III) ¿Es estable el sistema?

4.14 Se considera el LTI dado por la ecuación en diferencias

$$y[n] - y[n-2] = u[n-1]\,.$$

I) Calcular la función de transferencia del sistema.

II) Calcular la respuesta a la entrada $u[n] = \cos(n\phi)\boldsymbol{\epsilon}[n]$.

4.15 Un LTI causal viene descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}\, y[n-2] = u[n] + u[n-1]\,.$$

I) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

II) ¿Es estable el sistema?

III) Calcular la respuesta del sistema a la señal escalón $\boldsymbol{\epsilon}$.

IV) Calcular la respuesta a la entrada $u[n] = \boldsymbol{\epsilon}[n] + \boldsymbol{\epsilon}[n-2]$.

4.16 Utilícese la TZ para determinar las soluciones generales de la *ecuación de Fibonacci*:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Indicación: Hágase uso de la fórmula presentada en el ejemplo 4.4.V para expresar las soluciones en términos de las condiciones iniciales x_0 y x_1.

4.17 Resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} + y_{n+1} + 2\, y_n = e^{inw}\,, \qquad n \geq 0\,,$$

siendo $y_0 = 3\,,\, y_1 = 1\,.$

4.18 Sea $P(z) = z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ un polinomio con p raíces distintas: $r_1, r_2, \ldots, r_p$ (i.e., que factoriza de la forma $P(z) = (z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_p)$). Probar que todas las soluciones de la ecuación recurrente

$$y_{n+p} + a_{p-1}\, y_{n+p-1} + \ldots + a_1\, y_{n+1} + a_0\, y_n = 0\,, \qquad n \geq 0\,,$$

son de la forma $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + \ldots + C_p r_p^n$, siendo $C_1, C_2, \ldots, C_p$ constantes complejas.

4.19 Resolver la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} x_{n+1} - y_n & = \quad 1 \\ x_n - y_{n+1} & = \quad -1 \end{cases} \qquad n \geq 0\,,$$

siendo $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

4.20 Resolver la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} x_{n+1} - y_{n+1} - 2\, x_n & = \quad 2^n \\ x_{n+1} + y_{n+1} - 2\, y_n & = \quad 0 \end{cases} \qquad n \geq 0\,,$$

siendo $x_0 = y_0 = 1$.

Bibliografía

[1] T. Apostol: *Análisis Matemático*, Ed. Reverté.

[2] R.J. Beerends, H.G. Morsche y otros: *Fourier and Laplace Transforms*, Ed. Cambridge Univ. Press.

[3] R.V. Churchill: *Variable Compleja y Aplicaciones*, Ed. McGraw-Hill.

[4] J.W. Harris, H. Stocker: *Handbook of Mathematics and Computational Science*, Ed Springer.

[5] Hwei P. Hsu: *Análisis de Fourier*, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.

[6] J. E. Marsden: *Basic Complex Analysis*, Ed. Freeman.

[7] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky: *Señales y sistemas*, Ed. Prentice-Hall.

[8] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, J.R. Buck: *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Ed. Prentice-Hall.

[9] F. Pestana Galván y otros: *Variable Compleja. Un curso práctico*, Ed. Síntesis.

[10] J.G. Proakis, D.G. Manolakis: *Tratamiento digital de señales*, Ed. Prentice-Hall.

[11] J. San Martín, V. Tomeo, I. Uña: *Métodos Matemáticos*, Ed. Thomson.

[12] M.R. Spiegel y otros: *Fórmulas y tablas de Matemática Aplicada* (Serie Schaum), Ed. McGraw-Hill.

En la red:

[13] *WolframMathWorld*, (por Eric Weisstein con recusros de Wolfram Research),
URL: `http://mathworld.wolfram.com/`

[14] *The MacTutor History of Mathematics*, (por J. O'Connor y E. Robertson de la Univ. de St Andrews),
URL: `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/`