MATEMÁTICAS I

(Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

(Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)

APUNTES DE TEORÍA

Y

EJERCICIOS

Departamento de Análisis Matemático
y Didáctica de la Matemática

Universidad de Valladolid

MATEMÁTICAS I

(Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

(Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)

Curso: Primero - Asignatura anual
Carácter: Troncal.
Créditos: 9 = 6 Teóricos + 3 Prácticos
Sistema de evaluación: Se realizarán un examen parcial (en enero o febrero) y un examen final de la asignatura (en junio), en los que se propondrán varios problemas y cuestiones prácticas. Los alumnos que aprueben el parcial pueden examinarse en el final únicamente de la segunda parte de la asignatura (o de toda la asignatura, si lo desean). El examen de septiembre será en todos los casos de toda la asignatura.
Profesores responsables: Fernando Gómez Cubillo, Alberto Lastra Sedano, Santiago Pérez-Cacho García, Javier Sanz Gil.

Programa de la asignatura:

I Cálculo diferencial en una variable real

- *Prerrequisitos*: Nociones elementales relativas a los conjuntos, las relaciones y las aplicaciones. Números naturales, enteros, racionales y reales.
- *Límites y continuidad*: Propiedades generales. Teoremas de Bolzano y Weierstrass.
- *Cálculo diferencial*: Concepto de derivada de una función en un punto. Propiedades. Interpretación geométrica. Función derivada. Regla de la cadena. Derivación de la función inversa. Teoremas de valor medio. Teorema de Taylor. Aplicaciones.

II Cálculo integral en una variable real

- *Cálculo de primitivas*: Métodos elementales de integración.
- *La integral de Riemann*: Funciones integrables, propiedades generales. Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Regla de Barrow. Cambio de variable. Aplicaciones.
- *Integrales impropias*: Convergencia. Integrales impropias de funciones positivas. Criterios de convergencia. Convergencia absoluta.

III Cálculo diferencial en varias variables

- *Límites y continuidad*: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Límites y continuidad. Propiedades generales.
- *Derivabilidad y diferenciabilidad*: Derivadas direccionales, derivadas parciales, diferenciabilidad. Regla de la cadena. Derivadas de orden superior. Fórmula de Taylor. Extremos relativos.
- *Curvas y superficies en* $\mathbb{R}^3$: Curva paramétrica, curva geométrica, vector tangente, orientación. Superficies paramétricas, plano tangente, vector normal, orientación.

IV Integración múltiple

- *La integral de Riemann en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$: Funciones integrables en rectángulos, propiedades elementales. Teorema de Fubini. Extensión del concepto de integral y del teorema de Fubini para funciones definidas en conjuntos más generales.
- *Cambios de Variable*: Teorema del cambio de variable. Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$. Coordenadas cilíndricas y esféricas en $\mathbb{R}^3$.

V Cálculo vectorial

- *Campos escalares y vectoriales*: Campos escalares. Gradiente, variedades equipotenciales. Campos vectoriales. Rotacional, divergencia. Campos conservativos, campos solenoidales.
- *Integrales curvilíneas*: Integral de funciones escalares sobre una curva. Circulación de un campo a lo largo de una curva. Fórmula de Green.
- *Integración en superficies*: Integración de funciones escalares sobre una superficie; área de una superficie paramétrica. Flujo de un campo a través de una superficie. Superficies con borde. Teorema de Stokes. Abiertos con frontera diferenciable a trozos. Teorema de Gauss.

VI Introducción a la teoría de funciones de variable compleja

- *Números complejos*: Generalidades. Interpretación geométrica. Conjugación y módulo. Exponencial compleja, expresión polar. Argumento. Potencias y raíces de números complejos. Sucesiones y series de números complejos.
- *Derivación compleja*: Límites y continuidad. Funciones holomorfas; ecuaciones de Cauchy-Riemann. Regla de la cadena.
- *Series de potencias*: Lema de Abel; radio de convergencia. Propiedades de las funciones definidas mediante series de potencias. Funciones analíticas.
- *Integración compleja*: Definición y propiedades. Fórmula integral de Cauchy. Serie de Taylor.
- *Singularidades aisladas*: Series de Laurent. Caracterización de singularidades.
- *Teorema de los residuos y aplicaciones.*

Bibliografía recomendada:

- Apostol: *CALCULUS Vols.1 y 2*, Ed. Reverté.
- de Burgos: *Cálculo Infinitesimal de una variable*, Ed. McGraw-Hill.
- de Burgos: *Cálculo Infinitesimal de varias variables*, Ed. McGraw-Hill.
- Marsden: *Cálculo Vectorial*, Ed. Addison-Wesley.
- Pita Ruiz: *Cálculo Vectorial*, Ed. Prentice-Hall Iberoamericana.
- Spiegel: *Análisis Vectorial*, Ed. McGraw-Hill (Serie Schaum).
- Spiegel: *Cálculo Superior*, Ed. McGraw-Hill (Serie Schaum).

Libros de Problemas:

- Coquillat: *Cálculo Integral*, Ed. Tebar Flores.
- Fdez. Viña: *Ejercicios y Complementos de Análisis Mat. I*, Ed. Tecnos.
- Fdez. Viña: *Ejercicios y Complementos de Análisis Mat. II*, Ed. Tecnos.
- Fdez. Viña: *Ejercicios y Complementos de Análisis Mat. III*, Ed. Tecnos.
- Galindo, Sanz, Tristán: *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una Variable Real*, Ed. Thomson.
- Galindo, Sanz, Tristán: *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en varias Variables*, Ed. Thomson.
- Pao: *Cálculo Vectorial (Marsden). Problemas Resueltos*, Ed. Addison-Wesley.
- Pestana Galván y otros: *Variable Compleja. Un curso práctico*, Ed. Síntesis.
- Tebar Flores: *Cálculo Infinitesimal Vol. 1 y 2*, Ed. Tebar Flores.

TEMA 1 GENERALIDADES. NÚMEROS REALES

§ 1 GENERALIDADES.

Este primer epígrafe está destinado a presentar los conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos, estableciendo la notación y terminología que serán utilizadas posteriormente.

Partiremos del concepto de *conjunto* en su acepción intuitiva de *colección de objetos*, sus *elementos*. Admitiremos la existencia de conjuntos y, en particular, la existencia de un conjunto denominado *conjunto vacío* y denotado por $\emptyset$, caracterizado por carecer de elementos.

Supondremos asimismo al lector familiarizado con la terminología y los conceptos básicos tales como *pertenencia*, *inclusión*, *unión*, *intersección*, *producto cartesiano*, etc., y sus propiedades elementales.

Definición 1.1.- Sea A un conjunto no vacío. Una *relación* en A es un subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times A$. Si $a, b \in A$ se dice que *a está relacionado con b* (por la relación $\mathcal{R}$) si el par (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$ y se escribe $a\mathcal{R}b$.

Definición 1.2.- Una relación en un conjunto A se dice de *orden* si verifica las propiedades:
i) Propiedad Reflexiva: $a\mathcal{R}a$ para cada $a \in A$.
ii') Propiedad Antisimétrica: Si $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ entonces $a = b$.
iii) Propiedad Transitiva: Si $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces $a\mathcal{R}c$.

La relación de orden se dice *total* si dados cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que o bien $a\mathcal{R}b$ o $b\mathcal{R}a$.

Definición 1.3.- Se llama *conjunto ordenado* a todo conjunto no vacío dotado de una relación de orden.
Si la relación de orden es total se dice que el conjunto está *totalmente ordenado.*

Notación: Para una relación de orden es habitual escribir $a \leq b$ o $b \geq a$ en lugar de $a\mathcal{R}b$. Si $a, b \in A$ y se tiene $a \leq b$ y $a \neq b$ se escribe $a < b$ ó $b > a$.

Definición 1.4.- Sea A un conjunto ordenado y $B \subset A$, $B \neq \emptyset$. Se dice que $\beta \in A$ es *cota superior* (resp. *cota inferior*) de B si $b \leq \beta$ (resp. $\beta \leq b$) para cada $b \in B$.

Si $B \subset A$ tiene una cota superior (resp. inferior) se dice que B está *acotado superiormente* (resp. *acotado inferiormente*). Si el conjunto B está acotado superior e inferiormente se dice *acotado.*

Definición 1.5.- Supongamos que la relación de orden en A es total. Se dice que un subconjunto B acotado superiormente (resp. inferiormente) tiene *extremo superior* o *supremo* (resp. *extremo inferior* o *ínfimo*) si existe una cota superior (resp. inferior) β, el extremo superior (resp. inferior), que verifica la siguiente propiedad:
"Si γ es otra cota superior (resp. inferior) se tiene:

$$\beta \le \gamma \qquad (\text{resp. } \gamma \le \beta)\text{''}.$$

Proposición 1.6.- Los extremos superior e inferior de un subconjunto B de un conjunto totalmente ordenado, si existen, son únicos.

Notación: Los extremos superior e inferior de un conjunto no vacío B se denotan respectivamente por:

$$\text{sup}B \quad \text{o} \quad \overline{\text{ext}}B \qquad \text{y} \qquad \text{inf}B \quad \text{o} \quad \underline{\text{ext}}B.$$

Si el extremo superior (resp. inferior) de un conjunto B pertenece al mismo, se denomina *máximo* (resp. *mínimo*) de B y se denota por '$\max B$' (resp. '$\min B$').

1.7.- Aplicaciones entre Conjuntos.

Definición 1.8.- Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una *correspondencia* de A en B es un subconjunto $\mathcal{C}$ del producto cartesiano $A \times B$. Si el par (a, b), $a \in A$, $b \in B$ pertenece a $\mathcal{C}$ se dice que b *está en correspondencia* con a o que b *es imagen* de a por $\mathcal{C}$.
Una correspondencia de A en B se dice que es *aplicación* si además verifica la siguiente propiedad:

"Para cada $a \in A$ existe un, y sólo un, $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{C}$".

Habitualmente una aplicación de A en B se representa por $f\colon A \to B$ y se denota por $b = f(a)$ al único $b \in B$ que es imagen de a.

Definición 1.9.- Una aplicación $f\colon A \to B$ se dice *inyectiva* si verifica la siguiente propiedad:

"Si $a, a' \in A$ y $f(a) = f(a')$ entonces $a = a'$ ".

Una aplicación $f\colon A \to B$ se dice *suprayectiva* si verifica la siguiente propiedad:
"Si $b \in B$ existe al menos un $a \in A$ tal que $b = f(a)$".

Una aplicación $f\colon A \to B$ se dice *biyectiva* si es simultáneamente inyectiva y suprayectiva.

Observación 1.10.- Si $f\colon A \to B$ es una biyección entre A y B y $\mathcal{C}$ es la correspondencia que la define, entonces la correspondencia $\mathcal{C}^{-1}$ de B en A definida por:

$$(b, a) \in \mathcal{C}^{-1} \text{ si, y sólo si, } (a, b) \in \mathcal{C}$$

es también una aplicación que se denomina *aplicación inversa* de f y se denota por $f^{-1}\colon B \to A$.

Definición 1.11.- Sean A y B conjuntos no vacíos y $f\colon A \to B$ una aplicación.

Si $S \subset A$ el conjunto $\{f(a) \in B : a \in S\} = \{b \in B :$ existe $a \in S$ con $b = f(a)\}$ se denota por $f(S)$ y se denomina *imagen directa* por f del conjunto S.

Si $T \subset B$ el conjunto $\{a \in A : f(a) \in T\}$ se denota por $f^{-1}(T)$ y se denomina *imagen recíproca* por f del conjunto T.

Definición 1.12.- Sean A, B, C conjuntos no vacíos y $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ aplicaciones. Se define la aplicación $g \circ f\colon A \to C$ como sigue: "Si $a \in A$ y $b = f(a)$, $c = g(b)$ entonces $g \circ f(a) := c$". Esta aplicación se denomina *aplicación compuesta de f con g*.

1.13.- Índices.-

Sucede en ocasiones que todos los elementos de un conjunto X se asocian de forma biunívoca con los de otro conjunto I, y para determinar un elemento $x \in X$ se hace referencia al único elemento $i \in I$ asociado con él; en este caso dicho elemento se escribe 'x_i', los elementos de I se denominan *índices* (el conjunto I se denomina, por tanto, *conjunto de índices*), se dice que X está *indizado* por I y se denota

$$X = \{x_i : i \in I\} \qquad \text{o} \qquad X = \{x_i\}_{i \in I}\,.$$

Otra notación similar a la anterior para elementos indizados es 'x^i'; para diferenciar ambos casos es habitual referirse a *subíndices* y *superíndices*, respectivamente.

La noción de índice no debe resultar extraña, pues la vida cotidiana está repleta de ellos, piénsese en la matrícula de un vehículo o en los números del documento de identidad, etc.

§ 2 NÚMEROS NATURALES. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN.

A partir de este apartado se presentarán los distintos conjuntos numéricos que se utilizarán en lo que sigue.

Se llama *Conjunto de los Números Naturales*, y se denota por $\mathbb{N}$, al conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, dotado de la relación de orden total habitual $(1 < 2 < 3 < \ldots)$, y de las operaciones suma y producto conocidas. Sus elementos se denominan *números naturales*.

Con respecto al orden, se tiene que:

(i) 1 es el *primer elemento* de $\mathbb{N}$, en el sentido de que es menor que cualquier otro natural.

(ii) Cada natural n tiene un sucesor, el natural $n+1$ (2 es el sucesor de 1, 3 el de 2, etc.), caracterizado por ser mayor que n, y menor o igual que cualquier natural mayor que n.

(iii) Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica:

a) $1 \in S$, y b) $n + 1 \in S$ para cada $n \in S$,

entonces $S = \mathbb{N}$.

Esta última propiedad proporciona una herramienta muy útil de razonamiento, el llamado

Principio de Inducción 2.1.-

Sea $\mathcal{P}$ una proposición enunciada para los números naturales. Denotemos por $\mathcal{P}(n)$ a la proposición relativa a $n \in \mathbb{N}$. Se supone que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

i) $\mathcal{P}(n_0)$ es cierta.

ii) Si $m \geq n_0$ y $\mathcal{P}(m)$ es cierta entonces $\mathcal{P}(m+1)$ es cierta.

Entonces $\mathcal{P}(n)$ es cierta para cada $n \geq n_0$.

En particular si $n_0 = 1$ resulta que $\mathcal{P}(n)$ es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.2.- Se ha tenido en cuenta en el enunciado anterior que, en lo tocante al orden, el conjunto $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$, con $n_0 \in \mathbb{N}$, goza de las mismas propiedades que $\mathbb{N}$.

§ 3 NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES.

Las operaciones definidas en $\mathbb{N}$ no gozan de todas las propiedades que cabría esperar. En primer lugar, la suma carece de *elemento neutro*, es decir, de un elemento que sumado a cualquier otro lo deje invariable; para subsanar esta deficiencia se amplía el conjunto $\mathbb{N}$ a un conjunto más grande ($\mathbb{Z}$), con operaciones que restringidas a aquél coinciden con las ya definidas.

Se denota por $\mathbb{Z}$, y se denomina *Conjunto de los Números Enteros*, al conjunto

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\};$$

sus elementos se denominan *números enteros.*

En $\mathbb{Z}$ se definen las operaciones conocidas, suma "+" y producto "$\cdot$". El 0 es el *elemento neutro* de la suma, y si $p \in \mathbb{Z}$, $-p$ es el *elemento simétrico* u *opuesto* de p, es decir, aquél cuya suma con p es el elemento neutro. Por otra parte, 1 es el elemento neutro del producto (llamado *elemento unidad*), esto es, $1 \cdot p = p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. En el conjunto de los números enteros se considera la relación de orden "$\leq$" habitual.

Los números enteros carecen (excepto 1 y -1) de *elemento inverso* para el producto: si $p \in \mathbb{Z}$ es distinto de 1 y -1, no existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $p \cdot q$ sea igual a 1 (el elemento unidad). Vamos a ampliar este conjunto, manteniendo las operaciones y la relación de orden.

El conjunto de los *Números Racionales* es el conjunto

$$\mathbb{Q} = \{p/n : p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\},$$

cuyos elementos son los *números racionales.*

En $\mathbb{Q}$ se tienen definidas las operaciones suma "+" y producto "$\cdot$", y la relación de orden $\leq$, todas ellas conocidas.

§ 4 LA RECTA REAL.

Aunque las operaciones dadas en $\mathbb{Q}$ gozan de buenas propiedades, el conjunto resulta ser "incompleto" en el sentido que ilustramos a continuación con un ejemplo clásico:

Proposición 4.1.-

i) No existe ningún número racional r tal que $r^2 = 2$.

ii) El conjunto $\{s \in \mathbb{Q} : s^2 \leq 2\}$ es un conjunto acotado superiormente que no tiene extremo superior en $\mathbb{Q}$.

El concepto de número real surge de la necesidad de salvar esta incompletitud.

Definición 4.2.- Se llama *Recta Real*, o *Conjunto de los Números Reales*, a todo conjunto no vacío, $\mathbb{R}$, provisto de dos operaciones, "$+$" y "$\cdot$" denominadas suma y producto respectivamente, y una relación de orden "$\leq$"que cumplen los siguientes axiomas:

$(\mathbb{R}, +)$ es un grupo conmutativo, es decir:
S1: Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifica $(x + y) + z = x + (y + z)$. (Propiedad asociativa)
S2: Para cada $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica $x + y = y + x$. (Propiedad conmutativa)
S3: Existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado por 0 tal que $x + 0 = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$. (Existencia de elemento neutro)
S4: Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + -x = 0$. (Existencia de elemento simétrico)

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo, es decir:
P1: Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifica $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
P2: Para cada $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica $x \cdot y = y \cdot x$.
P3: Existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado por 1 tal que $x \cdot 1 = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$. (Existencia de elemento unidad)
P4: Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existe un elemento $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$. (Existencia de elemento inverso)

El producto es distributivo respecto de la suma:
D: Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifica $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

La relación de orden es total (**O1**) y compatible con la estructura algebraica (**O2-O3**):
O1: Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.
O2: Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$.
O3: Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ y $0 \leq z$ entonces $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Axioma de Completitud
C: Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y acotado superiormente tiene extremo superior.

Las nueve primeras propiedades (**S1-S4**, **P1-P4** y **D**) se resumen diciendo que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

Observación 4.3.- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ también tiene estructura de cuerpo conmutativo, y la relación de orden en él definida es total y compatible con la estructura algebraica. Sin embargo, y como ya se ha mencionado, en este caso no se verifica el axioma de completi tud **C**.

Definición 4.4.- Los elementos de $\mathbb{R}$ se denominan *números reales*. Un número real x se dice *positivo* si $x > 0$ y se dice *negativo* si $x < 0$.

Propiedades 4.5.-

En lo que sigue w, x, y, z serán números reales. Las siguientes propiedades se deducen de los trece axiomas.

4.5.1.- Si $x + z = y + z$ entonces $x = y$ (*Ley de cancelación de la suma*).

4.5.2.- Si $x \cdot z = y \cdot z$ y $z \neq 0$ entonces $x = y$ (*Ley de cancelación del producto*).

4.5.3.- $x \cdot 0 = 0$.

4.5.4.- $-(-x) = x$.

4.5.5.- Si $x \neq 0$ entonces $(x^{-1})^{-1} = x$.

4.5.6.- $(-1) \cdot x = -x$.

4.5.7.- $x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.

4.5.8.- $(-x) + (-y) = -(x + y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

4.5.9.- $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

4.5.10.- Si $z \neq 0$ y $w \neq 0$ entonces $\dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{w} = \dfrac{x \cdot w + y \cdot z}{z \cdot w}$.

4.5.11.- Si $x \leq y$ e $y < z$ entonces $x < z$.

4.5.12.- Si $x < y$ e $y \leq z$ entonces $x < z$.

4.5.13.- Si $x + z < y + z$ entonces $x < y$.

4.5.14.- Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$.

4.5.15.- Si $x \leq y$ y $z \leq w$ entonces $x + z \leq y + w$.

4.5.16.- Si $x \leq y$ y $z < w$ entonces $x + z < y + w$.

4.5.17.- $x > 0$ si, y sólo si, $-x < 0$.

4.5.18.- Si $x < y$ entonces $-x > -y$.

4.5.19.- Si $x < y$ y $z > 0$ entonces $x \cdot z < y \cdot z$.

4.5.20.- Si $x < y$ y $z < 0$ entonces $x \cdot z > y \cdot z$.

4.5.21.- Si $x \neq 0$ entonces $x^2 = x \cdot x > 0$.

4.5.22.- $1 > 0$ y $-1 < 0$.

4.5.23.- Si $x > 0$ entonces ${}^1/_x > 0$.

4.5.24.- Si $0 < x < y$ entonces $0 < {}^1/_y < {}^1/_x$.

4.5.25.- Axioma de Completitud:
C': Todo subconjunto de la recta real no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior.

Observación 4.6.- Podemos considerar $\mathbb{Q}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$, de modo que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Propiedad Arquimediana 4.7.-
Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, existe entonces un número natural n tal que $n\,x > y$.
En particular (tómese $y = 1$), para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n tal que

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Parte Entera de un número real 4.8.-
Si $x \in \mathbb{R}$ existe un único $m \in \mathbb{Z}$, que verifica

$$m \leq x < m + 1.$$

Dicho número entero se denomina *parte entera* de x y se denota $[x]$.

Propiedad de Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ 4.9.-
Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Existe entonces un número racional r tal que

$$x < r < y.$$

Por tanto, entre dos números reales distintos existen infinitos números racionales.

4.10.- Números Irracionales:

Existen números reales que no son racionales, es decir, $\mathbb{R}$ es realmente una extensión no trivial de $\mathbb{Q}$; por ejemplo:

Proposición 4.10.1.- El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$ está acotado superiormente y su extremo superior no es un número racional.

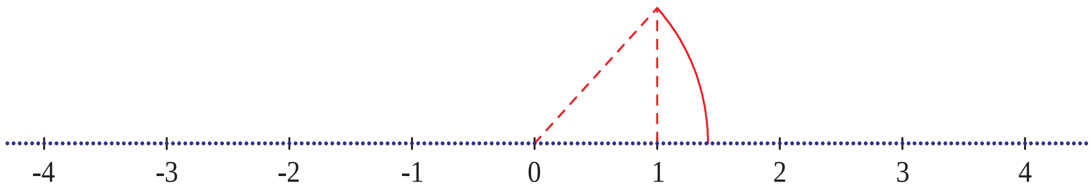
Definición 4.10.2.- El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (que es no vacío en virtud del resultado precedente) se denomina *Conjunto de los Números Irracionales* y se denota por $\mathbb{I}$.

Densidad de los números irracionales 4.10.3.-
Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Existe entonces un número irracional γ tal que

$$x < \gamma < y.$$

Por tanto, entre dos números reales distintos existen infinitos números irracionales.

Si, como es habitual, se representan gráficamente los números enteros dispuestos en una línea, manteniendo su orden de forma creciente de izquierda a derecha, y de manera que dos cualesquiera que sean consecutivos mantengan una distancia fija, los números racionales (no enteros) ocupan en dicha línea lugares intermedios, pero no la llenan; los "poros" que quedan (fruto de la incompletitud de $\mathbb{Q}$) corresponden precisamente a los lugares que ocupan los números irracionales. Esta idea es la que justifica el nombre de recta real y que sus elementos se denominen también *puntos*.



La figura pretende ilustrar el comentario anterior. Además se ha representado el número irracional $\sqrt{2}$ que, según el famoso teorema de Pitágoras, es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos dos catetos tienen longitud 1; el traslado de esta hipotenusa a la 'recta real' se representa con el arco de circunferencia. El número $\sqrt{2}$ es constructible con regla y compás, y lo mismo sucede con los números racionales en virtud del no menos conocido teorema de Tales sobre semejanza de triángulos.

Observación 4.10.4.- El resultado anterior, junto con la propiedad de densidad de los racionales en $\mathbb{R}$, muestra que en cualquier intervalo de la recta real existen infinitos números racionales, e infinitos números irracionales.

Definición 4.11.- (Valor Absoluto de un número real)

Si $x \in \mathbb{R}$ se define el *valor absoluto* de x y se denota por $|x|$ al número real

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propiedades 4.12.- Sean $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Se verifican

i) $|x| \geq 0$. Además $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

ii) $-|x| \leq x \leq |x|$.

iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

iv) Si $x \neq 0$ entonces $\left|{}^{1}\!/_{x}\right| = {}^{1}\!/_{|x|}$.

v) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Desigualdad Triangular*).

vi) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

vii) $|x| < \varepsilon$ si, y sólo si, $-\varepsilon < x < \varepsilon$.

viii) $|x - y| < \varepsilon$ si, y sólo si, $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$.

Mediante el valor absoluto es posible dar una nueva caracterización de los conjuntos acotados, que admite generalización a los espacios euclídeos.

Proposición 4.13.- Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. A es acotado si, y sólo si, existe $M \geq 0$ tal que $|x| \leq M$ para cada $x \in A$.

Observación 4.14.- La propiedad de completitud es la clave para la construcción de las funciones elementales, cuya existencia se admite habitualmente de forma puramente intuitiva.

Definición 4.15.- (Intervalos de la recta)

Se dice que un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un *intervalo* si verifica la siguiente propiedad:

"Si $x,\ y \in I$, con $x < y$, entonces para cada $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$ se tiene que $z \in I$".

En otras palabras, un intervalo I se caracteriza por contener a todos los puntos intermedios entre dos cualesquiera de sus elementos.

Observaciones 4.16.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se llama *intervalo de extremos a y b* a cualquiera de los conjuntos siguientes:

$(a, b) = \{c \in \mathbb{R} : a < c < b\}$ (*Intervalo abierto*).

$[a, b) = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c < b\}$ (*Intervalo semiabierto por la derecha*).

$(a, b] = \{c \in \mathbb{R} : a < c \leq b\}$ (*Intervalo semiabierto por la izquierda*).

$[a, b] = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b\}$ (*Intervalo cerrado*).

Cada intervalo de extremos a,b es un conjunto acotado, y a y b son los extremos inferior y superior, respectivamente, de dicho conjunto.

Obsérvese que los conjuntos unipuntuales $\{x\}$ son intervalos *reducidos a un punto*. También son intervalos los conjuntos no acotados de la forma

$$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$

para algún $a \in \mathbb{R}$, que se denotan, respectivamente,

$$(a, \infty), \qquad [a, \infty), \qquad (-\infty, a), \qquad (-\infty, a],$$

así como la recta real, representada por $(-\infty, \infty)$; todos ellos se denominan de forma genérica *intervalos no acotados*. El símbolo '∞' se lee *infinito*. Nos volveremos a encontrar con este símbolo en numerosas ocasiones que aclararán más su significado.

Notación 4.17.- Es común el uso de la siguiente notación abreviada:

- Supongamos que en un conjunto A se tiene definida una operación suma $+$ con la propiedad conmutativa, es decir, tal que para todos $a, b \in A$ se tiene que $a+b = b+a$. Sea $\{a_i : i \in I\}$ un conjunto o familia finita de elementos de A, su suma se representa por '$\sum_{i\in I} a_i$', y se lee 'suma o *sumatorio* de a_i cuando $i \in I$'. Es habitual que el conjunto de índices sea $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, en cuyo caso la suma de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se escribe también
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{o} \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$
También puede suceder que los elementos a sumar sean los que verifiquen una cierta propiedad $\mathcal{P}$, en cuyo caso su suma se representa por '$\sum_{a \text{ verifica } \mathcal{P}} a$'.

- Si en un conjunto A se dispone de un producto conmutativo '$\times$', y $\{a_i : i \in I\}$ es una familia finita de elementos de A, su producto se representa por '$\prod_{i\in I} a_i$'. Si el conjunto de índices es J_n el producto de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se escribe también
$$\prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{o} \qquad a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n \qquad \text{o} \qquad a_1\, a_2 \cdots a_n\,.$$
Como en el caso de sumas, la expresión '$\prod_{a \text{ verifica } \mathcal{P}} a$' denota el producto de los elementos que verifican la propiedad $\mathcal{P}$.

Factoriales. Números combinatorios 4.18.-

Para un número entero no negativo n se define su *factorial*, denotado por '$n!$' mediante la fórmula recurrente
$$0! = 1\,; \qquad n! = n\,(n-1)!\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$
o lo que es lo mismo,
$$0! = 1\,; \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Si k y n son números enteros, con $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, se define el número combinatorio denominado n *sobre* k y denotado '$\binom{n}{k}$' o 'C_n^k' como
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\; k!}\,.$$

En realidad los números combinatorios son números naturales y verifican
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\; 0 \leq k \leq n\,, \qquad \text{y} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},\; 1 \leq k \leq n\,,$$

propiedades que se suelen representar en el llamado *triángulo de Pascal* o *de Tartaglia*

$n=0$	$\longrightarrow$							**1**						
$n=1$	$\longrightarrow$						**1**		**1**					
$n=2$	$\longrightarrow$					**1**		**2**		**1**				
$n=3$	$\longrightarrow$				**1**		**3**		**3**		**1**			
$n=4$	$\longrightarrow$			**1**		**4**		**6**		**4**		**1**		
$n=5$	$\longrightarrow$		**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**	
$n=6$	$\longrightarrow$	**1**		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**
$\dots$								$\dots$						

en el que cada fila recoge los valores $\binom{n}{k}$ al variar k desde 0 a n. Cada número, exceptuando los que ocupan las posiciones extremas de cada fila, es la suma de los dos que figuran encima de él.

§ 5 EJERCICIOS.

1.- Probar por inducción las siguientes igualdades. En todos los casos n denota un número natural.

1.1.- $1+r+r^2+\ldots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $r\neq 1$.

1.2.- $1+2+\ldots+n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

1.3.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$.

1.4.- $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

1.5.- $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

1.6.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,2^k=2+(n-1)2^{n+1}$.

1.7.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

1.8.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,k!=(n+1)!-1$.

1.9.- $\displaystyle(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\,y^k,\quad x,y\in\mathbb{R}.$ (*Fórmula del binomio de Newton*)

2.- Sea $x\in\mathbb{R}$. Probar por inducción las siguientes igualdades.

2.1.- $2^{n+1}\operatorname{sen}(x)\,\cos(x)\,\cos(2x)\,\cos(4x)\cdots\cos(2^n x)=\operatorname{sen}(2^{n+1}x)$.

2.2.- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\big(\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(2x)+\cdots+\operatorname{sen}(nx)\big)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)$.

2.3.- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\big(1+\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos(nx)\big)=\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)$.

3.- Probar por inducción las desigualdades siguientes.

3.1.- $(1+p)^n > 1 + n\,p,$ si $p > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3.2.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. **3.3.-** $2^n > n^2$ si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

4.- Probar que si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ entonces $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ (es decir, la raíz cuadrada de un natural que no es cuadrado perfecto es un número irracional).

5.- Sea a un número racional no nulo y x un número irracional. Probar que $a + x$ y $a \cdot x$ son irracionales.

Dar un ejemplo de dos números irracionales tales que su suma y su producto sean racionales.

6.- Sean x e y números racionales positivos tales que el número $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ es racional. Probar que también son racionales los números $\sqrt{x}$ y $\sqrt{y}$.

7.- Averiguar si son racionales los siguientes números:

7.1.- $\tan(5^\circ)$. **7.2.-** $\cos(10^\circ)$. **7.3.-** $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

8.- Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ están acotados superior o inferiormente, y en caso afirmativo calcular los correspondientes extremos.

8.1.- $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| + |2-x| < 3 + x\}$.

8.2.- $B = \Big\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4\,x^2 + 12\,x + 11}\Big\}$.

8.3.- $C = \Big\{n + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\Big\}$. **8.4.-** $D = \mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{5})$.

8.5.- $E = \{(-1)^n(1 - \dfrac{1}{n}) \colon n \in \mathbb{N}\}$.

8.6.- $F = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1)(x-2)(x-3) < 0\}$.

9.- Escribir los siguientes conjuntos como unión de intervalos:

9.1.- $\big\{x \in \mathbb{R} : 1 > 3\sqrt{|x| - x}\big\}$. **9.2.-** $\big\{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-2| \leq 12\big\}$.

9.3.- $\big\{x \in \mathbb{R} : |x(x-1)| < 1/2\big\}$. **9.4.-** $\big\{x \in \mathbb{R} : |x+1| < |x|\big\}$.

10.- Probar que si a y b son números reales entonces

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{y} \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

11.- Calcular las siguientes sumas:

11.1.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$. **11.2.-** $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$.

11.3.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. **11.4.-** $\displaystyle\sum_{k=1}^{22} \Big(x^k + \frac{1}{x^k}\Big)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

12.- Resolver las siguientes ecuaciones:

12.1.- $\big||x+1|-3\big| = 0$. **12.2.-** $\sqrt{1-x^2} = 1-|x|$.

12.3.- $\big|x^2-4|x|-12\big| = 0$. **12.4.-** $|x-1|\,|x-2| = 3$.

12.5.- $|x| = x^2+x-2$. **12.6.-** $\dfrac{1-2x}{3-|x-1|} = 1$.

§ 6 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

4.- Razonar por reducción al absurdo.

5.- Para la primera parte, razonar por reducción al absurdo. Ejemplo: $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

6.- A partir de la igualdad $x-y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, deducir que $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ es racional y concluir.

7.1.- Relacionar $\operatorname{tg}(5°)$ con $\operatorname{tg}(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ mediante fórmulas trigonométricas, y observar que si el primero fuera racional, lo sería el segundo, lo que es absurdo.

7.2.- Similar, ahora con $\cos(10°)$ y $\cos(30°)$.

7.3.- Si $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = x \in \mathbb{Q}$, tras eliminar raíces se llega a una contradicción (utilizar el problema 5).

8.1.- $\inf A = 0$, $\sup A = 6$. **8.2.-** $\inf B = 2$, $\sup B = 3$.
8.3.- $\inf C = 1$; C no está acotado superiormente. **8.4.-** $\inf D = 0$, $\sup D = \sqrt{5}$.
8.5.- $\inf E = -1$, $\sup E = 1$. **8.6.-** $\inf F = 0$, $\sup F = 3$.

9.1.- $(-\frac{1}{18}, \infty)$. **9.2.-** $[-6, 6]$. **9.3.-** $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$. **9.4.-** $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

10.- Es sencillo si se distinguen los casos $a \geq b$ y $a < b$.

11.1.- 9. **11.2.-** 100/101. **11.3.-** 665/2664.

11.4.- Si $x \neq 1$, la suma es $43 + \dfrac{x^{46} - x^{-44}}{x^2 - 1}$; si $x = 1$, es 88.

12.1.- $2, -4$. **12.2.-** $0, 1, -1$. **12.3.-** $6, -6$.

12.4.- $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}, \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$. **12.5.-** $\sqrt{2}, -1 - \sqrt{3}$. **12.6.-** $-1/3$.

TEMA 2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

El desarrollo de la Ciencia (y por tanto de la Matemática) en los siglos XVII y XVIII estaba regido por el principio filosófico de que la naturaleza es "regular", es decir, objetos próximos tienen propiedades parecidas. Sin embargo, esta noción de continuidad no fue establecida de modo riguroso hasta bastante más tarde.

Los conceptos y propiedades que tratamos desde este momento, y en particular las nociones de entorno y de límite, van dirigidos a precisar cómo se debe entender la "proximidad" a que antes hemos hecho referencia, y son la base del *Cálculo Infinitesimal*.

La clave se encuentra en que el valor absoluto dado en la recta real permite definir una "distancia" entre los puntos de $\mathbb{R}$, dicho de otra forma: dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ estarán "próximos" si $|x-y|$ es "pequeño".

§ 1 LÍMITES FINITOS.

Cuando una aplicación definida en un conjunto X toma valores en un conjunto numérico recibe el nombre de *función*. En esta situación, las propiedades aritméticas y de orden del conjunto de llegada permiten considerar una estructura mucho más rica en el espacio de las funciones definidas en X.

Definición 1.1.- Sea x un punto de la recta real. Si ε es un número real estrictamente positivo, el *entorno (abierto) centrado en x y de radio ε* es el intervalo

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, |y-x| < \varepsilon\}.$$

Definición 1.2.- Sean I un intervalo no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de I o un extremo de I, y f una función definida de I en $\mathbb{R}$. Se dice que *f tiene límite (finito) cuando x tiende hacia a* si existe un número real ℓ verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap I$ con $x \neq a$ (o, equivalentemente, para cada $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$), se tiene que

$$f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \qquad \text{(o, equivalentemente, } |f(x)-\ell| < \varepsilon\text{)".}$$

El número ℓ se denomina *límite* de la función f en a.

Proposición 1.3.- Si la función f tiene límite en a, es único, y su valor se denota por $\lim_{x\to a} f(x)$.

Definición 1.4.- Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente y f una función definida de I en $\mathbb{R}$. Se dice que f *tiene límite (finito) cuando x tiende hacia $+\infty$* si existe un número real ℓ verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $M > 0$ (que depende de ε) tal que para cada $x \in I$ con $x \geq M$, se tiene que

$$f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \qquad \text{(o, equivalentemente, } |f(x) - \ell| < \varepsilon\text{)''}.$$

El número ℓ se denomina *límite* de f en $+\infty$ ó cuando x tiende hacia $+\infty$.

Proposición 1.5.- Si la función f tiene límite (finito) cuando x tiende hacia $+\infty$, es único, y su valor se denota por $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Definición 1.6.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ no acotado inferiormente y f una función definida de I en $\mathbb{R}$. Se dice que f *tiene límite (finito) cuando x tiende hacia $-\infty$* si existe un número real ℓ verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $N < 0$ (que depende de ε) tal que para cada $x \in I$ con $x \leq N$, se tiene que

$$f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \qquad \text{(o, equivalentemente, } |f(x) - \ell| < \varepsilon\text{)''}.$$

El número ℓ se denomina *límite* de f en $-\infty$ ó cuando x tiende hacia $-\infty$.

Proposición 1.7.- Si la función f tiene límite (finito) cuando x tiende hacia $-\infty$, es único, y su valor se denota por $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Definición 1.8.- Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$. Se dice que f es *acotada* en I si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta\,, \quad \text{para cada } x \in I\,,$$

o equivalentemente, si existe $M \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M\,, \quad \text{para cada } x \in I\,.$$

Proposición 1.9.- Si f tiene límite finito en a, existe un número real $\delta > 0$ tal que f está acotada en $I \cap \big((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}\big)$.

En particular, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$, se tiene que:

i) Si $\ell > 0$, dados números reales α y β con $0 < \alpha < \ell < \beta$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $x \in I \cap (a-\delta, a+\delta)$ con $x \neq a$, se verifica que $\alpha < f(x) < \beta$.

ii) Si $\ell < 0$, dados números reales α y β con $\alpha < \ell < \beta < 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $x \in I \cap (a-\delta, a+\delta)$ con $x \neq a$, se verifica que $\alpha < f(x) < \beta$.

Proposición 1.10.- Sean f y g funciones reales definidas en un intervalo I de $\mathbb{R}$, y sea a un punto de I o un extremo de I. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y g está acotada en $\big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big) \cap I$ para algún número real $\delta > 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0\,.$$

Observación 1.11.- Las dos proposiciones anteriores, que se enunciaron para el caso de límite de una función en un punto, son igualmente válidas, tras las modificaciones oportunas, para el caso de límite en $+\infty$ ó $-\infty$.

1.12.- Límites laterales.

Sea f una función real definida en un intervalo I, y sea a un punto de I que no es extremo de I. Consideremos los subconjuntos

$$I^+ = \{x \in I \,:\, a < x\} = I \cap (a, \infty),$$
$$I^- = \{x \in I \,:\, x < a\} = I \cap (-\infty, a).$$

El límite de la función f a través de I^+ (resp. de I^-), si existe, se denomina *límite lateral por la derecha* (resp. *por la izquierda*) de f en el punto a, y se denota

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \Big(\text{resp. } \lim_{x\to a^-} f(x)\Big)\,.$$

Proposición 1.13.- En las condiciones anteriores, son equivalentes:

i) f tiene límite ℓ en el punto a.

ii) Existen los dos límites laterales de f en el punto a y coinciden con ℓ.

§ 2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES FINITOS.

Enunciaremos las propiedades correspondientes al caso de límite de una función en un punto $a \in \mathbb{R}$, pudiéndose formular propiedades análogas para los límites en $+\infty$ ó $-\infty$, lo que se deja como ejercicio al lector.

En lo sucesivo, f, g y h serán funciones reales definidas en un intervalo I, y a será un punto de I o un extremo de I.

2.1.- Si la función f tiene límite ℓ en a, entonces la función $|f|$ tiene límite $|\ell|$ en a. *El recíproco, en general, no es cierto*; no obstante, es inmediato de la definición que la función f tiene límite 0 en a si, y sólo si, la función $|f|$ tiene límite 0 en a.

2.2.- Sea β un número real. Si la función f tiene límite ℓ en a, y para cada $x \in I$ se tiene que $\beta \leq f(x)$ (resp. $f(x) \leq \beta$), entonces $\beta \leq \ell$ (resp. $\ell \leq \beta$).

2.3.- Si las funciones f y g tienen límites ℓ y k, respectivamente, en a, entonces la función $f+g$ tiene límite $\ell + k$ en a, y la función $f\,g$ tiene límite $\ell\,k$ en a. Si además $k \neq 0$, la función $f/_g$, que está bien definida en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, tiene límite $\dfrac{\ell}{k}$ en a.

2.4.- Si las funciones f y g tienen límites ℓ y k, respectivamente, en a, y además $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in I$, entonces $\ell \leq k$.

2.5.- Si las funciones f y h tienen límite ℓ en a, y además $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para cada $x \in I$, entonces g tiene límite en a y vale ℓ (*Criterio del Sandwich*).

2.6.- Si la función f tiene límite $\ell > 0$ en a, entonces la función $\log(f)$, que está definida en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, tiene límite $\log(\ell)$ en a.

2.7.- Si la función f tiene límite ℓ en a, entonces la función e^f tiene límite e^ℓ en a.

2.8.- Si las funciones f y g tienen límites ℓ y k, respectivamente, en a, con $\ell > 0$, entonces la función f^g, que está definida en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, tiene límite ℓ^k en a.

§ 3 LÍMITES INFINITOS.

Definición 3.1.- Sea f una función real definida en un intervalo I, y sea a un punto de I o un extremo de I. Se dice que f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a si se verifica la siguiente propiedad:

"Para cada número real $K > 0$ (resp. $K < 0$) existe un número real $\delta > 0$, que depende de K, tal que para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap I$ con $x \neq a$ (o, equivalentemente, para cada $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$), se tiene que $f(x) \geq K$ (resp. $f(x) \leq K$)".

Notación: Si la función f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a, se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad (\text{resp. } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty).$$

Definición 3.2.- Sean I un intervalo no acotado superiormente y f una función real definida en I. Se dice que f tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$) cuando x tiende hacia $+\infty$ si se verifica la siguiente propiedad:

"Para cada número real $K > 0$ (resp. $K < 0$) existe un número real $M > 0$, que depende de K, tal que para cada $x \in I$ con $x \geq M$, se tiene que $f(x) \geq K$ (resp. $f(x) \leq K$)".

Notación: Si la función f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia $+\infty$, se escribe

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad (\text{resp. } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty).$$

Definición 3.3.- Sean I un intervalo no acotado inferiormente y f una función real definida en I. Se dice que f tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$) cuando x tiende hacia $-\infty$ si se verifica la siguiente propiedad:

"Para cada número real $K > 0$ (resp. $K < 0$) existe un número real $M < 0$, que depende de K, tal que para cada $x \in I$ con $x \leq M$, se tiene que $f(x) \geq K$ (resp. $f(x) \leq K$)".

Notación: Si la función f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia $-\infty$, se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty).$$

Al igual que en el caso de límite finito, es posible considerar en el que ahora nos ocupa límites laterales, obteniéndose el siguiente criterio:

Proposición 3.4.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, a un punto de I que no es extremo de I, y f una función real definida en I. Son equivalentes:

i) f tiende a $+\infty$ (resp. $-\infty$) en el punto a.

ii) Existen los dos límites laterales de f en el punto a y son $+\infty$ (resp. $-\infty$).

§ 4 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS.

Como antes, enunciaremos las propiedades correspondientes al caso de límite infinito de una función en un punto $a \in \mathbb{R}$, dejando que el lector las generalice convenientemente para los límites en $+\infty$ ó $-\infty$.

En lo sucesivo, f, g y h serán funciones reales definidas en un intervalo I de $\mathbb{R}$, y a será un punto de I o un extremo de I.

4.1.- Si la función f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a y para cada $x \in I$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$ (resp. $g(x) \leq f(x)$), entonces la función g tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$).

4.2.- Si la función f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a y g está acotada inferiormente (resp. superiormente) en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, entonces la función $f+g$ tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a.

En particular, la propiedad se verifica cuando g tiene límite (finito) en a.

4.3.- Si la función f tiende a $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a y g tiene límite finito no nulo ℓ en a, la función $f\,g$ tiende hacia $\pm\infty$ (según la regla de los signos) cuando x tiende hacia a, y lo mismo sucede con ${}^{f}/_{g}$, que está bien definida en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$.

4.4.- Si la función f tiene límite finito no nulo ó tiende hacia $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a, y la función g tiene límite 0 en a, existiendo $\delta > 0$ tal que g no se anula en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$, entonces la función ${}^{f}/_{g}$:

i) tiende hacia $\pm\infty$, según la regla de los signos, siempre que g tenga signo constante en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$.

ii) no tiene límite (finito ó infinito) si g no tiene signo constante en ningún entorno de a.

4.5.- Si la función f está acotada en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$ y la función g tiende hacia $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función ${}^{f}/_{g}$ tiene límite 0 en a.

En particular, la propiedad se verifica cuando f tiene límite finito en a.

4.6.- Si la función f es estrictamente positiva en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$ y tiene límite 0 (resp. ∞) cuando x tiende hacia a, entonces la función $\log(f)$ tiene límite $-\infty$ (resp. ∞) en a.

4.7.- Si la función f tiene límite $-\infty$ (resp. $+\infty$) cuando x tiende hacia a, entonces la función e^f tiene límite 0 (resp. $+\infty$) en a.

4.8.- Se supone que la función f es estrictamente positiva en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, y tiene límite 0 cuando x tiende hacia a.

i) Si la función g tiene límite finito $\ell > 0$ o si tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a.

ii) Si la función g tiene límite finito $\ell < 0$ o si tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a.

4.9.- Se supone que la función f tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a.

i) Si la función g tiene límite finito $\ell > 0$ o si tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a.

ii) Si la función g tiene límite finito $\ell < 0$ o si tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a.

4.10.- Se supone que la función f tiene límite ℓ en el punto a, con $0 \leq \ell < 1$.

i) Si la función g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a.

ii) Si la función g tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a.

4.11.- Se supone que la función f tiene límite ℓ cuando x tiende hacia a, con $1 < \ell$.

i) Si la función g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a.

ii) Si la función g tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a.

§ 5 INDETERMINACIONES.

Consideraremos funciones reales f y g definidas en un intervalo I, y a será un punto de I o un extremo de I.

Nuevamente, los enunciados que se dan a continuación son válidos cuando se consideran límites de funciones cuando x tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$.

5.1.- Si la función f tiende hacia $+\infty$ y la función g tiende hacia $-\infty$ cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función $f+g$. Es decir, la función $f+g$ puede tener límite, tender a $\pm\infty$, o carecer de límite, en a.

5.2.- Si la función f tiene límite 0 en a y la función g también, existiendo $\delta > 0$ tal que g no se anula en $I \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función f/g.

5.3.- Si la función f tiene límite 0 y la función g tiende hacia $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función $f\,g$.

5.4.- Si la función f tiende hacia $\pm\infty$ y la función g tiende hacia $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función $f/_g$.

5.5.- Si la función f tiende hacia $+\infty$ y la función g tiene límite 0, cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función f^g.

5.6.- Si las funciones f y g tienen límite 0, cuando x tiende hacia a, y f es estrictamente positiva en $I\cap\big((a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}\big)$ para algún $\delta>0$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función f^g.

5.7.- Si la función f tiene límite 1 y la función g tiende hacia $\pm\infty$, cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función f^g.

§ 6 FUNCIONES EQUIVALENTES.

Definición 6.1.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, a un punto de I o un extremo de I, y f y g dos funciones reales definidas en I y tales que, para algún $\delta>0$, g no se anula en $I\cap\big((a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}\big)$. Se dice que la función f es *equivalente* a la función g en el punto a, y se denota por $f\sim_a g$, si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Análogamente se define el concepto de funciones equivalentes en $+\infty$ y $-\infty$ en el caso de que I no esté acotado superior o inferiormente.

Proposición 6.2.- Si $f\sim_a g$, ambas funciones tienen el mismo comportamiento en el punto a, es decir, tienen límite o no en dicho punto simultáneamente. Además, si tienen límite (finito ó infinito) dicho límite es el mismo.

Observación 6.3.-

Supongamos que $f,g,\varphi,\psi\colon I\to\mathbb{R}$ son tales que $f\sim_a g$ y $\varphi\sim_a\psi$. Entonces es sencillo probar que $\varphi\, f\sim_a\psi\, g$. Por lo tanto, en un producto de funciones, a efectos de cálculo de límites, es lícito sustituir una de las funciones factor por otra equivalente.

Sin embargo, NO es cierto en general que si $f\sim_a g$ y $\varphi\sim_a\psi$ entonces $\varphi+f\sim_a\psi+g$. Para ilustrar esto basta considerar las funciones

$$f=x\sim_0 g=x+x^2\,,$$

$$\varphi=-x\sim_0\psi=-x+x^2\,.$$

Proposición 6.4.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, a un punto de I o un extremo de I, y φ, ψ, funciones reales positivas definidas en I y equivalentes en el punto a, que tienen límite (finito ó infinito) distinto de 1 en a, entonces las funciones $\log(\varphi)$ y $\log(\psi)$ son equivalentes en el punto a.

6.5.- Infinitésimos e Infinitos equivalentes.

6.5.1.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, a un punto de I o un extremo de I, y f, g funciones reales definidas en I tales que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 1$.

i) Las siguientes funciones son equivalentes a f en el punto a:

1) $\operatorname{sen}\big(f(x)\big)$ **2)** $\operatorname{Sh}\big(f(x)\big)$ **3)** $\operatorname{tg}\big(f(x)\big)$

4) $\operatorname{Tgh}\big(f(x)\big)$ **5)** $\operatorname{arcsen}\big(f(x)\big)$ **6)** $\operatorname{ArgSh}\big(f(x)\big)$

7) $\operatorname{arctg}\big(f(x)\big)$ **8)** $\operatorname{ArgTgh}\big(f(x)\big)$ **9)** $e^{f(x)} - 1$

10) $\log\big(1 + f(x)\big)$

El apartado 10) puede ser enunciado también de forma equivalente como sigue:

“$\log\big(g(x)\big)$ es equivalente a $g(x) - 1$ en a”.

ii) 1) Si $b > 0$, $b^{f(x)} - 1 \sim_a \log(b)\, f(x)$.

2) Si $p > 0$, $\big(1 + f(x)\big)^p - 1 \sim_a p\, f(x)$; $g(x)^p - 1 \sim_a p\big(g(x) - 1\big)$.

iii) Las funciones

1) $1 - \cos\big(f(x)\big)$ **2)** $\operatorname{Ch}\big(f(x)\big) - 1$

son equivalentes a la función $\dfrac{f(x)^2}{2}$ en a.

6.5.2.- Sea $\mathcal{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ un polinomio de grado $k \geq 1$ ($a_k \neq 0$). Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces $\mathcal{P}\big(f(x)\big)$ es equivalente a $a_k f(x)^k$ en a.

Observación 6.6.- Si I no está acotado superior o inferiormente, todas las equivalencias anteriores siguen siendo válidas sustituyendo a por $+\infty$ ó $-\infty$, respectivamente.

§ 7 CONTINUIDAD.

Definición 7.1.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y f una función real definida en I. Si $a \in I$ se dice que f es *continua en el punto* a si se verifica la siguiente propiedad:

"Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que si

$$x \in I \quad \text{y} \quad |x - a| < \delta, \qquad \big(\text{equivalentemente } x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I\big)$$

entonces

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \big(\text{equivalentemente } f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)\big)\text{".}$$

Se dice que f es *continua en* I si es continua en cada punto de I.

Teorema 7.2.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in I$ y f una función real definida en I. Son equivalentes:

i) f es continua en a.

ii) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y es precisamente $f(a)$.

Ejemplos 7.3.-

7.3.1.- Toda función constante es continua en cada uno de los puntos de su dominio de definición.

7.3.2.- La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$.

7.3.3.- La función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = [x]$ (parte entera de x) no es continua en los puntos enteros. Es continua en todos los demás puntos de $\mathbb{R}$.

Proposición 7.4.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, f una función real definida en I, y $a \in I$ tal que f es continua en a.

i) Existe $\delta > 0$ tal que f es acotada en $(a - \delta, a + \delta) \cap I$.

ii) Si $f(a) \neq 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$ para cada $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I$.

Proposición 7.5.- Sean I un intervalo, $a \in I$ que no es un extremo de I, y f una función real definida en I. Son equivalentes:

i) f es continua en el punto a.

ii) Existen los dos límites laterales de f en el punto a y coinciden ambos con $f(a)$.

Propiedades 7.6.- Sean I un intervalo, $a \in I$ y f, g funciones reales definidas en I y continuas en el punto a. Se verifica:

i) $f + g$ y $f\,g$ son continuas en a.

ii) $|f|$ es continua en a.

iii) Si $g(a) \neq 0$, entonces las funciones ${}^{1}/_{g}$ y ${}^{f}/_{g}$, que están bien definidas en $(a - \delta, a + \delta) \cap I$ para algún $\delta > 0$, son continuas en a.

§ 8 TEOREMAS BÁSICOS.

Este epígrafe va dedicado a presentar los resultados más importantes sobre funciones definidas y continuas en intervalos.

Teorema de Bolzano 8.1.- Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Se supone que $f(a)\,f(b) < 0$, es decir, f toma valores no nulos y de signos opuestos en los extremos del intervalo. Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Propiedad de Darboux 8.2.- Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Para cada número real ξ entre $f(a)$ y $f(b)$ (es decir, $f(a) \leq \xi \leq f(b)$ si $f(a) \leq f(b)$, ó $f(b) \leq \xi \leq f(a)$ en caso contrario), existe al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \xi$.

Teorema de Weierstrass 8.3.- Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, entonces f está acotada. De hecho, f alcanza sus extremos, es decir, existen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)\,, \quad \text{para cada } x \in [a, b]\,.$$

Teorema 8.4.- (continuidad de la función compuesta)

Sean I, J intervalos de $\mathbb{R}$ y f, g sendas funciones reales definidas en I y J respectivamente, y tales que $f(I) \subset J$. Si $a \in I$, f es continua en a, $b \in J$, g es continua en b y $f(a) = b$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en a.

En particular, si f es continua en I y g es continua en J, entonces $g \circ f$ es continua en I.

Teorema 8.5.- (continuidad de la función inversa)

Sea f una función definida, continua e inyectiva en el intervalo I de $\mathbb{R}$. Entonces, el conjunto imagen de f, $J = f(I)$, es un intervalo, y la función $f^{-1}\colon J \to I$ es continua.

§ 9 EJERCICIOS.

1.- Probar mediante la definición de límite que:

1.1.- $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ **1.2.-** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

2.- Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}, \quad x \neq 1\,, \, x \neq 0\,.$$

Estudiar la existencia de límite de la función en los puntos 0 y 1.

3.- ¿Existe el límite en 0 de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right], \quad a, b > 0$$

definidas para $x \neq 0$? ($[x]$ denota la parte entera de x).

4.- Se considera la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} A + B\log(x) & \text{si } x > 0; \\ C & \text{si } x = 0; \\ D\,e^{3x} + \dfrac{E}{x^3} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde A, B, C, D y E son parámetros reales. Encontrar los valores de los parámetros para los que se verifica que:

4.1.- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ **4.2.-** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

4.3.- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 3$ **4.4.-** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0.$

5.- Sean b y α números reales con $b > 1$ y $\alpha > 0$. Demostrar que:

5.1.- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = \infty$. En particular, cuando x tiende a ∞, la función exponencial crece hacia infinito más rápido que cualquier polinomio.

5.2.- $\lim\limits_{x\to 0^+} b^{1/x}\, x^\alpha = \infty$. **5.3.-** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$. **5.4.-** $\lim\limits_{x\to 0^+} \log(x)\, x^\alpha = 0$.

6.- Calcular los siguientes límites en caso de que existan:

6.1.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ **6.2.-** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\operatorname{tg}^2(x)}{x\big(1 - \cos(x)\big)}$

6.3.- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x$ **6.4.-** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x\,e^x) - \cos(x\,e^{-x})}{x^3}$

6.5.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2\,x+1}}$ **6.6.-** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{\log(x)}}}{x}$

6.7.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}\big(\operatorname{tg}\big(x^2/2\big)\big)\big)}{\log\big(\cos(3x)\big)}$ **6.8.-** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x+\operatorname{sen}(x)-1}{2\,\log(1+x)}$

6.9.- $\displaystyle\lim_{x\to a} \Big(4-\frac{3\,x}{a}\Big)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\,x}{2\,a}\right)}$ **6.10.-** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{\sqrt{1+x}-1},\quad a>0$

6.11.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\Big)^{1/x},\quad a,b,c>0.$ **6.12.-** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}(x)}\right)^{1/x}$

6.13.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\operatorname{sen}^2(x)}$ **6.14.-** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\Big(1-\cos(2x)\Big)\log(1+x)}{\big(e^x-1\big)\operatorname{tg}^2(x)\operatorname{sen}(2x)}$

6.15.- $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} (2x^2-3x+1)\operatorname{tg}(\pi x)$ **6.16.-** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos\left(\theta+x\right)}{\cos(\theta)}\right)^{1/x},\quad \cos(\theta)\neq 0.$

6.17.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(x+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)\big)^{\operatorname{cotg}(x)}$ **6.18.-** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x(e^{\pi x+1}+1)}\big)$

6.19.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\big(2^x-3^x\big)$ **6.20.-** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\big(1-\cos(x)\big)}{x^4}$

6.21.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(a^x-1)\log(1-x^2)}{\big((1-x^2)^p-1\big)\operatorname{arcsen}(x)},$ donde $a>0$, $p\in\mathbb{N}$.

6.22.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\big(\operatorname{tg}^2(x)\big)}{2\operatorname{sen}^4(x)+\operatorname{sen}^5(x)}$

7.- Calcular el límite cuando x tiende hacia infinito de las funciones definidas, en intervalos no acotados superiormente adecuados, por las expresiones siguientes:

7.1.- $a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0,\quad p\in\mathbb{N},\ a_0,a_1,\ldots,a_p\in\mathbb{R}$ y $a_p\neq 0$.

7.2.- $\displaystyle\frac{a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_qx^q+b_{q-1}x^{q-1}+\ldots+b_1x+b_0},\quad p,q\in\mathbb{N},\ a_i,b_j\in\mathbb{R}$ para todos i,j y $a_p\neq 0\,,\ b_q\neq 0$.

7.3.- $\big(a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0\big)^{1/\log(x)},\quad p\geq 1,\ a_p>0.$

7.4.- $\dfrac{\log(3\,x^4+x^2+1)}{\log(7\,x^9+3\,x^6)}$ **7.5.-** $\left(3\,x^2+6\,x^5\right)^{\frac{1}{2+\log(4\,x^2+5)}}$

7.6.- $\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$ **7.7.-** $(a^x+b^x)^{1/x}, \quad a\geq b\geq 0.$

7.8.- $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ **7.9.-** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{sen}(x^5)}{x+1}$

7.10.- $\mathrm{sen}(\sqrt{x+1})-\mathrm{sen}(\sqrt{x})$ **7.11.-** $\sqrt[3]{x^3+\alpha\,x^2}-\sqrt[3]{x^3-\alpha\,x^2}$

7.12.- $x\Big((x+1)^{1/x}-x^{1/x}\Big)$ **7.13.-** $\left(\dfrac{x^2+5\,x+4}{x^2-5\,x+7}\right)^x$

8.- Sean f y g las funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leq x<\dfrac{1}{2};\\[2ex] x-\dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1.\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-x & \text{si } 0\leq x<\dfrac{1}{2};\\[2ex] 0 & \text{si } \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1.\end{cases}$$

Probar que $f+g$ y fg son continuas en $[0,1]$. Demostrar que las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$ son continuas en $[0,1]$. Dibujar las gráficas de las funciones f, g, $f+g$, fg, $f\circ g$ y $g\circ f$.

9.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

9.1.- $f(x)=\begin{cases}x\,e^{1/x} & \text{si } x\neq 0;\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$ **9.2.-** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0;\\ 2 & \text{si } x=0.\end{cases}$

10.- Estudiar la continuidad y dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=[x]+(x-[x])^2, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

11.- Estudiar la continuidad y dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases}x[x] & \text{si } x\neq 0;\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

12.- Demostrar que:

12.1.- Existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $x^{179}+\dfrac{163}{1+x^2+\mathrm{sen}^2(x)}=119.$

12.2.- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(x) = x - 1$.

12.3.- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in (0, \infty)$ tal que $x + \log(x) = \alpha$.

13.- Sea f una función definida y continua en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que existe al menos un $x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) = \frac{f(a) + f(b)}{2}\,.$$

14.- Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua en $[0, 1]$. Probar que existe un punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

15.- Demostrar que todo polinomio con coeficientes reales y grado impar tiene al menos una raíz real.

16.- Sea P un polinomio. Demostrar que existe un punto en el cual la función $|P(x)|$ toma el valor mínimo.

17.- Sea P un polinomio de grado par y siendo el coeficiente del monomio de mayor grado positivo. Demostrar que existe un punto en el cual la función $P(x)$ toma el valor mínimo.

18.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}\,.$$

Determinar el conjunto imagen de f.

§ 10 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

2.- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

3.- Usar $\dfrac{b}{x} - 1 < \left[\dfrac{b}{x}\right] \le \dfrac{b}{x}$ y el criterio del sandwich: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = {}^{b}\!/_{a}$.
Las igualdades

$$\left[\frac{x}{a}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a; \\ -1 & \text{si } -a < x < 0, \end{cases}$$

implican que $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

4.1.- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ si, y sólo si, $B < 0$, $E < 0$.

4.2.- $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ si, y sólo si, $B = 0$, $E = 0$, $A = 2$, $D = 2$.

4.3.- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ si, y sólo si, $A = 3$, $B = 0$.

4.4.- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ para cualquier valor de los parámetros.

6.1.- $\frac{5}{4}$. **6.2.-** 2. **6.3.-** e. **6.4.-** -2. **6.5.-** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **6.6.-** 0.
6.7.- $\frac{-1}{9}$. **6.8.-** 1. **6.9.-** $\exp\left({}^{6}\!/_{\pi}\right)$. **6.10.-** $2\log(a)$. **6.11.-** $\sqrt[3]{abc}$.
6.12.- e^2. **6.13.-** $\frac{1}{2}$. **6.14.-** 1. **6.15.-** $\frac{1}{\pi}$. **6.16.-** $e^{-\operatorname{tg}(\theta)}$.
6.17.- e^2. **6.18.-** No existe. **6.19.-** $-\infty$. **6.20.-** $\frac{1}{8}$. **6.21.-** $\frac{\log(a)}{p}$.
6.22.- $\frac{1}{4}$.

7.1.- $\ell = \infty$ si $a_p > 0$; $\ell = -\infty$ si $a_p < 0$. **7.2.-** $\ell = \infty$ si $p > q$ y $a_p/b_q > 0$; $\ell = -\infty$ si $p > q$ y $a_p/b_q < 0$; $\ell = a_p/b_q$ si $p = q$; $\ell = 0$ si $p < q$.
7.3.- e^p. **7.4.-** $\frac{4}{9}$. **7.5.-** $e^{5/2}$. **7.6.-** 3. **7.7.-** a. **7.8.-** 1. **7.9.-** 0.
7.10.- 0. **7.11.-** $\frac{2\alpha}{3}$. **7.12.-** 0. **7.13.-** e^{10}.

8.- f y g son continuas, luego lo son su suma y su producto. Como $f([0,1]) = g([0,1]) = [0,1/2] \subset [0,1]$, dominio de f y g, también son continuas $f \circ g$ y $g \circ f$.

9.1.- Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$.
9.2.- Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

10.- Continua en $\mathbb{R}$.

11.- Continua en $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$.

12.- En todos los casos la respuesta se obtiene aplicando la propiedad de Darboux.
12.1.- $f(x) = x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2(x)}$; $f(-\pi) < 0 < 119 < 163 = f(0)$.
12.2.- $f(x) = \operatorname{sen}(x) - x$; $f(\pi) = -\pi < -1 < \pi = f(-\pi)$.
12.3.- $f(x) = x + \log(x)$; f es estrictamente creciente por serlo la función identidad y la función logarítmica; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

13.- Si $f(a) = f(b)$ es obvio. Si $f(a) < f(b)$, se tiene que $f(a) < \dfrac{f(a) + f(b)}{2} < f(b)$: aplicar la propiedad de Darboux.

14.- Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$ es trivial. Si no, aplicar el teorema de Bolzano en $[0, 1]$ a la función $g(x) = f(x) - x$.

15.- Sea P dicho polinomio y supongamos que el coeficiente del monomio de mayor grado es positivo (en caso contrario, se razona de forma similar). Puesto que

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty,$$

basta aplicar el teorema de Bolzano en un intervalo adecuado.

16.- Trivial si P es constante. Si no, $\lim_{x\to\pm\infty} |P(x)| = +\infty$, y se aplica el teorema de Weierstrass en un intervalo adecuado.

17.- Similar al anterior.

18.- $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$.

TEMA 3 FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. CÁLCULO DIFERENCIAL

La necesidad de medir la rapidez con que varían las magnitudes físicas es una constante en el estudio de los fenómenos naturales. No fue hasta el siglo XVII cuando Newton y Leibnitz desarrollaron una teoría matemática que diera respuesta a esta cuestión, iniciando así lo que se conoce hoy como *Cálculo Diferencial*.

Este tema se dedica a la exposición de los resultados fundamentales del Cálculo Diferencial para funciones reales de variable real definidas en intervalos de $\mathbb{R}$. Comenzamos estableciendo el concepto de derivada y sus propiedades elementales, para abordar luego los resultados clásicos relativos a este concepto.

§ 1 CONCEPTO DE DERIVADA. PRIMERAS PROPIEDADES.

Definición 1.1.- Sea f una función real definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, y sea $a \in I$. Se dice que f es *derivable en el punto* a si existe y es finito el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,,$$

que puede ser expresado equivalentemente como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \,.$$

En ese caso, el valor del límite se representa por $f'(a)$, y se denomina *derivada de* f *en el punto* a.

Se dice que f es *derivable en* I si es derivable en cada uno de sus puntos.

Observación 1.2.- El cociente cuyo límite define el concepto de derivada se denomina *cociente incremental de* f *correspondiente a los puntos* a *y* $a+h$, pues su valor es la razón entre el incremento que experimenta la función y el correspondiente a la variable, al pasar de a a $a+h$.

Interpretación geométrica de la derivada 1.3.-

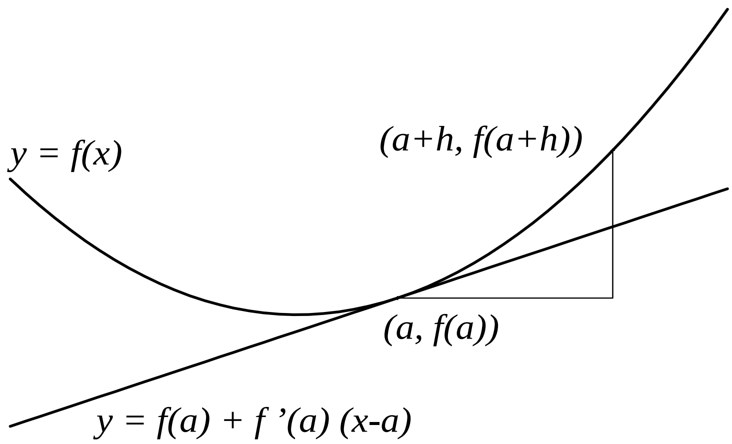
Sean f una función definida en un intervalo abierto I y a un punto de I en el que f es derivable. Si consideramos la recta del plano de ecuación

$$y = g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \,,$$

su gráfica pasa, al igual que la de f, por el punto $(a, f(a))$. Más aún, se observa fácilmente que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0,$$

lo que indica que g es una "buena aproximación" de f cuando x tiende hacia a. La recta definida por g se denomina *recta tangente* a f en el punto a, y su pendiente es la derivada de f en el punto a.



Propiedades 1.4.-

Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $a \in I$, y f, g funciones reales definidas en I.

1.4.1.- Si f es derivable en a, f es continua en a. El recíproco es, en general, falso, como se puede comprobar, por ejemplo, con la función $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, en el punto $a = 0$.

1.4.2.- Si f y g son derivables en a y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\, f + \beta\, g$ es derivable en a, y además,

$$(\alpha\, f + \beta\, g)'(a) = \alpha\, f'(a) + \beta\, g'(a)\,.$$

1.4.3.- Si f es una función constante, entonces f es derivable en I y para todo $x \in I$ se tiene que $f'(x) = 0$.

1.4.4.- Si f y g son derivables en a, entonces $f\, g$ es derivable en a, y además

$$(f\, g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)\,.$$

1.4.5.- Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces $f/_g$ (que está definida en un entorno adecuado de a) es derivable en a, y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Definición 1.5.- Sea f una función real definida en un intervalo de la forma $[a, b)$. Entonces, tiene sentido considerar el límite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

que si existe y es finito se denomina *derivada lateral por la derecha de f en el punto a*, y se representa por $f'(a^+)$ ó $f'_+(a)$.

Análogamente, para una función f definida en un intervalo de la forma $(a, b]$ se puede estudiar la derivabilidad por la izquierda en el punto b; si existe y es finito el límite por la izquierda en el punto b de los cocientes incrementales relativos a dicho punto se denomina *derivada lateral por la izquierda de f en el punto b* y se denota por $f'(b^-)$ ó $f'_-(b)$.

Así, si se tiene una función f definida en el intervalo $I = [a, b]$, decir que f es *derivable en I* significa que f es derivable en cada punto de (a, b) y que existen las correspondientes derivadas laterales en a y b. Análogamente, si se tiene una función f definida en el intervalo $I = [a, b)$ (respectivamente, en $I = (a, b]$), decir que f es *derivable en I* significa que f es derivable en cada punto de (a, b) y que existe la derivada lateral en a (resp. en b).

A partir de las propiedades conocidas de los límites es sencillo obtener la siguiente

Proposición 1.6.- Sean f una función real definida en un intervalo abierto I y $a \in I$. Son equivalentes:

i) f es derivable en a.

ii) f admite derivadas laterales en a y coinciden.

En este caso, el valor de las derivadas laterales coincide con $f'(a)$.

Regla de la Cadena 1.7.-

Sean I y J intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to J$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ funciones tales que:

i) f es derivable en $a \in I$.

ii) g es derivable en $b = f(a) \in J$.

Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es derivable en a, además

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a) = g'(b)\, f'(a).$$

Derivación de la función inversa 1.8.-

Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y f una función real definida, continua e inyectiva en I. Si f es derivable en $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y

$$(f^{-1})'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)} \qquad \text{ó} \qquad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}\,.$$

Observación 1.9.- Este resultado es de aplicación al cálculo de las derivadas de las funciones inversas o recíprocas de otras cuyas derivadas se conozcan. Por ejemplo, dado que la derivada de la función exponencial es ella misma, la derivada de su inversa, la función logarítmica, es

$$\log'(y) = \frac{1}{y}\,, \quad y \in (0, \infty)\,.$$

Definición 1.10.- Sea f una función definida y derivable en un intervalo I. Tiene entonces sentido considerar la función derivada, que denotaremos por f', que a cada punto $x \in I$ le asocia el valor $f'(x)$. Esta nueva función puede ser derivable a su vez en un punto a de I, es decir, puede existir

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = (f')'(a)\,,$$

que se denota por $f''(a)$, y se denomina *derivada segunda* de f en a. Si f' es derivable en todo I, se puede considerar una nueva función, la derivada segunda de f, denotada por f'', que asocia a cada punto $x \in I$ el valor $f''(x)$.

Análogamente, se pueden definir *derivadas sucesivas* de orden $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. La notación usual para la derivada de orden k o derivada k-ésima de una función f es $f^{(k)}$. Por convenio, se admite que $f^{(0)} = f$.

Definición 1.11.- Sea k un número natural, $k \geq 1$. Se dice que una función real f definida en el intervalo I es *de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* I si f admite derivadas sucesivas hasta orden k en I y todas ellas son continuas (de acuerdo con la propiedad 1.4.1, esto equivale a que exista $f^{(k)}$ y sea continua).

Se dice que una función real f definida en el intervalo I es *de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *en* I si f admite derivadas sucesivas de orden arbitrario en I (y, por tanto, todas son continuas).

Fórmula de Leibnitz 1.12.-

Sean f, g funciones de clase $\mathcal{C}^n$ en un intervalo I. Entonces, $f\,g$ es de clase $\mathcal{C}^n$ en I, y para cada $k \leq n$ se tiene que

$$(f\,g)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(x)\, g^{(i)}(x)\,, \quad x \in I\,.$$

§ 2 TEOREMAS DE ROLLE Y DEL VALOR MEDIO. MONOTONÍA.

Los conceptos y resultados que siguen a continuación van dirigidos al estudio local de funciones y a la caracterización de los puntos relevantes en dicho estudio. El cálculo diferencial es herramienta fundamental para el conocimiento del comportamiento de una función, tanto desde el punto de vista local como desde el global.

Definición 2.1.- Sean f una función real definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Se dice que f *presenta un mínimo relativo en* x_0 (resp. *máximo relativo*) si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ se tiene que

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \leq f(x_0)) .$$

Los máximos y mínimos relativos reciben el nombre común de *extremos relativos*. En los términos de la definición anterior, en el caso de que para $x \neq x_0$ se pueda asegurar la desigualdad estricta entre las correspondientes imágenes, se habla de *extremos relativos estrictos*.

Teorema 2.2.- (Condición necesaria de extremo relativo)
Sea f una función real definida en un intervalo abierto I, y sea x_0 un punto de I en el que f presenta un extremo relativo. Si f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Observaciones 2.3.-

i) Es claro que un extremo relativo no tiene por qué presentarse en un punto en el que la función sea derivable. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, presenta un mínimo relativo (y absoluto) en $x_0 = 0$, único punto en el que f no es derivable.

ii) Como indica la proposición, en el caso de derivabilidad en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en x_0 será de pendiente cero, y por lo tanto, horizontal.

iii) Ya sabemos que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza el máximo y el mínimo absolutos, que son por tanto extremos relativos, pero puede que esto ocurra en los extremos del intervalo y que, aun cuando exista la derivada lateral correspondiente, ésta no sea nula (p.e. $f(x) = x^2 - 1$ en $[-1, 1]$).

Teorema de Rolle 2.4.-
Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio de Cauchy 2.5.-
Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces, existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)\left(g(b)-g(a)\right) = g'(c)\left(f(b)-f(a)\right).$$

Como consecuencia inmediata de este teorema, si tomamos $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, deducimos el siguiente

Teorema de los incrementos finitos de Lagrange 2.6.-
Sea f una función real definida y continua en $[a,b]$, y derivable en (a,b). Entonces, existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a) = (b-a)\, f'(c).$$

Observación 2.7.- Este resultado tiene una interpretación geométrica clara: la recta que une los puntos "inicial" $(a, f(a))$ y "final" $(b, f(b))$ de la gráfica de f tiene por pendiente el valor

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

El teorema asegura que existe un punto en (a,b) en el que la recta tangente a la gráfica de f tiene esa misma pendiente, y por lo tanto, es paralela a la recta antes considerada.

Corolario 2.8.- Sea f una función real definida y derivable en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Si $f'(x) = 0$ para cada $x \in I$, entonces f es constante en I.

Corolario 2.9.- Sea f una función real definida en el intervalo $[a, a+\delta)$, con $\delta > 0$, siendo f continua en $[a, a+\delta)$ y derivable en $(a, a+\delta)$. Si existe y es finito $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, se tiene que f admite derivada lateral por la derecha en el punto a y

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

Análogo resultado se verifica para intervalos de la forma $(a-\delta, a]$.

Regla de L'Hôpital 2.10.-
Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y a un punto de I o un extremo de I. Si f y g son funciones derivables en I tales que $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in I \setminus \{a\}$, y se verifica que, o bien

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

o bien

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

entonces, si existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (finito o infinito), se tiene que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Observaciones 2.11.-

i) El resultado es igualmente válido para intervalos no acotados en relación a los límites en $a = +\infty$ ó $a = -\infty$.

ii) Este resultado se aplica a la resolución de indeterminaciones ${}^0/_0$ e ${}^\infty/_\infty$.

Definición 2.12.- Se dice que una función real f, definida en un intervalo I, es *creciente* (resp. *decreciente*) en I si para todos $x, y \in I$ con $x < y$ se verifica que $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).

Si las últimas desigualdades se verifican en sentido estricto, se habla de crecimiento (resp. decrecimiento) *estricto* en I.

Como consecuencia del teorema de Lagrange se tiene que

Proposición 2.13.- Si f es derivable en un intervalo I, entonces:

2.13.1.- f es creciente (resp. decreciente) en I si, y sólo si, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) para cada $x \in I$.

2.13.2.- Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para cada $x \in I$ que no sea extremo de I, entonces f es estrictamente creciente (resp. decreciente) en I.

Observación 2.14.- El recíproco de 2.13.2 es falso, es decir, de la monotonía estricta de una función derivable en un intervalo no se deduce la no anulación de la derivada. Basta considerar la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3,$$

que es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, y para la que $f'(0) = 0$.

§ 3 FÓRMULA DE TAYLOR. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES.

Si exceptuamos las funciones polinómicas y las racionales (cocientes de dos polinómicas), las funciones que aparecen normalmente en el Análisis son de evaluación complicada, o incluso imposible, por medio de operaciones elementales. Así, surge en principio la necesidad de sustituir la función de partida por otra, por ejemplo, polinómica, que la aproxime suficientemente, al menos en un entorno del punto alrededor del cual se está estudiando la función. Hay que hacer notar que la aproximación puede también aportar información de tipo cualitativo acerca de la función.

La fórmula de Taylor proporciona la mejor (en un sentido que se precisará) aproximación de tipo polinómico a una función suficientemente derivable en un entorno de un punto.

Definición 3.1.- Sea f una función real definida en un intervalo I y sea $a \in I$. Si f admite derivadas sucesivas hasta el orden $n \geq 1$ en el punto a, se denomina *polinomio de Taylor de grado n de f en a* al polinomio

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\,.$$

El polinomio de Taylor es el único de grado menor o igual que n que satisface las relaciones

$$P(a) = f(a)\,,\ P'(a) = f'(a)\,,\ \ldots\,,\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,,$$

que, de hecho, sirven para determinarlo. Así, la función dato y el polinomio coinciden, junto con sus derivadas sucesivas hasta orden n, en el punto a, con lo que se puede afirmar que se ha resuelto un problema de interpolación para f.

El siguiente resultado se obtiene a partir del teorema del valor medio de Cauchy.

Fórmula de Taylor 3.2.-

Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y f una función real definida en I que admite derivadas hasta el orden $n+1$ en cada punto de I (en particular f es de clase $\mathcal{C}^n$ en I). Si $a \in I$ para cada $x \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n \\ & + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,, \end{aligned}$$

donde ξ_x es un punto del intervalo abierto de extremos a y x.

Observaciones 3.3.-

i) El último sumando de la expresión anterior, que es la diferencia entre el valor de la función y el del polinomio de Taylor $T_n(f,a)$ en x, es el denominado *resto de Taylor de orden n en a*, denotado por $R_n(f,a)(x)$, y que ha sido expresado en la forma conocida como *de Lagrange*.

ii) Otra forma usual de representar la fórmula de Taylor es la siguiente: Sea f una función definida en el intervalo $I = (a-\delta, a+\delta)$, con $\delta > 0$, y que admite derivadas hasta el orden $n+1$ en cada punto de I. Para cada $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \delta$ se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)}{2!}\,h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta\,h)}{(n+1)!}\,h^{n+1},$$

donde $\theta \in (0,1)$ depende de h.

Proposición 3.4.- Sean f una función real definida en un intervalo abierto I y $a \in I$. Si f es $n-1$ veces derivable en I y existe $f^{(n)}(a)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Dicho de otro modo, existe una función $\varepsilon\colon I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in I\setminus\{a\}$ se tiene que

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + (x-a)^n \cdot \varepsilon(x),$$

y que verifica que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Observación 3.5.- De hecho, $T_n(f,a)$ es el único polinomio de grado menor o igual que n que verifica la propiedad anterior. En este sentido, podemos decir que es la mejor aproximación a f en un entorno de a.

Los dos resultados siguientes proporcionan métodos para la determinación directa (es decir, sin recurrir al cálculo de las derivas sucesivas) de los polinomios de Taylor correspondientes a funciones que resultan de operar, de un modo u otro, con otras funciones cuyos polinomios de Taylor se conocen.

Propiedades 3.6.- Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $a \in I$, y $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones cuyos polinomios de Taylor de orden $n \in \mathbb{N}$ en a son P y Q, respectivamente. Entonces, se verifica que:

3.6.1.- Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el polinomio de Taylor de orden n en a de la función $\alpha\, f + \beta\, g$ es $\alpha\, P + \beta\, Q$. (Propiedad de linealidad.)

3.6.2.- El polinomio de Taylor de orden n en a de la función $f\, g$ es el que resulta al calcular $P\,Q$ y despreciar los términos en $(x-a)$ de grado estrictamente mayor que n.

3.6.3.- Si $g(a) \neq 0$, el polinomio de Taylor de orden n en a de la función ${}^{f}\!/_{g}$ se obtiene al dividir, hasta llegar al grado n, P entre Q según las potencias crecientes de $(x-a)$.

3.6.4.- Si F es una primitiva de f en I (es decir, $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in I$), el polinomio de Taylor de orden $n+1$ en a de la función F es el polinomio R, primitiva de P, tal que $R(a) = F(a)$.

Proposición 3.7.- Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ funciones definidas en sendos intervalos I, J, y sean $a \in I$ y $b \in J$ tales que $f(a) = b$. Si el polinomio de Taylor de orden n en a (resp. en b) de f (resp. de g) es el polinomio P (resp. Q), entonces el polinomio de Taylor de orden n en a de la función $g \circ f$ (definida en $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ para algún $\delta > 0$) es el que resulta al despreciar en el polinomio $Q\big(P(x)\big)$ los términos en $(x-a)$ de grado estrictamente mayor que n.

Se prosigue ahora con el estudio de la convexidad de las gráficas de funciones definidas en intervalos, de nuevo en términos de las derivadas.

Definición 3.8.- Sea f una función definida en un intervalo I. Se dice que f es *convexa* (resp. *cóncava*) en I si para todos $x, y \in I$ y todo $\alpha \in (0,1)$ se tiene que

$$f\big((1-\alpha)\,x + \alpha\, y\big) \leq (1-\alpha)\, f(x) + \alpha\, f(y)$$
$$\big(\text{resp. } f\big((1-\alpha)\,x + \alpha\, y\big) \geq (1-\alpha)\, f(x) + \alpha\, f(y)\big)\,.$$

Si atendemos a la representación gráfica, f es convexa (resp. cóncava) si la cuerda que une dos puntos cualquiera de su gráfica queda por encima (resp. por debajo) de la gráfica de f.

Proposición 3.9.- Sea f una función definida y dos veces derivable en un intervalo I. Entonces, f es convexa (resp. cóncava) en I si, y sólo si, para cada $x \in I$ se tiene que $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$).

Definición 3.10.- Sea f una función definida en un intervalo abierto I, y sea $a \in I$ en el que f es derivable. Tiene sentido considerar la recta tangente a f en a, de ecuación

$$g(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)\,.$$

Se dice que a es un *punto de inflexión* de f si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a)$, entonces $f(x) \geq g(x)$, y si $x \in (a, a+\delta)$, entonces $f(x) \leq g(x)$, o viceversa.

Proposición 3.11.- Sea f una función definida y derivable en un intervalo I y sea $a \in I$ en el que f es dos veces derivable. Entonces, se tiene que:

i) Si $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$), la gráfica de la recta tangente a f en ese punto queda, en un entorno adecuado, por debajo (resp. por encima) de la gráfica de f.

ii) Si a es un punto de inflexión de f, ha de ser $f''(a) = 0$.

Proposición 3.12.- Sean I un intervalo abierto, f una función real definida en I que admite $n-1$ derivadas en I, con $n \geq 2$, y a un punto de I tal que existe $f^{(n)}(a)$. Si

$$f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

entonces:

i) Si n es par, f presenta un extremo relativo en a, que será un máximo si $f^{(n)}(a) < 0$ y un mínimo si $f^{(n)}(a) > 0$.

ii) Si n es impar, f no presenta extremo relativo en a.

Proposición 3.13.- Sean I un intervalo abierto, f una función real definida en I que admite $n-1$ derivadas en I, con $n \geq 3$, y a un punto de I tal que existe $f^{(n)}(a)$. Si

$$f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

entonces:

i) Si n es impar, f presenta un punto de inflexión en a.

ii) Si n es par, f no presenta un punto de inflexión en a.

Representación gráfica de funciones 3.14.-

A la hora de dar una representación aproximada de la gráfica de una función real dada por la expresión explícita genérica $y = f(x)$, es conveniente seguir los siguientes pasos:

3.14.1.- Determinar el dominio de definición $\mathcal{D}$ de la función, es decir, el conjunto de valores reales x para los que la expresión $f(x)$ proporciona un número real. En los casos usuales $\mathcal{D}$ es un intervalo o una unión de intervalos.

3.14.2.- Hallar los cortes de la gráfica con los ejes, que serán los puntos de la forma $(a, 0)$ y $(0, b)$ que pertenezcan a la gráfica.

3.14.3.- Estudiar la simetría de la gráfica:

3.14.3.1.- Si para cada $x \in \mathcal{D}$ se tiene que $-x \in \mathcal{D}$ y $f(-x) = f(x)$, se dice que la función f es *par*, y su gráfica presenta simetría respecto del eje de ordenadas OY.

3.14.3.2.- Si para cada $x \in \mathcal{D}$ se tiene que $-x \in \mathcal{D}$ y $f(-x) = -f(x)$, se dice que la función f es *impar*, y su gráfica presenta simetría respecto del origen de coordenadas.

3.14.4.- Estudiar la periodicidad, es decir, la existencia de una constante T, denominada *periodo* de f, tal que si $x \in \mathcal{D}$ y $x + T \in \mathcal{D}$, entonces $f(x + T) = f(x)$.

3.14.5.- Determinar las *asíntotas* de la gráfica, que pueden ser de diversos tipos:

3.14.5.1.- *Horizontales*: si $\mathcal{D}$ no está acotado superior y/o inferiormente y

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \quad \text{y/o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}\,,$$

las rectas de ecuaciones $y = L_1$ y/o $y = L_2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de la función f (puede ser $L_1 = L_2$).

3.14.5.2.- *Verticales*: Si $a \in \mathbb{R}$ es un punto tal que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{y/o} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty\,,$$

entonces la recta de ecuación $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

3.14.5.3.- *Oblicuas*: Supongamos que $\mathcal{D}$ no está acotado superiormente y que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces, la recta de ecuación $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función f.

Lo mismo se puede decir si $\mathcal{D}$ no está acotado inferiormente y se verifican análogas condiciones respecto a los límites indicados cuando x tiende a $-\infty$.

3.14.6.- Determinar los intervalos de monotonía de la función: si f es derivable en I, este problema se reduce a estudiar el signo de f', de acuerdo con lo expuesto en el resultado 2.13.

3.14.7.- Determinar los extremos relativos de f: los puntos $a \in I$ en los que es posible que f presente un extremo pueden determinarse como:

3.14.7.1.- Puntos en los que f no es continua, o en los que es continua pero no derivable. Un estudio de la función en un entorno de dichos puntos permitirá saber si son o no extremos.

3.14.7.2.- Si a es un extremo relativo de f y f es derivable en a, como se vió en 2.2, ha de ser $f'(a) = 0$. En los puntos que satisfagan esta condición es necesario hacer un estudio como el que sugiere la proposición 3.12.

3.14.8.- Estudiar la convexidad de f: para funciones dos veces derivables en I, esto equivale a la determinación del signo de f'', según el resultado 3.9.

3.14.9.- Determinar los puntos de inflexión de f: éstos pueden presentarse en puntos en los que exista f' pero no f'', en cuyo caso se requiere un estudio de la función en un entorno del punto para establecer su naturaleza. Si a es un punto de inflexión y existe $f''(a)$, ha de valer 0 (de acuerdo con 3.11.ii), por lo que hay que determinar los puntos en los que se anule la segunda derivada, aplicándoseles el estudio que indica la proposición 3.13.

Desarrollos de Taylor de las Funciones Elementales 3.15.-

Todos los desarrollos se refieren al punto $x_0 = 0$, siendo las correspondientes funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de dicho punto. El resto de Taylor se ha representado de acuerdo con la Proposición 3.4.

1.- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$

2.- $a^x = 1 + \dfrac{x\log(a)}{1!} + \dfrac{x^2\log(a)^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n\log(a)^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$

3.- $\operatorname{sen}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$

4.- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$

5.- $\operatorname{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2\,x^5}{15} + \dfrac{17\,x^7}{315} + \dfrac{62\,x^9}{2835} + \dfrac{1382\,x^{11}}{155925} + x^{12}\varepsilon(x)$

6.- $\operatorname{Sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$

7.- $\operatorname{Ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$

8.- $\operatorname{Tgh}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2\,x^5}{15} - \dfrac{17\,x^7}{315} + \dfrac{62\,x^9}{2835} - \dfrac{1382\,x^{11}}{155925} + x^{12}\varepsilon(x)$

9.- $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha\,x}{1!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\,x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) =$

$$= \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

Casos particulares:

i) Si $\alpha \in \mathbb{N}$ se obtiene la *Fórmula del Binomio de Newton.*

ii) $\alpha = \dfrac{1}{2}$;

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \frac{3\,x^3}{2\cdot 4\cdot 6} - \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)\,x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + x^n\varepsilon(x)$$

iii) $\alpha = -\dfrac{1}{2}$;

a) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3\,x^2}{2\cdot 4} - \ldots + (-1)^n\,\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + x^n\varepsilon(x)$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3\,x^4}{2\cdot 4} - \ldots + (-1)^n\,\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

c) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3\,x^4}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

iv) $\alpha = -1$;

a) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n\,x^n + x^n\varepsilon(x)$$

b) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

c) $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots + (-1)^n\,x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

10.-

i) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\,\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$ (ver 9.iv.a)

ii) $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \ldots - \dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$ (ver 9.iv.b)

11.- $\mathrm{arcsen}(x) = x + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$ (ver 9.iii.c)

12.- $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arcsen}(x) =$

$$= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \ldots - \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

13.- $\mathrm{arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} + \ldots + (-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$ (ver 9.iv.c)

14.- $\mathrm{ArgSh}(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) =$

$= x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \ldots + (-1)^n\,\dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$ (ver 9.iii.b)

15.- $\operatorname{ArgTgh}(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$ (ver 10)

§ 4 EJERCICIOS.

1.- Determinar los números a y b para que la función f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \geq 1, \\ ax+b & \text{si } x < 1, \end{cases}$$

sea derivable en el punto $x = 1$.

2.- La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(1, 3)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar a, b y c.

3.- Demuéstrese que la curva $y = 2x^3 + 6x + 7$ no tiene tangentes paralelas a la recta $y = 5x + 3$.

4.- Sea $\alpha \in \mathbb{N}$. Estudiar la derivabilidad en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5.- Sea $c > 0$. Se traza la recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto P. Probar que P es el punto medio del segmento de la recta tangente comprendido entre los ejes de coordenadas.

6.- ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x}{x+1}$ pasan por el punto $(1, 2)$?

7.- Determinar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ y son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

8.- Estudiar la derivabilidad, en su campo de definición, de las siguientes funciones:

8.1.- $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

8.2.- $f(x) = |\log(1+x)|$, $x \in (-1, \infty)$.

8.3.- $f(x) = |x|^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

8.4.- $f(x) = (x-2)\sqrt{|x-2|}$, $x \in \mathbb{R}$.

8.5.- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(|x|)}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

8.6.- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

9.- Demostrar que la función $y = \log\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ satisface en su campo de definición la igualdad

$$xy' + 1 = \frac{1}{1+x}.$$

10.- Demostrar que la función $y = e^{\alpha \operatorname{arcsen}(x)}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, satisface en su campo de definición la igualdad

$$(1-x^2)y'' - xy' - \alpha^2 y = 0.$$

11.- Sean a, b, c, d, m números reales. Demostrar que la función

$$y = ae^{mx} + be^{-mx} + c\cos(mx) + d\operatorname{sen}(mx)$$

satisface en $\mathbb{R}$ la igualdad

$$y^{(4)} = m^4\, y.$$

12.- Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $(0,\infty)$ a valores estrictamente positivos. Si $x \in (0,\infty)$, calcular

$$\lim_{h\to 0} \log_{\frac{x+h}{x}} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right).$$

13.- Calcular la derivada de las funciones definidas por las expresiones siguientes, en sus dominios de definición:

13.1.- $\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}) - \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\right)$

13.2.- $\log\left(\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$

13.3.- $\log\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)\right)\right)$

13.4.- $(x^3+1)^{\operatorname{sen}(x)}$

13.5.- $\left(x^2 e^{3x}\cos(2x)\right)^x$

13.6.- $\sqrt[3]{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^4}$

13.7.- $\left(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arcsen}(x)\right)^n$

13.8.- $\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$

13.9.- $\log_5\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+\cos^2(x)}\right)$

13.10.- $\exp\left(\sqrt{\log(5x^2+7x+10)}\right)$

13.11.- $\sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{Tgh}(x)}{1-\operatorname{Tgh}(x)}}$

13.12.- $x\operatorname{arcsen}\left(\log(x)\right)$

13.13.- $\operatorname{sen}(x)\, e^{\operatorname{tg}(x)}$

14.- Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, y $f(x) = \cos^n(x)\,\cos(nx)$, $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que se verifica que

$$f'(x) = -n\cos^{n-1}(x)\,\mathrm{sen}((n+1)x)\,.$$

15.- Determinar la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

15.1.- $f(x) = x^2 e^{4x}$

15.2.- $f(x) = (x^3+1)\cos(x)$

15.3.- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

15.4.- $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

15.5.- $f(x) = x^2\,\mathrm{sen}(2x)$

16.- Probar que si f es un polinomio de grado n y la ecuación $f(x)=0$ tiene n raíces simples, entonces la ecuación $f'(x)=0$ tiene exactamente $n-1$ raíces simples.

17.- Sean f y g funciones derivables en $\mathbb{R}$, tales que

$$g(0) = g(1) = 0 \qquad \text{y} \qquad f'(x)\,g(x) + f(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Probar que existen infinitos puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 1$.

18.- Sean a y b números reales con $a > 0$. Demostrar que el polinomio

$$P(x) = x^3 + ax + b$$

tiene una única raíz real.

19.- Sean $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ y $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$. Demostrar que para todo $x \in (0,1]$ se tiene que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}.$$

¿Contradice este hecho el teorema de Cauchy del valor medio?

20.- Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (3-x^2)/2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 1/x & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Estudiar si existe un punto $c \in (0,2)$ tal que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$. ¿Cuántos puntos $c \in (0,2)$ verifican la igualdad anterior?

21.- Probar las siguientes desigualdades:

21.1.- Para $x \in (0,1)$, $\operatorname{arcsen}(x) < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

21.2.- Para $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1+x} < \log(1+x) - \log(x) < \frac{1}{x}\,.$$

21.3.- Si $x \geq 0$, $\operatorname{Tgh}(x) \leq x \leq \operatorname{Sh}(x)$.

21.4.- Si $0 < \alpha < 1$, para cada número natural n se verifica que

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}\,.$$

21.5.- Si $x > 0$, $e^x > 1 + \log(1+x)$.

22.- Calcular:

22.1.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big((x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - x\operatorname{arctg}(x)\Big)$.

22.2.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left((x+1)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+1}\right) - x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

23.- Calcular los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital:

23.1.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \big(ae^x + P(x)\big)$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y P es un polinomio.

23.2.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \big(\log(x) - x\big)$

23.3.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\big(2^{1/x} - 1\big)$

23.4.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \log(x)\log(1-x)$

23.5.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}\right)$

23.6.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^3 \log(x)$

23.7.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1/x)^{\operatorname{tg}(x)}$

23.8.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$

24.- Calcular aproximaciones decimales de $\operatorname{sen}(6^{\text{o}})$ con un error menor que $2\cdot 10^{-4}$, y de $\sqrt[3]{7}$ con un error menor que 10^{-4}.

25.- Calcular los polinomios de Taylor siguientes:

25.1.- De orden 4 en $x = 0$ para la función $f(x) = \log(e + x)$.

25.2.- De orden 3 en $x = 5$ para la función $f(x) = \sqrt[3]{3+x}$.

25.3.- De orden 4 en $x = 0$ para la función $f(x) = \dfrac{x}{\cos(x)}$.

25.4.- De orden 4 en $x = 0$ para la función $f(x) = 1 - \cos(x) + \log\big(\cos(x)\big)$.

25.5.- De orden 3 en $x = \dfrac{\pi}{4}$ para la función $f(x) = \log\big(\operatorname{tg}(x)\big)$.

26.- Calcular los límites siguientes utilizando desarrollos de Taylor:

26.1.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}(2\,x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$

26.2.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(x^2) - \operatorname{sen}^2(x^3)}{x^{10}}$

26.3.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - \operatorname{arcsen}(x^2)}{x^4}$

26.4.- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \operatorname{tg}(\pi\, x/4)}$

26.5.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\alpha\, x) - \alpha\operatorname{tg}(x)}{\alpha\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(\alpha\, x)}$

26.6.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\big(\operatorname{sen}(x) - x\big)^4}{\big(\log(x+1) - x\big)^6}$

27.- Calcular los extremos de la función $f(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos(x)$.

28.- Estudiar y representar gráficamente las siguientes funciones:

28.1.- $y = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

28.2.- $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

28.3.- $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$

28.4.- $y = \dfrac{\log(x)}{x}$

28.5.- $y = x^{1/x}$

28.6.- $y = (x-1)\,\sqrt[3]{x^2}$

28.7.- $y = x\,e^{1/x}$

28.8.- $y = \log(\cos(x)),\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$

28.9.- $y = -\dfrac{1}{4}x^2\log(x)$

28.10.- $y = \operatorname{Sh}^2(x) + \operatorname{Ch}^2(x)$

29.- Un canal abierto, de fondo horizontal y cuyas paredes laterales tienen una inclinación de 45°, ha de tener una sección de 12m^2. Determinar las dimensiones de la sección que hacen mínimo el perímetro que se encuentra en contacto con el fluido.

30.- Una ventana está formada por un rectángulo y un triángulo isósceles cuya base es el lado superior del rectángulo y cuya altura es igual a $3/8$ de la longitud de la base. Si el perímetro de la ventana es de 9m, determinar las dimensiones de los lados para que el flujo de luz sea máximo.

31.- Una fábrica de cajas de cartón dispone de láminas rectangulares de lados a y b. Las cajas (sin tapa) se construyen eliminando de las esquinas sendos cuadrados de lado x. Determinar la longitud de x para que el volumen de la caja sea máximo.

32.- Dada la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, determinar las longitudes de los lados del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse, teniendo sus lados paralelos a los ejes.

33.- Un triángulo isósceles de perímetro 50 metros gira alrededor de la altura relativa al lado no igual, engendrando un cono. Determinar las longitudes de los lados del triángulo para que el cono tenga volumen máximo.

34.- En una circunferencia de radio r se consideran dos ángulos consecutivos y complementarios. Hallar el valor máximo de la suma de sus respectivas cuerdas.

35.- Se sabe que el precio de un diamante es proporcional al cubo de su peso. Demostrar que al partir un diamante en dos partes se deprecia, y averiguar cómo ha de partirse para que la depreciación sea máxima.

36.- Se desea construir un sólido, de volumen prefijado, formado por un cilindro rematado por una semiesfera. Determinar las dimensiones de dicho sólido para que tenga la menor superficie posible.

37.- De un círculo de papel se recorta un sector circular de ángulo central α y se forma con el papel sobrante un cucurucho. Hallar el valor de α para el que el cucurucho (de forma cónica) tiene volumen máximo.

38.- Se considera la parábola $y = 4 - x^2$. Determinar los puntos de dicha parábola más cercanos al punto $(0, 1)$.

39.- Una cuerda de 1 metro de longitud se corta en dos partes para construir un cuadrado con una y una circunferencia con la otra. Determinar cómo se ha de realizar el corte para que la suma de las áreas de ambas figuras sea mínima.

§ 5 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.- $a = 2$, $b = 0$.

2.- $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$.

3.- Comprobar que $y'(x)$ no vale 5 en ningún punto.

4.- Si $\alpha = 1$, f no es derivable en $x = 0$; si $\alpha > 1$, $f'(0) = 0$.

5.- La recta tangente a la hipérbola en $(x_0, c/x_0)$ corta a los ejes en los puntos $(2x_0, 0)$ y $(0, 2c/x_0)$, respectivamente.

6.- Dos, las trazadas en los puntos de abscisa $x_1 = -2 + \sqrt{3}$ y $x_2 = -2 - \sqrt{3}$.

7.- Hay dos soluciones, $y = 11x - 25$ é $y = -x - 1$.

8.1.- Derivable en cada punto $x \neq 0$; no derivable en 0.
8.2.- Derivable en $(-1, 0) \cup (0, \infty)$; no derivable en 0.
8.3.- Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; no derivable en 0.
8.4.- Derivable en $\mathbb{R}$ (en $x = 0$ usar la definición de derivada).
8.5.- Derivable en $\mathbb{R}$ (en $x = 0$ usar la definición de derivada).
8.6.- Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; es continua en 0, $f'(0^+) = 0$, $f'(0^-) = 1$.

12.- El límite es $\dfrac{x\, f'(x)}{f(x)}$. Recordar que $\log_a(b) = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$ para poner

$$\log_{\frac{x+h}{x}} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right) = \frac{\log\big(f(x+h)\big) - \log\big(f(x)\big)}{\log(x+h) - \log(x)}.$$

13.1.- 0. **13.2.-** $\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$. **13.3.-** $\dfrac{1}{x\,(x^2-1)}$.

13.4.- $(x^3+1)^{\operatorname{sen}(x)} \left(\cos(x)\log(x^3+1) + \operatorname{sen}(x)\, \frac{3\,x^2}{x^3+1}\right)$.

13.5.- $\big(x^2 e^{3x} \cos(2\,x)\big)^x \Big(\log\big(x^2 e^{3x}\cos(2\,x)\big) + 2 + 3\,x - 2\,x\ \operatorname{tg}(2\,x)\Big)$.

13.6.- $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{1 + x\, e^{\sqrt{x}}}\; e^{\sqrt{x}}\big(2 + \sqrt{x}\big)$.

13.7.- $n\,\big(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arcsen}(x)\big)^{n-1} \left(\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

13.8.- $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)}} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

13.9.- $\dfrac{-\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{\log(5)\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+\cos^2(x)}\right)\big(2 + \cos^2(x)\big)\sqrt{1+\cos^2(x)}}$.

13.10.- $\exp\left(\sqrt{\log(5x^2+7x+10)}\right) \dfrac{1}{2\sqrt{\log(5x^2+7x+10)}}\, \dfrac{10\,x+7}{5x^2+7x+10}$.

13.11.- $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+\operatorname{Tgh}(x)}{1-\operatorname{Tgh}(x)}\right)^{-3/4} \dfrac{2 + 2\ \operatorname{Tgh}(x)}{1 - \operatorname{Tgh}(x)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+\operatorname{Tgh}(x)}{1-\operatorname{Tgh}(x)}\right)^{1/4} = \dfrac{1}{2}\, f(x)$.

13.12.- $\operatorname{arcsen}\big(\log(x)\big) + \dfrac{1}{\sqrt{1-\log(x)^2}}$.

13.13.- $\cos(x)\, e^{\operatorname{tg}(x)} + \operatorname{sen}(x)\, e^{\operatorname{tg}(x)} \dfrac{1}{\cos^2(x)} = e^{\operatorname{tg}(x)} \dfrac{\cos^3(x) + \operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$.

14.- Utilizar que $\operatorname{sen}(x)\, \cos(nx) + \cos(x)\, \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}\big((n+1)\, x\big)$.

15.1.- Por la fórmula de Leibnitz, para cada $n \geq 4$ se tiene que

$$f^{n)}(x) = 4^{n-2} e^{4x} \big(16\, x^2 + 8\, n\, x + n(n-1)\big).$$

15.2.- Usar la fórmula de Leibnitz:

$$\begin{aligned} f^{n)}(x) = {} & (x^3+1)\, \cos(x + n\frac{\pi}{2}) + 3\, n\, x^2\, \cos(x + (n-1)\frac{\pi}{2}) \\ & + 3\, n(n-1)\, x\, \cos(x + (n-2)\frac{\pi}{2}) + n(n-1)(n-2)\, \cos(x + (n-3)\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

15.3.- Antes de derivar, escribir $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$.

15.4.- Poner $f(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\Big)$.

16.- Si $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ son las n raíces del polinomio f, aplicar el teorema de Rolle a f en el intervalo $[r_i, r_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

17.- Evaluar la función $f'(x)\, g(x) + f(x)$ en $r_1 = 0$ y en $r_2 = 1$, para obtener que $f(0) = f(1) = 1$; en virtud del teorema de Rolle, existe $r_3 \in (r_1, r_2)$ tal que $f'(r_3) = 0$, y por tanto $f(r_3) = 1$. Razonar por recurrencia.

18.- La existencia de al menos una raíz se deduce por el teorema de Darboux; la unicidad de la misma se debe al crecimiento estricto de P, pues $P'(x) > 0$ para todo x.

19.- No; el punto $\xi \in (0,1)$ que proporciona el teorema de Cauchy resulta ser un cero común de f' y g' (concretamente, $\xi = (3 + \sqrt{33})/12$), de modo que no es lícito escribir la igualdad del teorema en forma de cociente.

20.- El teorema de Lagrange garantiza la existencia de (al menos) un valor c bajo las condiciones pedidas. De hecho, hay dos soluciones, $c_1 = 1/2$ y $c_2 = \sqrt{2}$.

21.1.- Por el teorema de los incrementos finitos de Lagrange,

$$\operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(x) - \operatorname{arcsen}(0) = x\, \frac{1}{\sqrt{1 - {c_x}^2}}, \quad 0 < c_x < x.$$

21.2.- Mediante sendas aplicaciones del teorema de los incrementos finitos,

$$\log(1+x) = \log(1+x) - \log(1) = \frac{x}{1 + c_x}, \quad 1 < c_x < x.$$

$$\log(1+x)-\log(x)=\frac{1}{d_x}, \quad x<d_x<x+1.$$

21.3.- Análogamente,

$$\mathrm{Tgh}(x)=\mathrm{Tgh}(x)-\mathrm{Tgh}(0)=\frac{x}{\mathrm{Ch}^2(c_x)}, \quad 0<c_x<x.$$

$$\mathrm{Sh}(x)=\mathrm{Sh}(x)-\mathrm{Sh}(0)=x\,\mathrm{Ch}(d_x), \quad 0<d_x<x.$$

21.4.- Aplicando el teorema de Lagrange a $f(x)=x^\alpha$ en $[n,n+1]$, se deduce que

$$(n+1)^\alpha-n^\alpha=\alpha\,{c_n}^{\alpha-1}, \quad n<c_n<n+1.$$

21.5.- Por el teorema del valor medio de Cauchy,

$$(e^x-e^0)\frac{1}{1+c_x}=(\log(1+x)-\log(1+0))e^{c_x}, \quad 0<c_x<x.$$

22.1.- Por el teorema de los incrementos finitos,

$$(x+1)\operatorname{arctg}(x+1)-x\operatorname{arctg}(x)=\operatorname{arctg}(c_x)+\frac{c_x}{1+{c_x}^2}, \quad x<c_x<x+1\,.$$

Notar que $\lim_{x\to\infty} c_x=\infty$. El límite es $\dfrac{\pi}{2}$.

22.2.- De forma similar,

$$(x+1)^2\operatorname{sen}\left(1/_{x+1}\right)-x^2\operatorname{sen}\left(1/_x\right)=2\,c_x\operatorname{sen}\left(1/_{c_x}\right)-\cos\left(1/_{c_x}\right), \quad x<c_x<x+1\,.$$

El límite es 1.

23.1.- $+\infty$ o $-\infty$, de acuerdo con el signo de a. **23.2.-** $-\infty$. **23.3.-** $\log(2)$.
23.4.- 0. **23.5.-** $-\infty$. **23.6.-** 0. **23.7.-** 1. **23.8.-** -1.

24.- $6^{\mathrm{o}}=\pi/30$ radianes. Usar el desarrollo de Taylor de $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ de orden n en $x_0=0$. Basta elegir $n\geq 3$.

$\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{8-1}=2\,f\left(1/8\right)$, siendo $f(x)=(1-x)^{1/3}$. Usar el desarrollo de Taylor de f de orden $n\in\mathbb{N}$ en $x_0=0$ y acotar el resto. Basta elegir $n\geq 3$.

25.1.- $T_4(f,0)(x)=1+\dfrac{x}{e}-\dfrac{x^2}{2\,e^2}+\dfrac{x^3}{3\,e^3}-\dfrac{x^4}{4\,e^4}$.

25.2.- $T_3(f,5)(x)=2+\dfrac{1}{12}\,(x-5)-\dfrac{1}{288}\,(x-5)^2+\dfrac{5}{20736}\,(x-5)^3$.

25.3.- $T_4(f,0)(x)=x+\dfrac{1}{2}\,x^3$.

25.4.- $T_4(f,0)(x)=-\dfrac{1}{8}\,x^4$.

25.5.- $T_3(f,\pi/4)(x)=2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3$.

26.- Las funciones ε siguientes tienden a cero en el punto correspondiente.

26.1.- $2\,\mathrm{tg}(x) - \mathrm{sen}(2\,x) = 2\,x^3 + x^6\varepsilon_1(x)$, $\mathrm{sen}^3(x) = x^3 + x^4\varepsilon_2(x)$, en $x_0 = 0$. El límite es 2.

26.2.- $\mathrm{sen}^3(x^2) - \mathrm{sen}^2(x^3) = \dfrac{-1}{2}\,x^{10} + x^{11}\varepsilon(x)$ en $x_0 = 0$. El límite es $\dfrac{-1}{2}$.

26.3.- $\log(1+x^2) - \mathrm{arcsen}(x^2) = \dfrac{-1}{2}\,x^4 + x^4\varepsilon(x)$ en $x_0 = 0$. El límite es $\dfrac{-1}{2}$.

26.4.- $\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5} = \dfrac{1}{64}\,(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_1(x)$,
$1 - \mathrm{tg}(\pi\,x/4) = \dfrac{-\pi}{2}\,(x-1) + (x-1)\varepsilon_2(x)$ en $x_0 = 1$. El límite es 0.

26.5.- $\mathrm{tg}(\alpha\,x) - \alpha\,\mathrm{tg}(x) = \dfrac{(\alpha^3-\alpha)}{3}\,x^3 + x^4\varepsilon_1(x)$,
$\alpha\,\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(\alpha\,x) = \dfrac{(\alpha^3-\alpha)}{6}\,x^3 + x^4\varepsilon_2(x)$ en $x_0 = 0$. El límite es 2.

26.6.- $\mathrm{sen}(x) - x = \dfrac{-1}{6}\,x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$,
$\log(x+1) - x = \dfrac{-1}{2}\,x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ en $x_0 = 0$. El límite es $\dfrac{4}{81}$.

27.- $f'(x) = 0$ si, y sólo si $x = 0$. f presenta en $x_0 = 0$ su mínimo absoluto.

29.- Sean b la anchura de la base y h la profundidad del canal. El valor de h que hace mínima la función perímetro $p(h) = \dfrac{12}{h} + (\sqrt{8}-1)\,h$ es $h_0 = \sqrt{12/(\sqrt{8}-1)}$.

30.- El área de la ventana es $A(x) = \dfrac{3\,x\,(24-5\,x)}{16}$, siendo x la longitud de la base del rectángulo. Las dimensiones buscadas son $x_0 = 12/5$ (longitud de la base del rectángulo), $y_0 = 9/5$ (altura del rectángulo), $h_0 = 9/10$ (altura del triángulo).

31.- $V(x) = (a-2\,x)(b-2\,x)\,x$. El volumen alcanza su máximo absoluto cuando $x = \dfrac{1}{6}\big(a+b-\sqrt{a^2+b^2-a\,b}\big)$.

32.- Cada punto de la elipse en el primer cuadrante, (x,y), determina un rectángulo de área $A(x) = \dfrac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$. El valor de A es máximo si $x = a/\sqrt{2}$, con lo que los lados del rectángulo miden $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$.

33.- La altura relativa al lado no igual es también la altura del cono h, en función de la cual se expresa el volumen del cono como

$$V(h) = \frac{\pi}{3}h\Big(\frac{25}{2} - \frac{h^2}{50}\Big)^2.$$

Éste es máximo cuando $h = 5\sqrt{5}$.

34.- La suma de las longitudes de las cuerdas viene dada, en función del valor α del menor de los dos ángulos, por

$$L(\alpha) = 2r\Big(\operatorname{sen}\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) + \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\Big)\Big), \qquad \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

y su valor máximo es $4r \operatorname{sen}(\pi/8)$.

35.- La depreciación es máxima cuando se divide el diamante en dos partes iguales.

36.- La superficie viene dada en función del radio de semiesfera y cilindro como

$$S(r) = \frac{2V_0}{r} + \frac{5\pi}{3} r^2,$$

siendo V_0 el volumen fijo total. El mínimo se alcanza cuando $r = \sqrt[3]{\frac{3V_0}{5\pi}}$.

37.- Si R es el radio del círculo de papel, el volumen del cucurucho es

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} R^3 \Big(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2 \sqrt{1 - (1 - \frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2}, \qquad \alpha \in (0, 2\pi),$$

que es máximo cuando $\alpha = 2\pi\Big(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\Big)$.

38.- Los puntos de la parábola de abscisas $\frac{\sqrt{10}}{2}$ y $-\frac{\sqrt{10}}{2}$, respectivamente.

39.- El área total es, en función del radio r de la circunferencia,

$$A(r) = \frac{1}{16} - \frac{\pi}{4} r + \Big(\frac{\pi^2}{4} + \pi\Big) r^2,$$

y su valor mínimo se alcanza cuando $r = 1/(2\pi + 8)$.

APÉNDICE AL

TEMA 3 FUNCIONES ELEMENTALES

Una vez que disponemos de la herramienta necesaria (concretamente de los resultados sobre continuidad y derivabilidad de funciones de variable real), hacemos un compendio de las propiedades más relevantes de las denominadas *funciones elementales (del Análisis Matemático).*

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

§ 1 Función Exponencial de base *e*.

Definición 1.1.- Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la *exponencial* de x como el número

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n ,$$

que también se denota por "$\exp(x)$".

Propiedades 1.2.-

1.2.1.- $\exp(x + y) = \exp(x)\ \exp(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

1.2.2.- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$ y $\exp(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

1.2.3.- $\exp(-x) = \exp(x)^{-1} = {}^1/_{\exp(x)}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

1.2.4.- $1 + x \leq \exp(x) \leq 1 + x\ \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

1.2.5.- $\exp(x) > 1$ si $x > 0$; $0 < \exp(x) < 1$ si $x < 0$.

Proposición 1.3.- La función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $\exp(x) > \exp(y)$.

Proposición 1.4.- La función exp es continua en todo $\mathbb{R}$.

Proposición 1.5.- exp es una biyección de $\mathbb{R}$ en el intervalo $(0, \infty)$, en particular

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty\,.$$

Proposición 1.6.- La función exp es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, y

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

§ 2 Función Logaritmo Natural.

Definición 2.1.- La función inversa de $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (ver 1.5) se denomina *logaritmo natural* o *neperiano* y se denota por “log” o “ln”.

Propiedades 2.2.-

2.2.1.- $\log(x\,y) = \log(x) + \log(y)$ para todos $x, y > 0$.

2.2.2.- $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$ y $\log(x) > 0$ para cada $x > 1$.

2.2.3.- $\log(1/x) = -\log(x)$ para cada $x > 0$.

2.2.4.- $\log(x) < 0$ si $0 < x < 1$.

2.2.5.- $1 - 1/x \leq \log(x) \leq x - 1$ para cada $x > 0$.

Proposición 2.3.- La función $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log(x) > \log(y)$.

Proposición 2.4.- La función log es continua en $(0, \infty)$.

Proposición 2.5.- log es una biyección del intervalo $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$, en particular

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty\,.$$

Proposición 2.6.- La función log es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0, \infty)$, y

$$\log'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{para cada } x > 0\,.$$

§ 3 Función Exponencial de base arbitraria.

Definición 3.1.- Sea a un número real con $a > 0$ y $a \neq 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la *exponencial de base* a de x, y se denota por “a^x”, cómo el número real

$$a^x = \exp\big(x\,\log(a)\big)\,.$$

Propiedades 3.2.-

3.2.1.- $a^{x+y} = a^x\, a^y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

3.2.2.- $a^0 = 1$ y $a^x > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

3.2.3.- $a^{-x} = {}^1\!/_{a^x}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

3.2.4.- Si $a > 1$, $a^x > 1$ para $x > 0$ y $0 < a^x < 1$ para $x < 0$.

3.2.5.- Si $0 < a < 1$, $0 < a^x < 1$ para $x > 0$ y $a^x > 1$ para $x < 0$.

Proposición 3.3.- Si $a > 1$, la función $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $a^x > a^y$.

Si $0 < a < 1$, la función $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $a^x < a^y$.

Proposición 3.4.- La función a^x es continua en todo $\mathbb{R}$.

Proposición 3.5.- a^x es una biyección de $\mathbb{R}$ en el intervalo $(0, \infty)$, en particular:

Si $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$.

Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$.

Proposición 3.6.- La función a^x es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$; además,

$$(a^x)' = \log(a)\, a^x \,.$$

§ 4 Función Logaritmo de base arbitraria.

Definición 4.1.- Si a es un número real con $a > 0$, $a \neq 1$, la función inversa de $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (ver 3.5) se denomina *logaritmo en base a* y se denota por "$\log_a$".

Propiedades 4.2.-

4.2.1.- $\log_a(x\, y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ para todos $x, y > 0$.

4.2.2.- $\log_a(1) = 0$ y $\log_a(a) = 1$.

4.2.3.- $\log_a({}^1\!/_x) = -\log_a(x)$ para cada $x > 0$.

4.2.4.- Si $a > 1$, $\log_a(x) > 0$ para cada $x > 1$ y $\log_a(x) < 0$ para $0 < x < 1$.

4.2.5.- Si $0 < a < 1$, $\log_a(x) < 0$ para cada $x > 1$ y $\log_a(x) > 0$ para $0 < x < 1$.

4.2.6.- Si $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, entonces

$$\log_b(x) = \log_b(a)\, \log_a(x) \quad \text{para cada } x > 0\,.$$

En particular,

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \text{para cada } x > 0\,.$$

Proposición 4.3.- Si $a > 1$, la función $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log_a(x) > \log_a(y)$.

Si $0 < a < 1$, la función $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log_a(x) < \log_a(y)$.

Proposición 4.4.- La función $\log_a$ es continua en $(0, \infty)$.

Proposición 4.5.- $\log_a$ es una biyección del intervalo $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$, en particular:

Si $a > 1$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty \quad$ y $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \log_a(x) = \infty\,.$

Si $0 < a < 1$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = \infty \quad$ y $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \log_a(x) = -\infty\,.$

Proposición 4.6.- La función $\log_a$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0, \infty)$; además,

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{\log(a)}\,\frac{1}{x} \quad \text{para cada } x > 0\,.$$

§ 5 Función Potencial.

Definición 5.1.- Dado un número real a, para cada $x > 0$ se define la *potencia de base x y exponente a* por

$$x^a = \exp\big(a\, \log(x)\big)\,.$$

Propiedades 5.2.-

5.2.1.- $(x\,y)^a = x^a\, y^a$ para todos $x, y > 0$.

5.2.2.- $\left(x^a\right)^b = x^{a\,b}$ y $x^a\, x^b = x^{a+b}$ para cada $x > 0$ y todos $a, b \in \mathbb{R}$.

5.2.3.- Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $x^a = x\, x \overset{a \text{ veces}}{\cdots} x$ para cada $x > 0$.

5.2.4.- Si $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, entonces $x^a = \dfrac{1}{x\, x \overset{|a| \text{ veces}}{\cdots} x}$ para cada $x > 0$.

Proposición 5.3.- Si $a > 0$, la función $x^a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $x^a > y^a$.

Si $a < 0$, la función $x^a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $x^a < y^a$.

Proposición 5.4.- La función x^a es continua en $(0, \infty)$.

Proposición 5.5.- Si $a \neq 0$, x^a es una biyección de $(0, \infty)$ en $(0, \infty)$, en particular:

Si $a > 0$, $\quad \lim_{x \to 0} x^a = 0 \quad$ y $\quad \lim_{x \to \infty} x^a = \infty\,.$

Si $a < 0$, $\quad \lim_{x \to 0} x^a = \infty \quad$ y $\quad \lim_{x \to \infty} x^a = 0\,.$

Proposición 5.6.- La función x^a es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0, \infty)$, además

$$(x^a)' = a\, x^{a-1}\,.$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

§ 6 Funciones seno y coseno.

Definición 6.1.- Si $x \in \mathbb{R}$, se suponen definidos mediante las consideraciones geométricas habituales los valores

$$\cos(x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(x),$$

denominados respectivamente *coseno* y *seno* de x.

Proposición 6.2.- Si $x \in \mathbb{R}$ se verifica:

i) $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$.

ii) $\cos(x) = \cos(-x)$.

iii) $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$.

iv) $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$.

Propiedades 6.3.- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

6.3.1.- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

6.3.2.- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.

6.3.3.- $\operatorname{sen}(2\,x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

6.3.4.- $\cos(2\,x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$.

6.3.5.- $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2\,x)}{2}$.

6.3.6.- $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2\,x)}{2}$.

6.3.7.- $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

6.3.8.- $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$.

6.3.9.- $\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$.

6.3.10.- $\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

6.3.11.- $\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

6.3.12.- $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

6.3.13.- $\cos(x)-\cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

Proposición 6.4.- Las funciones $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son continuas.

Proposición 6.5.- Las funciones $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}$; además,

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) \qquad \text{y} \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\,.$$

Proposición 6.6.- $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones periódicas, de periodo $2\,\pi$.

Propiedades 6.7.-

6.7.1.- $\cos(0)=1$ y $\operatorname{sen}(0)=0$.

6.7.2.- $\cos\left({}^{\pi}\!/_2\right)=0$ y $\operatorname{sen}\left({}^{\pi}\!/_2\right)=1$.

6.7.3.- $\cos(\pi)=-1$ y $\operatorname{sen}(\pi)=0$.

6.7.4.- $\operatorname{sen}(x+\pi)=-\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

6.7.5.- $\operatorname{sen}\left({}^{\pi}\!/_2-x\right)=\cos(x)$ y $\cos\left({}^{\pi}\!/_2-x\right)=\operatorname{sen}(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

6.7.6.- $\operatorname{sen}(x)=0$ si, y sólo si, $x=k\,\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

6.7.7.- $\cos(x)=0$ si, y sólo si, $x={}^{\pi}\!/_2+k\,\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

§ 7 Funciones inversas de seno y coseno.

Proposición 7.1.- $\text{sen}: \left[-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\right] \to [-1,1]$ es una biyección creciente. La función inversa se denomina *arco-seno* y se denota por "arcsen".

Proposición 7.2.- $\text{arcsen}: (-1,1) \to \left(-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\right)$ es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$. Su derivada es

$$\text{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para cada } x \in (-1,1).$$

Proposición 7.3.- $\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$ es una biyección decreciente. La función inversa se denomina *arco-coseno* y se denota por "arccos".

Proposición 7.4.- $\arccos: (-1,1) \to (0,\pi)$ es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$. Su derivada es

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para cada } x \in (-1,1).$$

§ 8 Funciones secante, tangente, cosecante y cotangente.

Definición 8.1.- Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\,\pi + {}^{\pi}/_{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, se definen

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \text{y} \qquad \text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)},$$

que reciben el nombre de *secante* y *tangente* de x, respectivamente.

Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se definen

$$\text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)} \qquad \text{y} \qquad \text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)},$$

denominadas *cosecante* y *cotangente* de x, respectivamente.

Proposición 8.2.- Si $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\,\pi + {}^{\pi}/_{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, se verifica que:

i) $1 + \text{tg}^2(x) = \sec^2(x)$.

ii) $\sec(x) = \sec(-x)$, $\text{tg}(x) = -\,\text{tg}(-x)$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se verifica que:

iii) $1 + \text{cotg}^2(x) = \text{cosec}^2(x)$.

iv) $\text{cosec}(x) = -\,\text{cosec}(-x)$, $\text{cotg}(x) = -\,\text{cotg}(-x)$.

Propiedades 8.3.- Las siguientes igualdades se verifican para todos los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ para los que tengan sentido:

8.3.1.- $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$. **8.3.2.-** $\operatorname{tg}(2\,x) = \dfrac{2\,\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$.

8.3.3.- $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{tg}\left(\pi/2 - x\right) = \operatorname{cotg}(x)$.

Proposición 8.4.- Las funciones sec, tg, cosec y cotg son continuas en sus respectivos dominios de definición.

Proposición 8.5.- Las funciones sec, tg : $\mathbb{R}\setminus\{k\,\pi + \pi/2 : k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$ (en su dominio). Sus derivadas son, respectivamente,

$$\sec'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)^2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \operatorname{tg}(x)^2.$$

Proposición 8.6.- Las funciones cosec, cotg : $\mathbb{R}\setminus\{k\,\pi : k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$ (en su dominio). Sus derivadas son, respectivamente,

$$\operatorname{cosec}'(x) = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{cotg}'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)^2} = -1 - \operatorname{cotg}(x)^2.$$

Proposición 8.7.- sec y cosec son funciones periódicas de periodo $2\,\pi$; tg y cotg son funciones periódicas de periodo π.

Proposición 8.8.- tg : $\left(-\pi/2, \pi/2\right) \to \mathbb{R}$ es una biyección creciente. Su función inversa se denomina *arco-tangente* y se denota por "arctg".

Proposición 8.9.- $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\pi/2, \pi/2\right)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\,.$$

Proposición 8.10.- cotg : $(0,\pi) \to \mathbb{R}$ es una biyección decreciente. Su función inversa se denomina *arco-cotangente* y se denota por "arccotg".

Proposición 8.11.- $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\,.$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

§9 Funciones seno y coseno hiperbólicos.

Definición 9.1.- Si $x \in \mathbb{R}$ se definen

$$\mathrm{Ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2},$$
$$\mathrm{Sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2},$$

denominadas *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de x, respectivamente.

Propiedades 9.2.-

9.2.1.- $\mathrm{Ch}(0) = 1$ y $\mathrm{Sh}(0) = 0$.

9.2.2.- $\mathrm{Ch}(x) \geq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

9.2.3.- $\mathrm{Sh}(x) > 0$ si $x > 0$ y $\mathrm{Sh}(x) < 0$ si $x < 0$.

9.2.4.- $\mathrm{Sh}(x) = -\mathrm{Sh}(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

9.2.5.- $\mathrm{Ch}(x) = \mathrm{Ch}(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

9.2.6.- $\mathrm{Ch}^2(x) - \mathrm{Sh}^2(x) = 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Propiedades 9.3.- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

9.3.1.- $\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Ch}(y) + \mathrm{Ch}(x)\,\mathrm{Sh}(y)$.

9.3.2.- $\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}(x)\,\mathrm{Ch}(y) + \mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Sh}(y)$.

9.3.3.- $\mathrm{Sh}(2\,x) = 2\,\mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Ch}(x)$.

9.3.4.- $\mathrm{Ch}(2\,x) = \mathrm{Ch}^2(x) + \mathrm{Sh}^2(x)$.

9.3.5.- $\mathrm{Sh}^2(x) = \dfrac{\mathrm{Ch}(2\,x) - 1}{2}$.

9.3.6.- $\mathrm{Ch}^2(x) = \dfrac{\mathrm{Ch}(2\,x) + 1}{2}$.

Proposición 9.4.- Las funciones $\mathrm{Sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathrm{Ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas.

Proposición 9.5.- Las funciones $\mathrm{Sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathrm{Ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}$, además

$$\mathrm{Sh}'(x) = \mathrm{Ch}(x) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Ch}'(x) = \mathrm{Sh}(x) \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

§ 10 Funciones inversas del seno y coseno hiperbólicos.

Proposición 10.1.- $\mathrm{Sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una biyección creciente. La función inversa se denomina *argumento del seno hiperbólico* y se denota por "ArgSh".

Proposición 10.2.- $\mathrm{ArgSh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\mathrm{ArgSh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

Proposición 10.3.- $\mathrm{Ch} : [0,\infty) \to [1,\infty)$ es una biyección decreciente. La función inversa se denomina *argumento del coseno hiperbólico* y se denota por "ArgCh".

Proposición 10.4.- $\mathrm{ArgCh} : (1,\infty) \to (0,\infty)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\mathrm{ArgCh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{para cada } x \in (1,\infty)\,.$$

§ 11 Funciones tangente y cotangente hiperbólicas.

Definición 11.1.- Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la *tangente hiperbólica* de x por

$$\mathrm{Tgh}(x) = \frac{\mathrm{Sh}(x)}{\mathrm{Ch}(x)} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}\,.$$

Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, se define la *cotangente hiperbólica* de x por

$$\mathrm{Cotgh}(x) = \frac{\mathrm{Ch}(x)}{\mathrm{Sh}(x)} = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{\exp(x)-\exp(-x)}\,.$$

Proposición 11.2.- $\mathrm{Tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

Proposición 11.3.- $\mathrm{Tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\mathrm{Tgh}'(x) = 1 - \mathrm{Tgh}(x)^2 = \frac{1}{\mathrm{Ch}(x)^2} \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

Proposición 11.4.- $\mathrm{Cotgh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

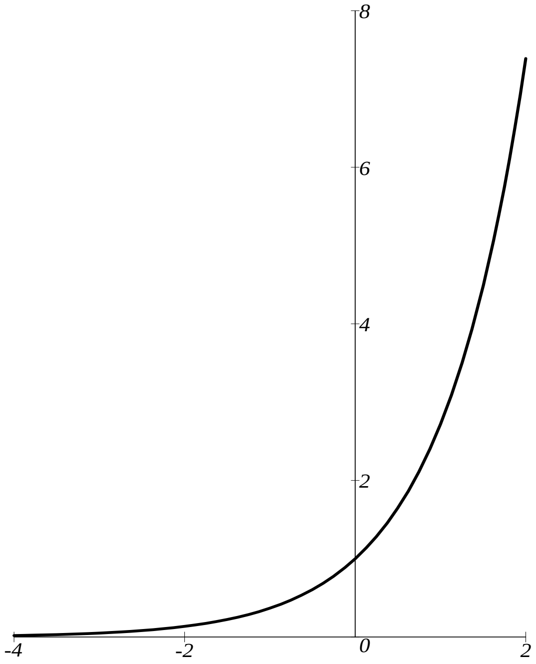
Proposición 11.5.- $\mathrm{Cotgh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\mathrm{Cotgh}'(x) = 1 - \mathrm{Cotgh}^2 = \frac{-1}{\mathrm{Sh}(x)^2} \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

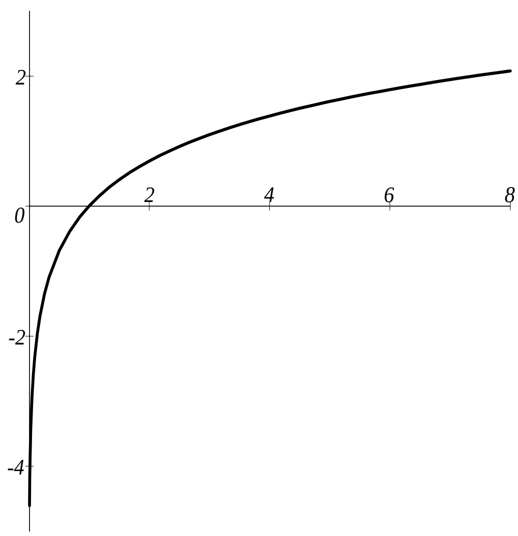
Proposición 11.6.- $\mathrm{Tgh} : \mathbb{R} \to (-1,1)$ es una biyección creciente. Su función inversa se denomina *argumento de la tangente hiperbólica* y se denota por "ArgTgh".

Proposición 11.7.- ArgTgh : $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es $\mathrm{ArgTgh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ para cada $x \in (-1, 1)$.

Exponencial: "exp(x)" ó "e^x"

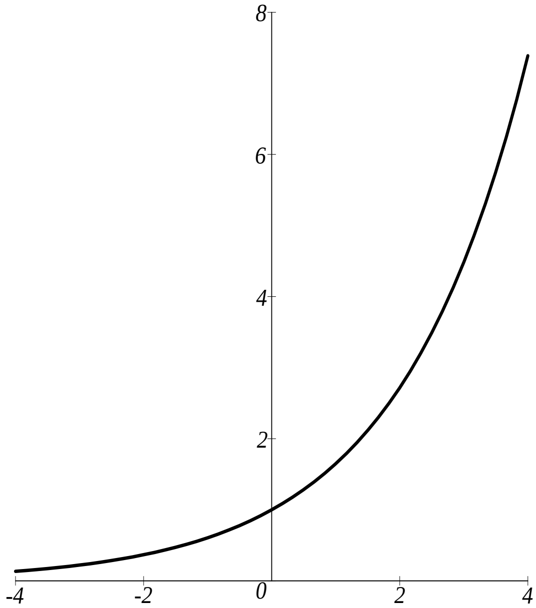


Logaritmo Natural: "log(x)" ó "ln(x)"

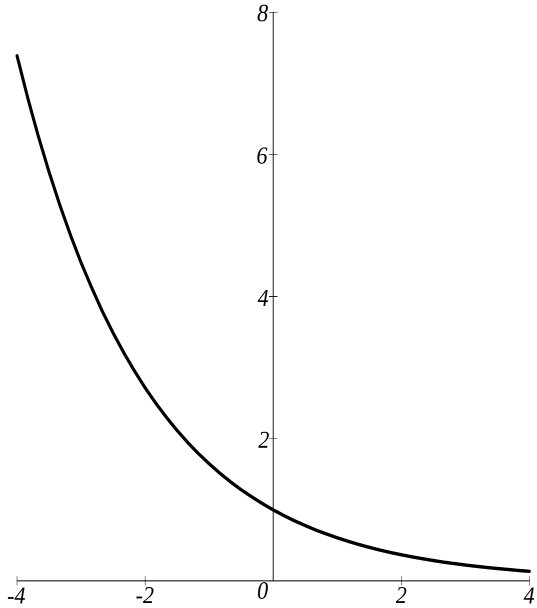


Exponenciales de base $a > 0$: “a^x”

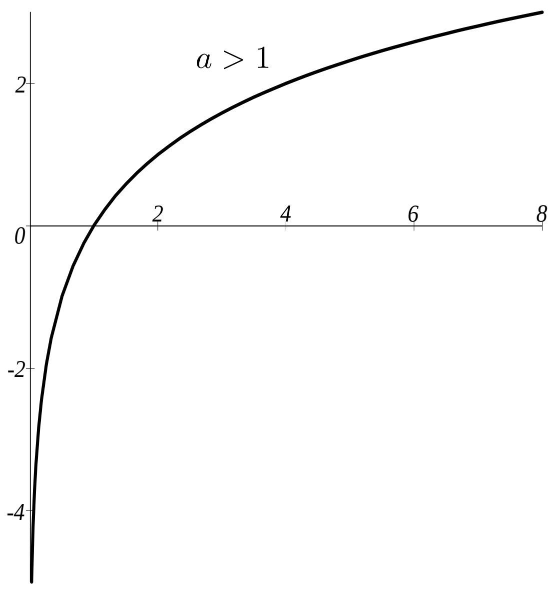
$a > 1$

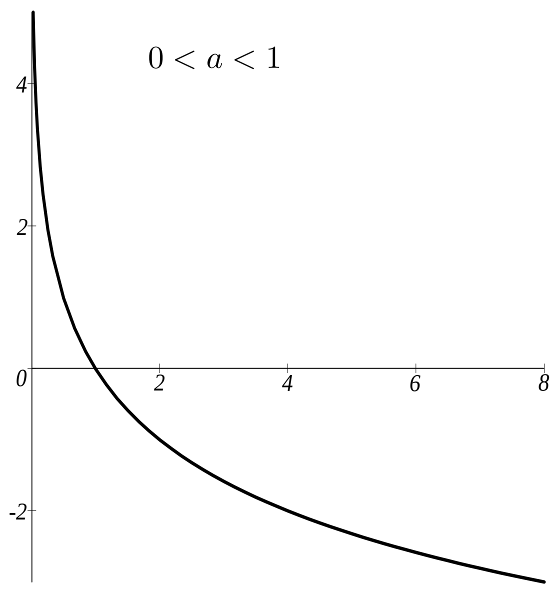


$0 < a < 1$



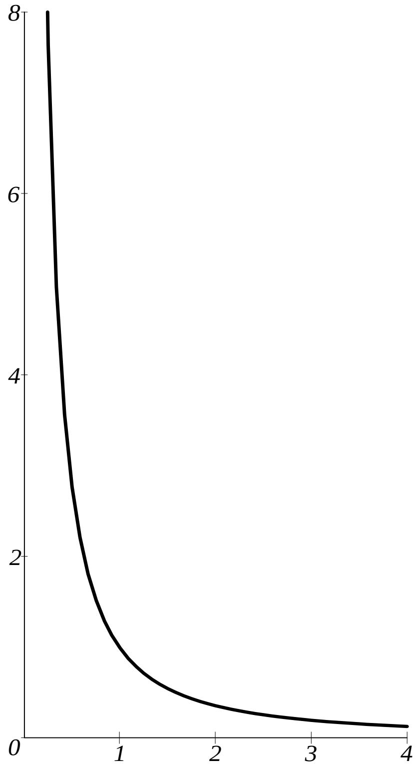
Logaritmos de base $a > 0$: “$\log_a(x)$”



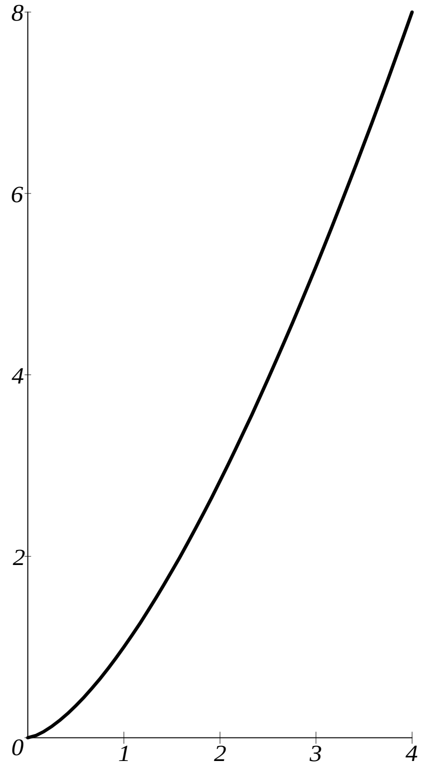


Funciones Potenciales: “x^a”

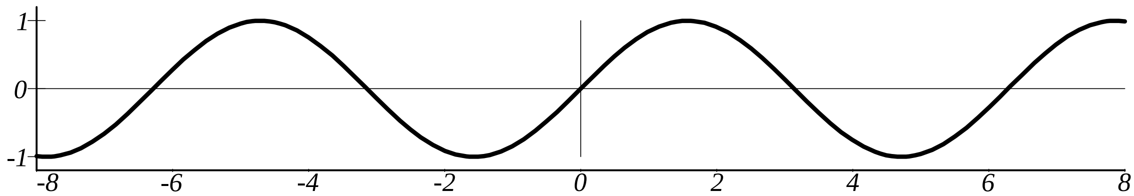
$a < 0$



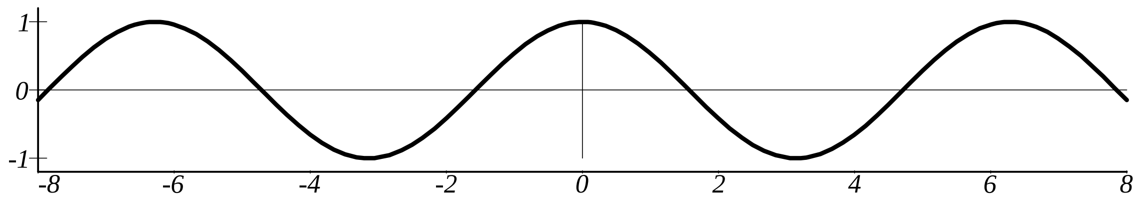
$a > 0$



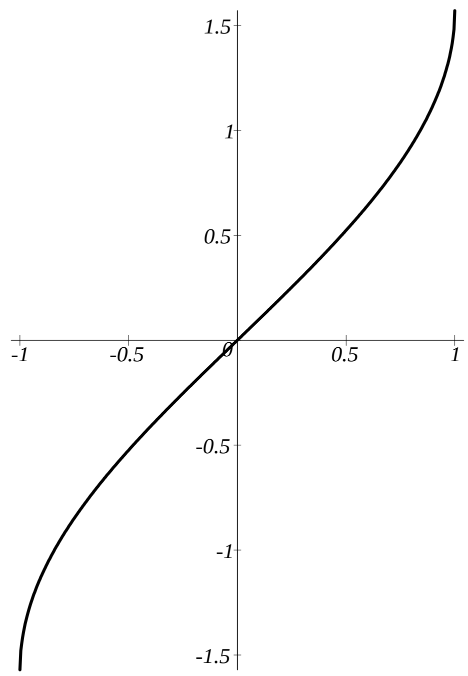
Seno: “$\mathrm{sen}(x)$”



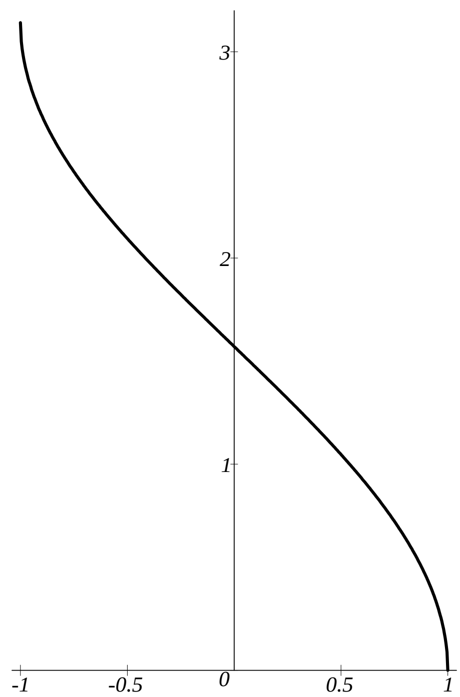
Coseno: “$\cos(x)$”



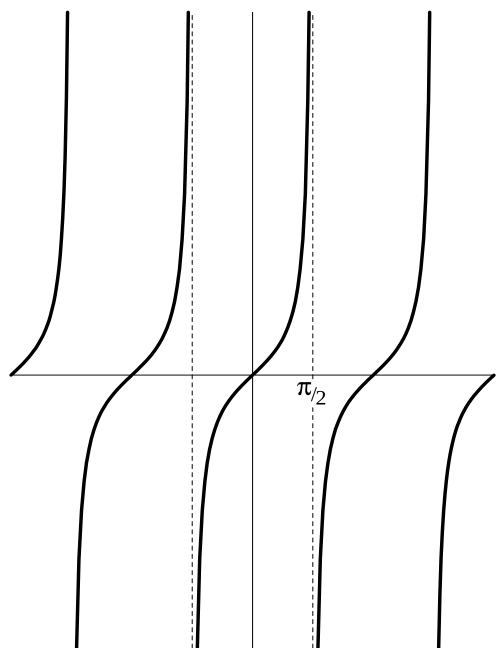
Arco seno: "arcsen(x)"



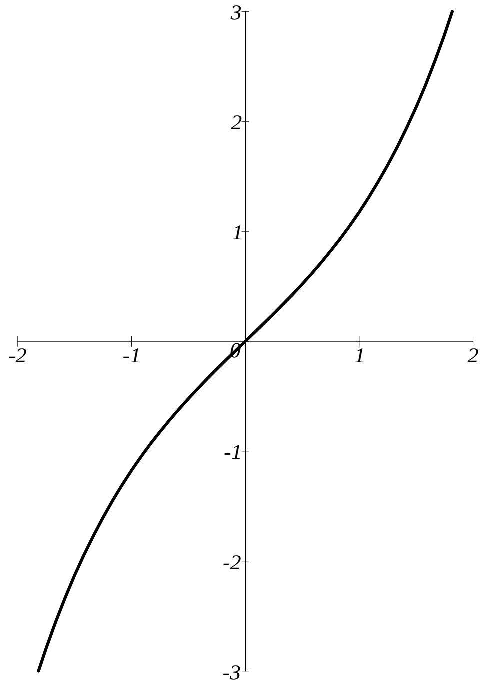
Arco coseno: "arccos(x)"



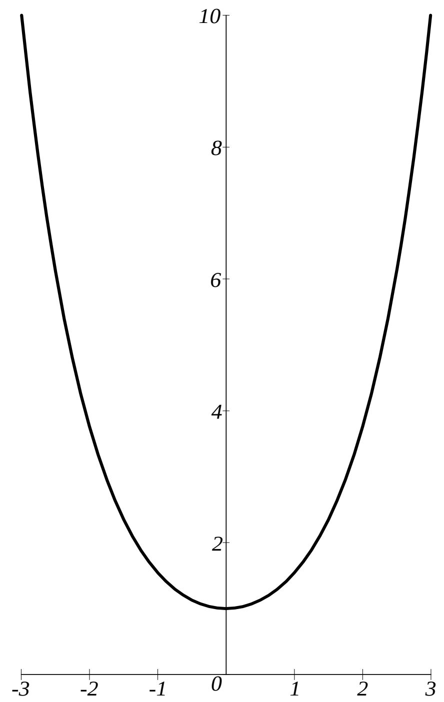
Tangente: "tg(x)"



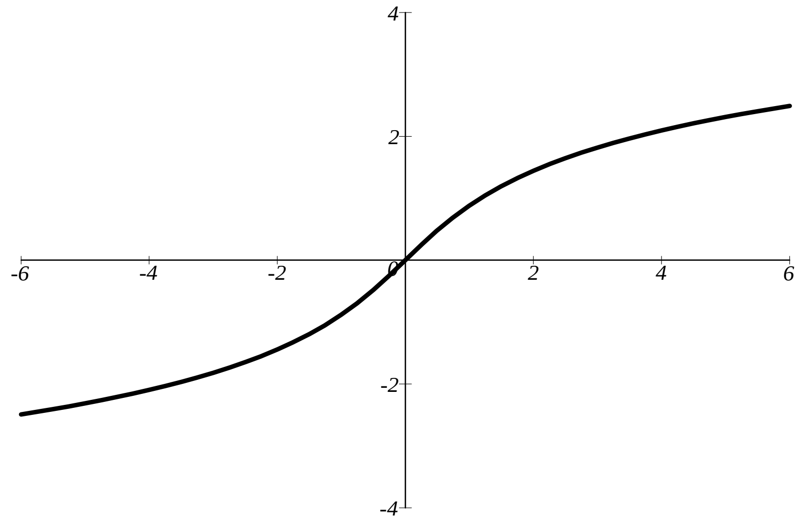
Seno Hiperbólico: “$\mathrm{Sh}(x)$”



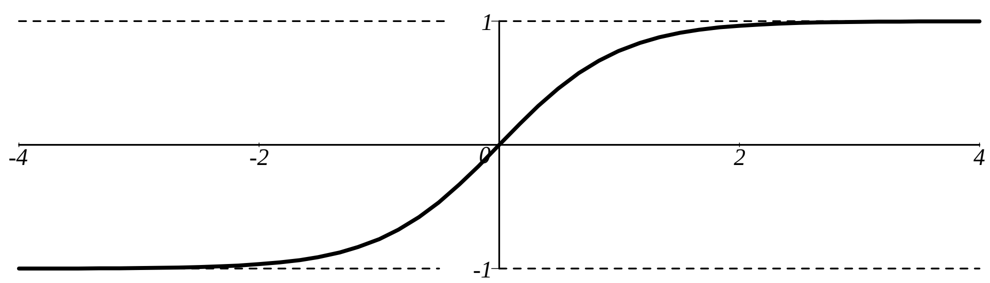
Coseno Hiperbólico: “$\mathrm{Ch}(x)$”



Argumento del Seno Hiperbólico: “ArgSh(x)”



Tangente Hiperbólica “Tgh(x)”



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES.

TEMA 4 LÍMITES Y CONTINUIDAD

El objeto del presente tema es introducir aquellas propiedades topológicas de los espacios euclídeos que serán necesarias para abordar posteriormente el Cálculo Diferencial en varias variables.

El punto de partida en el desarrollo de esta materia es el concepto de "norma", que generaliza el de valor absoluto de los números reales y permite establecer un argumento para "medir" la proximidad de los puntos de un espacio vectorial. De hecho, la recta real no es otra cosa que el caso más simple de los espacios normados que nos ocupan, y podríamos haber realizado un tratamiento único, independiente de la dimensión del espacio. El lector observará que los resultados que se exponen aquí son generalizaciones, o convenientes adaptaciones, de los que se presentaban, con el mismo objetivo, en el tema dedicado a continuidad de funciones de una variable real.

§ 1 EL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.- Para cada número natural n, sea $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las n-úplas ordenadas

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales. A x_k lo llamaremos *coordenada k-ésima de $\boldsymbol{x}$*.

Se definen la suma de elementos de $\mathbb{R}^n$ y el producto de un escalar por un elemento de $\mathbb{R}^n$ como sigue:

Para $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se define su *suma* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ por

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\,.$$

Si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y α es un número real se define su *producto* $\alpha\,\boldsymbol{x}$ por

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)\,.$$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ con estas operaciones es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Observación 1.2.- Es habitual confundir la estructura vectorial así obtenida con la estructura geométrica que se obtiene al considerar un espacio afín con espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^n$ y, abusando de la notación, referirse a "puntos" de $\mathbb{R}^n$ en lugar de vectores. Este será el criterio que seguiremos en adelante.

Proposición 1.3.- Para cada elemento $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ se define su *norma euclídea* $\|\boldsymbol{x}\|$ por

$$\|\boldsymbol{x}\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} \in [0, \infty).$$

La aplicación $\|\ \|\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ verifica las siguientes propiedades:

N1: $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si, y sólo si, $\boldsymbol{x} = 0$.

N2: $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

N3: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. (*Desigualdad triangular*)

Observación 1.4.- Cuando $n = 1$, la norma euclídea coincide con el valor absoluto definido en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.5.- La aplicación $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|,$$

verifica las siguientes propiedades:

D1: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

D2: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ si, y sólo si, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

D3: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

D4: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1.6.- Si E es un conjunto no vacío, se denomina *distancia* o *métrica* en E cualquier aplicación $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ que verifique las propiedades D1-D4.

El concepto de métrica permite abordar rigurosamente la idea de "proximidad" a la que nos referíamos anteriormente.

§ 2 TOPOLOGÍA DE LOS ESPACIOS EUCLÍDEOS.

No le será difícil al lector comprender la motivación de los conceptos que definimos en este epígrafe a partir de los conocimientos que ya posee sobre funciones de una variable.

Definición 2.1.- Sean $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Se definen la *bola abierta* de *centro* $\boldsymbol{x}$ y *radio* r como el conjunto

$$B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r\},$$

y la *bola cerrada* de *centro* $\boldsymbol{x}$ y *radio* r como el conjunto

$$\overline{B}(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq r\}.$$

Definición 2.2.- Sea E un conjunto de $\mathbb{R}^n$. Un punto $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice que es un *punto interior a* E si existe una bola abierta de centro $\boldsymbol{x}$ contenida en E. El conjunto de todos los puntos interiores de E se denomina *interior* de E y se representa por $\overset{\circ}{E}$. Es sencillo comprobar que $\overset{\circ}{E} \subset E$.

Un conjunto E de $\mathbb{R}^n$ se dice que es *abierto* si es vacío o si todos sus puntos son interiores a él (es decir, si $E = \overset{\circ}{E}$).

Ejemplos 2.3.-

2.3.1.- Toda bola abierta es un conjunto abierto.

2.3.2.- Las bolas cerradas no son conjuntos abiertos.

2.3.3.- Los productos cartesianos de intervalos abiertos

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.4.- Se verifican las siguientes propiedades:

i) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total $\mathbb{R}^n$ son abiertos.

ii) Si $\{G_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos abiertos, entonces la unión $\bigcup_{i \in I} G_i$ es un conjunto abierto.

iii) Si $\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ es una familia finita de conjuntos abiertos, entonces la intersección $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_k$ es un conjunto abierto.

Definición 2.5.- Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un punto $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice que es un *punto adherente* a E si cada bola abierta centrada en $\boldsymbol{x}$ tiene intersección no vacía con E. El conjunto de todos los puntos adherentes de E se denomina *adherencia* de E y se representa por $\overline{E}$. Es sencillo comprobar que $E \subset \overline{E}$.

Un conjunto E de $\mathbb{R}^n$ se dice que es *cerrado* si todos sus puntos adherentes están en E (es decir, si $E = \overline{E}$).

Ejemplos 2.6.-

2.6.1.- Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

2.6.2.- Las bolas abiertas no son conjuntos cerrados.

2.6.3.- Los productos cartesianos de intervalos cerrados

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.7.- Un conjunto E de $\mathbb{R}^n$ es abierto (resp. cerrado) si, y sólo si, su complementario $\mathbb{R}^n \setminus E$ es cerrado (resp. abierto).

Proposición 2.8.- Se verifican las siguientes propiedades:

i) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total $\mathbb{R}^n$ son cerrados.

ii) Si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos cerrados, entonces la intersección $\bigcap_{i \in I} F_i$ es un conjunto cerrado.

iii) Si $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ es una familia finita de conjuntos cerrados, entonces la unión $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ es un conjunto cerrado.

Definición 2.9.- Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un punto $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice que es un *punto de acumulación* de E si para cada bola abierta $B(\boldsymbol{x}, r)$ centrada en $\boldsymbol{x}$, la intersección $B(\boldsymbol{x}, r) \cap E$ contiene al menos un punto de E distinto de $\boldsymbol{x}$. El conjunto de todos los puntos de acumulación se denomina *derivado* de E y se representa por E'.

Un punto $\boldsymbol{x}$ de E se dice que es un *punto aislado* de E si no es un punto de acumulación de E.

Proposición 2.10.- Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

i) $\overline{E} = E \cup E'$.

ii) E es cerrado si, y sólo si $E' \subset E$.

iii) Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de E, entonces cualquier bola abierta $B(\boldsymbol{x}, r)$ de centro $\boldsymbol{x}$ contiene infinitos puntos de E.

iv) Si $\boldsymbol{x} \in E$ es un punto aislado de E, entonces existe una bola abierta $B(\boldsymbol{x}, r)$ de centro $\boldsymbol{x}$ tal que

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap E = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Definición 2.11.- Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que E es un conjunto *acotado* si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq M, \quad \boldsymbol{x} \in E\,.$$

Definición 2.12.- Diremos que un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es *compacto* si es simultáneamente cerrado y acotado.

Ejemplos 2.13.-

2.13.1.- Todo subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ es compacto.

2.13.2.- Todo multi-intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

es un conjunto compacto.

§ 3 LÍMITES.

Definición 3.1.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^m$ es el *límite* de la aplicación $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{a}$ si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{l}\| < \varepsilon,$$

para cada $\boldsymbol{x} \in A$, con $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$.

Observación 3.2.- En la definición anterior intervienen dos normas, una definida en $\mathbb{R}^n$ y otra en $\mathbb{R}^m$. La distinción entre ambas viene dada por el contexto.

Proposición 3.3.- Si la aplicación $\boldsymbol{f}$ tiene límite en el punto $\boldsymbol{a}$, éste es único.

Notación: Si la aplicación $\boldsymbol{f}$ tiene límite $\boldsymbol{l}$ en el punto $\boldsymbol{a}$ se escribe

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{l}, \text{ cuando } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}\,.$$

La noción de límite restringida a subconjuntos de uno dado tiene exactamente la misma aplicación en este caso que en el de funciones de una variable.

Definición 3.4.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Si $B \subset A$ y $\boldsymbol{a}$ es también punto de acumulación de B, el límite $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}_{|_B}(\boldsymbol{x})$, si existe, se denomina *límite de la aplicación* $\boldsymbol{f}$ *en el punto* $\boldsymbol{a}$

siguiendo (o a través de) el subespacio B y se denota

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Teorema 3.5.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Son equivalentes:

i) $\boldsymbol{f}$ tiene límite $\boldsymbol{l}$ en el punto $\boldsymbol{a}$.

ii) Para cada subconjunto $B \subset A$ tal que $\boldsymbol{a} \in B'$, $\boldsymbol{f}$ tiene límite en $\boldsymbol{a}$ a través de B, y éste es precisamente $\boldsymbol{l}$.

Definición 3.6.- Para cada $j = 1, 2, \ldots, m$ la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_j : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto x_j \end{aligned} \qquad \big(\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\big)$$

se denomina *proyección* j*-ésima* en $\mathbb{R}^n$.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}: A \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación la función real $f_j = \pi_j \circ \boldsymbol{f}$ se denomina *componente* j*-ésima* de $\boldsymbol{f}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. En esta situación es usual denotar

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Proposición 3.7.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A, y $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$$

si, y sólo si,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}) = \ell_j \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Observación 3.8.- Este último resultado permite simplificar el estudio de límites y los conceptos que de éste se derivan, considerando únicamente funciones reales, es decir, aplicaciones $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

3.9.- Límites iterados:

A la hora de abordar el estudio de la existencia de límites para funciones definidas en conjuntos de $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, puede parecer tentador proceder reduciendo el problema al estudio de límites en una sola variable, concretamente, fijando $n - 1$ coordenadas.

Lamentablemente, la existencia de los límites iterados no garantiza la existencia del límite, ahora bien, en caso de que existan todos los límites, deben coincidir. Para fijar ideas y atendiendo a una mayor simplicidad, enunciaremos el resultado para el caso de una función real definida en un intervalo de $\mathbb{R}^2$:

Teorema: Sean f una función real definida en el conjunto $A = (a_1, b_1)\times(a_2, b_2)$ y $(\alpha, \beta) \in A$. Se supone que existe

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x, y) = \ell\,,$$

y que, para cada x fijo, $x \in (a_1, b_1)$, existe $\lim\limits_{y\to\beta} f(x, y) = \varphi(x)$.

Si existe el límite iterado

$$\lim_{x\to\alpha} \varphi(x) = \lim_{x\to\alpha} \Big(\lim_{y\to\beta} f(x, y)\Big)$$

coincide con ℓ.

En consecuencia, si existen los dos límites iterados pero

$$\lim_{x\to\alpha} \Big(\lim_{y\to\beta} f(x, y)\Big) \neq \lim_{y\to\beta} \Big(\lim_{x\to\alpha} f(x, y)\Big)\,,$$

la función f no puede tener límite en el punto (α, β).

Propiedades 3.10.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A. Supongamos que $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ son funciones de A en $\mathbb{R}^m$ y h es una función de A en $\mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}\,, \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}\,, \qquad \text{y} \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lambda\,.$$

Entonces:

- **i)** $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{k}$.
- **ii)** $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (h\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \lambda\, \boldsymbol{l}$.
- **iii)** $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{k}$.
- **iv)** Si $\lambda \neq 0$, y $h(\boldsymbol{x}) \neq 0$ para cada $\boldsymbol{x} \in A$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} {}^1\!/h(\boldsymbol{x}) = {}^1\!/\lambda$.

Definición 3.11.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es *acotada* si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| \leq M, \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in A\,.$$

Proposición 3.12.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Si $\boldsymbol{f}$ tiene límite en $\boldsymbol{a}$, existe un número real $\delta > 0$ tal que $\boldsymbol{f}$ está acotada en $A \cap \big(B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}\big)$.

Proposición 3.13.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A. Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{g}\colon A \to \mathbb{R}^m$ son aplicaciones tales que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$$

y $\boldsymbol{g}$ está acotada en $A \cap \big(B(\boldsymbol{a},\delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}\big)$ para algún número real $\delta > 0$, entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0\,.$$

Aparte de las propiedades aritméticas, las funciones reales verifican, respecto al orden, propiedades similares a las de las funciones de una variable. Para no abundar en detalles enunciaremos una de ellas, dejando que el lector adapte el resto (tales como el criterio del sandwich) al caso de funciones de varias variables.

Proposición 3.14.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y f una función de A en $\mathbb{R}$. Si existe $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x) = \ell \neq 0$, se tiene que:

i) Si $\ell > 0$, dados números reales α y β con $0 < \alpha < \ell < \beta$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{x} \in A \cap B(\boldsymbol{a},\delta)$ con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, se verifica que $\alpha < f(\boldsymbol{x}) < \beta$.

ii) Si $\ell < 0$, dados números reales α y β con $\alpha < \ell < \beta < 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{x} \in A \cap B(\boldsymbol{a},\delta)$ con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, se verifica que $\alpha < f(\boldsymbol{x}) < \beta$.

Es decir, f toma valores con el mismo signo que el del límite en los puntos de un entorno adecuado de $\boldsymbol{a}$ distintos de él.

§ 4 CONTINUIDAD.

Definición 4.1.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es *continua en* $\boldsymbol{a}$ si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\| < \varepsilon,$$

para cada $\boldsymbol{x} \in A$, con $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$.

Si $\boldsymbol{f}$ es continua en todos los puntos de A, se dice que $\boldsymbol{f}$ es *continua en* A.

Ejemplos 4.2.-

4.2.1.- La norma euclídea es una función continua en $\mathbb{R}^n$.

4.2.2.- La proyección j-ésima $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.3.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$.

i) Si $\boldsymbol{a}$ es un punto aislado de A, entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a}$.

ii) Si $\boldsymbol{a}$ es un punto de acumulación de A, entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a}$ si, y sólo si, tiene límite en $\boldsymbol{a}$ y verifica $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Teorema 4.4.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a}$ si, y sólo si, cada una de las funciones componentes $f_1, f_2, \ldots, f_m$ es continua en $\boldsymbol{a}$.

Proposición 4.5.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto de A. Sean $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ aplicaciones de A en $\mathbb{R}^m$ y h una función de A en $\mathbb{R}$. Supongamos que $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ y h son continuas en $\boldsymbol{a}$. Entonces las aplicaciones

$$\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}\,, \qquad h\,\boldsymbol{f}\,, \qquad \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{h}\ \ (\text{si } h(\boldsymbol{a}) \neq 0)$$

son continuas en $\boldsymbol{a}$.

Teorema 4.6.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y B un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Sean $\boldsymbol{f}\colon A \to B$ y $\boldsymbol{g}\colon B \to \mathbb{R}^p$ aplicaciones tales que $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{g}$ es continua en $f(\boldsymbol{a}) \in B$. Entonces la aplicación compuesta $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a} \in A$.

Proposición 4.7.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Entonces:

i) Si A es abierto, $\boldsymbol{f}$ es continua en A si, y sólo si, para cada conjunto abierto U de $\mathbb{R}^m$ se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto (de $\mathbb{R}^n$).

i) Si A es cerrado, $\boldsymbol{f}$ es continua en A si, y sólo si, para cada conjunto cerrado F de $\mathbb{R}^m$ se tiene que $f^{-1}(F)$ es cerrado (de $\mathbb{R}^n$).

Teorema de Weierstrass 4.8.-

Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}$ una función continua de A en $\mathbb{R}^m$. Si K es un subconjunto compacto de A, entonces $\boldsymbol{f}(K)$ es compacto.

Corolario 4.9.- Sea f una función real continua en un conjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$. Entonces f es acotada y alcanza sus extremos, es decir, existen dos puntos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ de K tales que $f(\boldsymbol{a}) = m$ y $f(\boldsymbol{b}) = M$, siendo

$$m = \inf\{f(\boldsymbol{x}) \,:\, \boldsymbol{x} \in K\} \qquad \text{y} \qquad M = \sup\{f(\boldsymbol{x}) \,:\, \boldsymbol{x} \in K\}\,.$$

§ 5 EJERCICIOS.

1.- Determinar los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que las relaciones

1.1.- $z = \log\left(\dfrac{y}{x^2+y^2-1}\right)$ **1.2.-** $z = \log(1 - x\,y)$

1.3.- $z = \sqrt{x\cos(y)}$ **1.4.-** $z = \sqrt{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}$

1.5.- $z = \log\left(x+y^2\right)$ **1.6.-** $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

definen funciones $(x,y) \mapsto z$ de dichos conjuntos en $\mathbb{R}$, es decir, los dominios más generales de las funciones definidas por estas expresiones.

2.- Determinar si las siguientes funciones tienen límite en el punto $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

2.1.- $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\operatorname{sen}(\|\boldsymbol{x}\|^2)}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

2.2.- $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\log(1-\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$, $0 < \|\boldsymbol{x}\| < 1$.

2.3.- $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\log(1+x_1\,x_2\cdots x_n)}{x_1\,x_2\cdots x_n}$, $x_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

2.4.- $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\operatorname{arctg}(\|\boldsymbol{x}\|^2)}{\|\boldsymbol{x}\|}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

3.- Sea f una función real definida en una bola $B(\boldsymbol{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^2$. Probar que son equivalentes:

(a) f tiene límite ℓ en el punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$;

(b) la función $g\colon (0,r) \to [0,\infty)$ definida por

$$g(\varrho) = \sup\left\{\left|f\big(x_0 + \varrho\cos(\theta), y_0 + \varrho\operatorname{sen}(\theta)\big) - \ell\right| \,:\, \theta \in [0, 2\,\pi]\right\}$$

verifica que

$$\lim_{\varrho\to 0} g(\varrho) = 0\,.$$

4.- Determinar si existen los límites de las siguientes aplicaciones en los puntos que se indican:

4.1.- $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{y-1}{1+(x-1)^2+(y-1)^2}\,,\,\dfrac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)$, $(x,y) \neq (1,1)$, en el punto $(1,1)$.

4.2.- $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{e^{xy}-1}{x}, \log\left(\dfrac{1+xy}{x}\right)\right)$, $x, y > 0$, en el punto $(0,0)$.

4.3.- $f(x,y) = \dfrac{(x-1)+y}{(x-1)^2+(y-1)^2}$, $(x,y) \neq (1,1)$, en el punto $(1,1)$.

4.4.- $f(x,y) = \dfrac{(1+x^2+y^2)\operatorname{sen}(y)}{y}$, $y \neq 0$, en el punto $(0,0)$.

4.5.- $f(x,y) = \dfrac{|y|}{x^2}\, e^{-|y|/x^2}$, $x \neq 0$, en el punto $(0,0)$.

4.6.- $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x\,y}\right)}{y}$, $x, y > 0$, en el punto $(0,0)$.

4.7.- $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, en el punto $(0,0)$.

4.8.- $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, en el punto $(0,0)$.

4.9.- $f(x,y) = \dfrac{e^{-|x+y|}-1}{|x+y|}$, $x+y \neq 0$, en el punto $(0,0)$.

4.10.- $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{|x|+|y|}$, $(x,y) \neq (0,0)$, en el punto $(0,0)$.

5.- Comprobar que las siguientes funciones tienen límite en el punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ a lo largo de cada recta que pasa por dicho punto, pero no tienen límite:

5.1.- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+y^2} & \text{si } -x \neq y^2; \\ 0 & \text{si } -x = y^2. \end{cases}$ **5.2.-** $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

Si una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tiene el mismo límite en un punto a lo largo de cada recta que pasa por él, ¿tiene la función límite en dicho punto?

6.- Determinar los límites iterados en el origen de la función

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \quad (x,y) \neq (0,0)\,.$$

¿Tiene la función f límite en $(0,0)$?

7.- Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } \ x \neq 0 \ \text{ e } \ y \neq 0; \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \ \text{ ó } \ y = 0. \end{cases}$$

Probar que no existe ninguno de los límites iterados de f en $(0,0)$, pero existe el límite de la función en ese punto.

8.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y - x + y}{x+y} & \text{si } \; x+y \neq 0; \\ 0 & \text{si } \; x+y = 0. \end{cases}$$

i) Probar que existen los límites iterados de f en $(0,0)$.

ii) ¿Existe el límite en $(0,0)$ de f?

9.- Determinar el dominio de definición de la función

$$f(x,y) = \frac{x^2\,y^2}{x^2\,y^2 + (x-y)^2}\,.$$

Probar que la función f admite límites iterados en $(0,0)$ y son iguales, pero no existe el límite de f en el citado punto.

10.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & \text{si } \; (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } \; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) ¿Es continua f en $(0,0)$?

ii) ¿Existen los límites iterados de f en $(0,0)$?

11.- Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{si } \; x \geq y; \\ |y| & \text{si } \; x \leq y. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

12.- Determinar los valores del parámetro real $\alpha > 0$ para los que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|^\alpha\,|y-1|^\alpha}{(x-1)^2+(y-1)^2} & \text{si } \; (x,y) \neq (1,1); \\ 0 & \text{si } \; (x,y) = (1,1), \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^2$.

13.- Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\,y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

14.- Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

15.- Sean $b \in \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^2}{x^2-y} & \text{si } x^2 \neq y; \\ b & \text{si } x^2 = y. \end{cases}$$

i) ¿En qué puntos es discontinua f?

ii) Determinar el valor que debe atribuirse a b para que la restricción de f a la recta de ecuación $x+y=2$ tenga el menor número de discontinuidades.

iii) Si g denota la restricción de f al segmento que une los puntos $(0,2)$ y $(2,0)$, para el valor de b hallado en ii), ¿es g una función acotada?

16.- Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^3$ de la función definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^2\,z}{x^6+y^6+z^4} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

§ 6 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.1.- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x^2+y^2 > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0, x^2+y^2 < 1\}$.

1.2.- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y < 1\}$.

1.3.- $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq y \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$.

1.4.- $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi \leq x^2+y^2 \leq (2k+1)\pi\}$.

1.5.- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -y^2\}$. **1.6.-** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

2.1.- 1. **2.2.-** $-\infty$. **2.3.-** 1. **2.4.-** 0.

3.- Téngase en cuenta que:

i) Para cada $\boldsymbol{x} = (x, y) \in B(\boldsymbol{x}_0, r)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$, existen $\rho \in (0, r)$ $(\rho = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ tales que $\boldsymbol{x} = (x, y) = (x_0 + \rho\cos(\theta), y_0 + \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$.

ii) $g(\varrho) = \sup\Big\{\big|f(\boldsymbol{x}) - \ell\big| \,:\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| = \rho\Big\}$.

4.1.- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x, y)$. **4.2.-** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = \infty$.

4.3.- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = \infty$. **4.4.-** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$.

4.5.- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. **4.6.-** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

4.7.- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1/2$. **4.8.-** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$.

4.9.- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = -1$. **4.10.-** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

5.1.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = 1$ y $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(0, y) = 0$.

5.2.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = (1 - \lambda^2)/(1 + \lambda^2)$ y $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(0, y) = -1$.

La función $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x + y^2} & \text{si } -x \neq y^2, \\ 0 & \text{si } -x = y^2, \end{cases}$ tiene límite cero en $(0, 0)$ a lo largo de cada recta que pasa por el origen, pero no tiene límite en dicho punto.

6.- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x, y)\Big) = 1 \neq \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x, y)\Big) = \infty$. No tiene límite en $(0, 0)$.

7.- Para cada $x \neq 0$, no existe $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(x, y)$; para cada $y \neq 0$, no existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x, y)$. Pero, como $|f(x, y)| \leq |x + y|$, se tiene que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

8.- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x, y)\Big) = -1 \neq \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x, y)\Big) = 1$. No tiene límite en $(0, 0)$.

9.- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Los límites iterados son nulos, mientras que el direccional $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x, x)$ vale 1.

10.- i) No, porque no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x, y)\big) = \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x, y)\big) = 0$.

11.- f es continua en $\mathbb{R}^2$.

12.- Para todo $\alpha > 0$, f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$. En $\boldsymbol{x}_0 = (1, 1)$, usar el ejercicio 3: como $f(1 + \rho\cos(\theta), 1 + \rho\,\mathrm{sen}(\theta)) = \rho^{2\alpha-2}|\cos(\theta)|^{\alpha}|\,\mathrm{sen}(\theta)|^{\alpha}$, se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1) = 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad \alpha > 1.$$

13.- f no es continua en $(0,0)$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{4} \neq f(0,0) = 0\,.$

14.- Es continua en $\mathbb{R}^2$. Para probar la continuidad en $(0,0)$, usar que $|x| \leq \|(x,y)\|$, $|y| \leq \|(x,y)\|$, y deducir que $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|$ para cada $(x,y) \neq (0,0)$.

15.- i) f es continua salvo en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Los puntos que plantean más problemas son $(0,0)$ y $(1,1)$: usar que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x^3}} f(x,y) = 1; \qquad \lim_{x\to 1} f(x,1) = \frac{3}{2}\,, \quad \lim_{y\to 1} f(1,y) = 2.$$

ii) Si h es la restricción,

$$h(x) = \begin{cases} f(x,2-x) = \dfrac{x^2+4}{x+2} & \text{si } x \neq 1, -2, \\ \qquad b & \text{si } x = 1 \text{ o } x = -2. \end{cases}$$

La discontinuidad en $x = -2$ no es evitable, mientras que si se toma $b = 5/3$, h es continua en $x = 1$.

iii) Sí, porque g es continua en el segmento cerrado que une $(0,2)$ y $(2,0)$, que es un conjunto compacto.

16.- f no es continua en $(0,0,0)$: $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ \{x^2=y^2=z\}}} f(x,y,z) = \frac{1}{2} \neq f(0,0,0) = 0\,.$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES.

TEMA 5 CÁLCULO DIFERENCIAL

La idea fundamental de todo el Cálculo Diferencial es sencilla: tratar de obtener propiedades sobre objetos (en la práctica funciones) que, sin ser lineales, admiten una cierta "aproximación lineal". De hecho, si nos remontamos un poco en el tiempo, es curioso observar que muchos de los resultados que se presentan en esta teoría aparecen enunciados de forma puramente algebraica antes de la que podíamos denominar formulación moderna. No es de extrañar esto si se piensa que muchos conceptos de Álgebra Lineal elemental, tales como el de Rango, Aplicación Inversa, etc., tienen su análogo en el Cálculo Diferencial.

La presentación actual de esta materia difiere bastante de su desarrollo histórico, en consonancia con el desarrollo de la Física Matemática, y cuyos primeros pasos se pueden situar en el uso de las derivadas parciales por Euler, D'Alembert, etc. en el siglo XVIII. Esto puede ser ilustrado con el hecho de que la continuidad fuese concebida como una propiedad mucho más fuerte que como se entiende hoy en día, implicando la derivabilidad. Este fundamento casi filosófico, recogido en la frase de Leibnitz "Natura non facit saltus", prevaleció durante largo tiempo.

§ 1 DERIVABILIDAD Y DIFERENCIABILIDAD.

Cuando se consideran aplicaciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, carece de sentido considerar cocientes incrementales de tales aplicaciones, y por tanto es imposible generalizar el concepto de derivabilidad en esos términos. Lo que sí es posible es generalizar el concepto de derivada a subespacios de dimensión uno. Aparece así el concepto de derivada direccional y, como caso particular, el de derivada parcial.

Definición 1.1.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Dado un elemento $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, se dice que $\boldsymbol{f}$ admite *derivada direccional en el punto $\boldsymbol{x}_0$ según la dirección de $\boldsymbol{v}$* si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{h},$$

y se denota

$$d_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{ó} \quad D_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Cuando se considera el vector $\boldsymbol{v}_i = (0, 0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0)$, el límite anterior recibe el nombre de *derivada parcial de* $\boldsymbol{f}$ *respecto de* x_i *en el punto* $\boldsymbol{x}_0$, y se denota por

$$D_i\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Si la aplicación $\boldsymbol{f}$ admite derivadas parciales respecto de todas las variables en el punto $\boldsymbol{x}_0$ se dice que es *derivable* en dicho punto. Cuando $\boldsymbol{f}$ es derivable en cada punto de A se dice que es *derivable en* A.

Observaciones 1.2.-

i) A la hora de definir las derivadas direccionales algunos autores consideran exclusivamente vectores unitarios (de norma euclídea 1). Esto no aporta ventajas ni desventajas a la definición y optar por una u otra forma es cuestión de gusto personal.

ii) La segunda notación para las derivadas parciales es, sin duda, la de uso más extendido. Al igual que sucede para las funciones de una variable, tal expresión no denota el cociente de dos números; es simplemente, como se ha dicho, una notación.

iii) Las derivadas direccionales, como derivadas de funciones de una variable que son, gozan de las propiedades aritméticas de éstas; por ejemplo, si dos aplicaciones definidas en un mismo abierto de $\mathbb{R}^n$ admiten derivada parcial respecto de x_j en un punto del abierto, entonces la aplicación suma admite derivada parcial respecto de x_j en dicho punto y resulta ser la suma de las derivadas parciales de las dos aplicaciones en ese punto.

Dejamos que el lector deduzca el resto de las propiedades que procedan.

Ejemplos sencillos, como el que se puede ver en el ejercicio 2.3, muestran que el hecho de que una aplicación $\boldsymbol{f}$ sea derivable en un punto no implica la continuidad de $\boldsymbol{f}$ en ese punto, ni siquiera la existencia de todas las derivadas direccionales implica la continuidad. Se presenta así la diferencia más relevante con las funciones de una variable.

El concepto de diferenciabilidad que sigue es equivalente en el caso unidimensional a la derivabilidad.

Definición 1.3.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es *diferenciable en el punto* $\boldsymbol{x}_0$ si existen una aplicación lineal L de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y una función ε de A en $\mathbb{R}^m$ con

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \|\varepsilon(\boldsymbol{x})\| = 0,$$

de manera que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon(\boldsymbol{x})\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| \quad \text{para cada } \boldsymbol{x}\in A\,.$$

La aplicación lineal L, si existe, es única y recibe el nombre de *diferencial de* $\boldsymbol{f}$ *en el punto* $\boldsymbol{x}_0$. Esta aplicación, se denotará por

$$(d\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{x}_0}\,, \quad d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en todo punto de A se dice que es *diferenciable en* A.

Observación 1.4.- Si A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}\colon A\to\mathbb{R}^m$ es una aplicación derivable en el punto $\boldsymbol{x}_0\in A$, la matriz cuyas m filas son las n derivadas parciales de cada una de las m componentes f_i de $\boldsymbol{f}$, esto es,

$$\Big(D_j f_i(\boldsymbol{x}_0)\Big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\,, \qquad \text{denotada usualmente por } \frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}\,,$$

se denomina *matriz jacobiana* de $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{x}_0$. Si, además, $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$, entonces la aplicación lineal $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ viene dada de forma matricial respecto de las bases estándar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ por dicha matriz jacobiana, es decir,

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(h_1,h_2,\dots,h_n) = \begin{pmatrix} D_1f_1(\boldsymbol{x}_0) & D_2f_1(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & D_nf_1(\boldsymbol{x}_0)\\ D_1f_2(\boldsymbol{x}_0) & D_2f_2(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & D_nf_2(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ D_1f_m(\boldsymbol{x}_0) & D_2f_m(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & D_nf_m(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Si f es una función real definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$, derivable en el punto $\boldsymbol{x}_0$, la matriz jacobiana de f en $\boldsymbol{x}_0$ se denomina también *gradiente* de f en el punto $\boldsymbol{x}_0$ y se denota por $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$, esto es,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \big(D_1f(\boldsymbol{x}_0), D_2f(\boldsymbol{x}_0),\dots,D_nf(\boldsymbol{x}_0)\big)\,.$$

Si, además, f es diferenciable en dicho punto, la fórmula (1) se representa también en este caso mediante el producto escalar

$$f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{h}\,.$$

Observación 1.5.- La diferencial de una aplicación en un punto tiene la misma interpretación geométrica que para el caso de funciones reales de variable real. Ilustraremos esto con un ejemplo de fácil visualización:

Consideremos una función real f definida en un abierto A de $\mathbb{R}^2$ que es diferenciable en el punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. La función

$$g(x,y) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,(y - y_0)$$

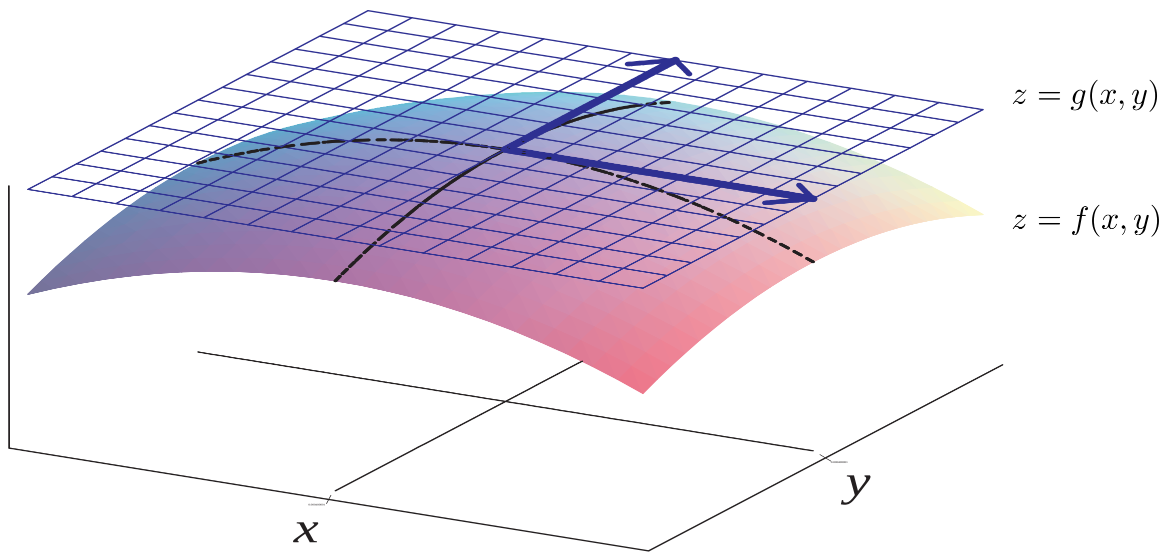
proporciona la "mejor aproximación" afín de f. La gráfica de esta función es un plano afín (en $\mathbb{R}^3$), que contiene al punto $\big(x_0, y_0, f(\boldsymbol{x}_0)\big)$, y se denomina *plano tangente* a la superficie $z = f(x,y)$ en dicho punto. Los vectores

$$\Big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Big) \qquad \text{y} \qquad \Big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Big)\,,$$

derivadas en el punto $t_0 = 0$ de las aplicaciones

$$t \mapsto \big(x_0 + t, y_0, f(x_0 + t, y_0)\big) \qquad \text{y} \qquad t \mapsto \big(x_0, y_0 + t, f(x_0, y_0 + t)\big)\,,$$

respectivamente, resultan ser dos vectores directores de dicho plano.



Teorema 1.6.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ entonces es continua en dicho punto.

Teorema 1.7.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ entonces existen las derivadas direccionales según cualquier dirección en dicho punto, en particular, $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{x}_0$. Además se tiene que, para cada vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$,

$$D_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = (d\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\,.$$

De nuevo, al igual que sucede respecto a la continuidad, estos conceptos admiten una lectura en términos de aplicaciones a valores reales.

Teorema 1.8.- Es condición necesaria y suficiente para que una aplicación $\boldsymbol{f}$ de un abierto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ admita derivada direccional en un punto $\boldsymbol{x}_0$ según el vector $\boldsymbol{v}$ (resp. sea diferenciable en el punto $\boldsymbol{x}_0$) que así se verifique para cada una de sus funciones componentes f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Condición necesaria para la diferenciabilidad de una función en un punto es la existencia de todas sus derivadas direccionales; sin embargo, tal condición no es suficiente, a menos que se añada la hipótesis de continuidad de dichas derivadas. Esta hipótesis se puede debilitar en el sentido siguiente:

Teorema 1.9.- Sea $\boldsymbol{f}$ una aplicación de un abierto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Si en todos los puntos de un entorno de $\boldsymbol{x}_0 \in A$ existen todas las derivadas parciales de $\boldsymbol{f}$ y, excepto quizá una de ellas, son continuas en $\boldsymbol{x}_0$, entonces $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en dicho punto.

Proposición 1.10.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ aplicaciones de A en $\mathbb{R}^m$ y h una función de A en $\mathbb{R}$, todas ellas diferenciables en $\boldsymbol{x}_0$. Entonces

i) $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ y

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

ii) $h\,\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ y

$$(h\,\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0) = h(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,h'(\boldsymbol{x}_0)\,,$$

es decir,

$$(h\,\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) = h(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) + h'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{para cada } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\,.$$

iii) $p = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ y

$$p'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\,,$$

es decir,

$$p'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{para cada } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\,.$$

iv) Si $h(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, $1/h$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ y

$$\left(\frac{1}{h}\right)'(\boldsymbol{x}_0) = \frac{-1}{h(\boldsymbol{x}_0)^2}\,h'(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Regla de la Cadena 1.11.-

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, B abierto de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{f}(A) \subset B$ y $\boldsymbol{g}$ una aplicación de B en $\mathbb{R}^p$. Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ y $\boldsymbol{g}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \in B$ entonces la aplicación $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{x}_0$; además

$$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0) \circ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\big) \circ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0).$$

Observación 1.12.- De acuerdo con la representación matricial de la aplicación diferencial en las bases canónicas mediante la matriz jacobiana, este último resultado permite expresar las derivadas parciales de la función compuesta en términos de las parciales de las funciones componentes. Explícitamente: con las hipótesis y notación de 1.11, se tiene que

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\big)\, \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$$

para todos $i = 1, 2, \ldots, p$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

§ 2 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

A la vista del resultado 1.8 será suficiente considerar, en lo que ahora nos ocupa, únicamente funciones reales definidas en conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.- Sea f una función real definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$, que admite derivadas parciales en todos los puntos de A. Dichas parciales definen, a su vez, funciones de A en $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} : A &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = D_j f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

para las cuales pueden existir también derivadas parciales en los puntos de A. Estas últimas reciben el nombre de *derivadas parciales segundas de la función* f y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = D_{ij} f(\boldsymbol{x}).$$

Se definen, de forma análoga, las derivadas parciales de f de orden m superior al segundo: $D_{i_1 i_2 \ldots i_m} f(\boldsymbol{x})$.

Cuando la función f admite derivadas parciales hasta el orden $k \geq 1$ en cada punto de A y éstas son continuas en A, se dice que la función es *de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* A y se representa $f \in \mathcal{C}^k(A)$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^k$ en A para cada $k \in \mathbb{N}$ se dice que es *de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *en* A y se representa $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$.

Al decir que f es *de clase* $\mathcal{C}^0$ *en* A (denotado por $f \in \mathcal{C}^0(A)$), se quiere significar que f es continua en A.

Definición 2.2.- Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que una aplicación $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathcal{C}^k$ en A si así lo es cada una de sus funciones componentes.

Observación 2.3.- Si $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, en el abierto A de $\mathbb{R}^n$, entonces $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en A. (ver 1.9)

Al trabajar con funciones sencillas, por ejemplo polinomios en varias variables, se observa que derivadas parciales de orden superior respecto de las mismas variables, pero en distinto orden, son iguales. El resultado más importante que justifica esta igualdad de las "parciales cruzadas" es el teorema de Schwarz.

Teorema de Schwarz 2.4.-

Sea f una función real definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$ y de clase $\mathcal{C}^2$ en A. Entonces, para cada $\boldsymbol{x}_0 \in A$ y cada par de índices distintos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}_0).$$

Observaciones 2.5.-

i) Resulta que en la mayoría de los modelos de la Física Matemática las magnitudes involucradas se suponen tan regulares (derivables) como sea necesario, y es por tanto usual que en estas situaciones la igualdad de las derivadas cruzadas se asuma, a tenor del resultado precedente, sin mayor dificultad. La función cuyo estudio se propone en el ejercicio 14 proporciona un sencillo ejemplo en sentido opuesto al de este teorema.

ii) A la hora de representar las derivadas parciales de orden superior (o *sucesivas*), en la notación de Leibnitz, se sigue el siguiente criterio de simplificación: al derivar sucesivamente respecto de la misma variable esto se indica mediante un exponente que representa la multiplicidad de esa derivada; así, la expresión

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_n} f}{\partial {x_1}^{m_1} \, \partial {x_2}^{m_2} \ldots \partial {x_n}^{m_n}}(\boldsymbol{x})$$

representa la derivada de orden $m_1 + \ldots + m_n$ de f derivando m_i veces respecto de cada variable x_i. Para funciones suficientemente regulares, en virtud del teorema anterior, el orden de derivación es irrelevante.

Lema 2.6.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, B abierto de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f}\colon A \to B$ y $\boldsymbol{g}\colon B \to \mathbb{R}^p$, ambas aplicaciones de clase $\mathcal{C}^k$ en A y B, respectivamente. Entonces, la aplicación compuesta $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ es de clase $\mathcal{C}^k$ en A.

La fórmula de Taylor para funciones de varias variables tiene el mismo significado conceptual que en el caso de una variable: "Aproximar localmente una función definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$ por un polinomio".

Fórmula de Taylor 2.7.-

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en A y $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Si $B(\boldsymbol{x}_0, r) \subset A$ $(r > 0)$, para cada $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, r)$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ \frac{1}{1!}\sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}(\boldsymbol{x}_0)\, h_{j_1} + \frac{1}{2!}\sum_{j_1,j_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}(\boldsymbol{x}_0)\, h_{j_1}\, h_{j_2} + \dots \\ &+ \frac{1}{k!}\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\dots\partial x_{j_k}}(\boldsymbol{x}_0)\, h_{j_1}\, h_{j_2}\cdots h_{j_k} \qquad (2) \\ &+ \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j_1,\dots,j_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\dots\partial x_{j_{k+1}}}(\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{h})\, h_{j_1}\, h_{j_2}\cdots h_{j_{k+1}}\,, \end{aligned}$$

siendo $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, y $\theta \in (0,1)$ un número que depende de $\boldsymbol{h}$ (obsérvese que $\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h}$ pertenece el segmento que une $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}$, que está contenido en $B(\boldsymbol{x}_0, r)$).

Observaciones 2.8.-

i) Con la notación de (2), la diferencia

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j_1,\dots,j_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\dots\partial x_{j_{k+1}}}(\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{h})\, h_{j_1}\, h_{j_2}\cdots h_{j_{k+1}}$$

es un polinomio de grado a lo sumo k en las n variables $h_1, h_2, \dots, h_n$, denominado *polinomio de Taylor de orden* k de la función f en el punto $\boldsymbol{x}_0$, y denotado por $T_k(f, \boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x})$.

ii) Haciendo uso del teorema de Schwarz, la fórmula de Taylor se expresa como

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ \sum_{m=1}^{k}\ \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=m} \frac{1}{j_1!\, j_2! \cdots j_n!}\ \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_n^{j_n}}(\boldsymbol{x}_0)\ h_1^{j_1} h_2^{j_2}\cdots h_n^{j_n} \\ &+ \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=k+1} \frac{1}{j_1!\, j_2! \cdots j_n!}\ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_n^{j_n}}(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h})\ h_1^{j_1} h_2^{j_2}\cdots h_n^{j_n}\,, \end{aligned}$$

donde $j_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para todo i (la derivación respecto de x_i no se efectúa si $j_i = 0$).

Lema 2.9.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^k$ en A y $\boldsymbol{x}_0 \in A$. El polinomio de Taylor de orden k de f en el punto $\boldsymbol{x}_0$ verifica que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{f(\boldsymbol{x}) - T_k(f,\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^k} = 0\,.$$

De hecho, $T_k(f,\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x})$ es el único de entre todos los polinomios de grado menor o igual que k que verifica la relación anterior.

En otros términos, existe una función $\varepsilon\colon A \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbb{R}$, con

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0\,,$$

de modo que para cada $\boldsymbol{x} \in A \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ se tiene que

$$f(\boldsymbol{x}) = T_k(f,\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^k\,\varepsilon(\boldsymbol{x}).$$

Ejemplos 2.10.- Se dan a continuación versiones particulares correspondientes a los casos más comunes de la Fórmula de Taylor:

2.10.1.- Sea f una función de clase $\mathcal{C}^3$ en el disco abierto $B(\boldsymbol{x}_0,r) \subset \mathbb{R}^2$. Existe una función $\varepsilon\colon B(\boldsymbol{x}_0,r)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbb{R}$, con $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0$, y tal que para cada $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ con $\|\boldsymbol{h}\| < r$ se tiene que

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) =& f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1 h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2^2 \\
&+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1^2 h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1 h_2^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2^3 \\
&+ \|\boldsymbol{h}\|^3\,\varepsilon(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}).
\end{aligned}$$

2.10.2.- Sea f una función de clase $\mathcal{C}^3$ en la bola abierta $B(\boldsymbol{x}_0,r) \subset \mathbb{R}^3$. Existe una función $\varepsilon\colon B(\boldsymbol{x}_0,r)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbb{R}$, con $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0$, y tal que para cada $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^3$ con

$\|\boldsymbol{h}\| < r$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,h_3 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_3^2 \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1h_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2h_3 \\
&+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1^3 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2^3 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(\boldsymbol{x}_0)\,h_3^3 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1^2h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1^2h_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1h_2^2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1h_3^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2^2h_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(\boldsymbol{x}_0)\,h_2h_3^2 \\
&+ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,h_1h_2h_3 \\
&+ \|\boldsymbol{h}\|^3\,\varepsilon(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}).
\end{aligned}
$$

§ 3 EXTREMOS RELATIVOS.

Definición 3.1.- Sean f una función real definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$, y $\boldsymbol{a}$ un punto de A. Se dice que f presenta un *máximo* (resp. *mínimo*) *local* o *relativo* en ese punto si existe un entorno V de $\boldsymbol{a}$, contenido en A (una bola centrada en $\boldsymbol{a}$, si se prefiere), tal que $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{a})$ (resp. $f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{a})$) para todo $\boldsymbol{x} \in V$.

En cualquiera de los casos anteriores se dice que f presenta un *extremo local o relativo* en $\boldsymbol{a}$. Si las desigualdades anteriores son estrictas para cada $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{a}$ el extremo se dice *estricto*.

Teorema 3.2.- (condición necesaria para la existencia de extremos)

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y f una función de A en $\mathbb{R}$ que es diferenciable en $\boldsymbol{a}$. Es condición necesaria para que f presente un extremo relativo en $\boldsymbol{a}$ que su diferencial en dicho punto sea nula, $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, o equivalentemente, que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Antes de dar condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos, haremos una breve revisión de algunos conceptos algebraicos que serán fundamentales para este estudio.

3.3.- Formas Cuadráticas.

Definición 3.3.1.- Una *forma cuadrática* en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por un polinomio homogéneo de grado 2, es decir, de la forma

$$Q(\boldsymbol{x}) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij}\, x_i\, x_j\,, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}\,.$$

Se dice que la forma cuadrática Q en $\mathbb{R}^n$ es *definida positiva* (resp. *negativa*) si $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ (resp. $Q(\boldsymbol{x}) < 0$) para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

Se dice que la forma cuadrática Q en $\mathbb{R}^n$ es *semidefinida positiva* (resp. *negativa*) si $Q(\boldsymbol{x}) \ge 0$ (resp. $Q(\boldsymbol{x}) \le 0$) para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se dice que la forma cuadrática Q en $\mathbb{R}^n$ es *indefinida* si no es semidefinida, es decir, si toma valores estrictamente positivos y negativos en distintos puntos de $\mathbb{R}^n$.

Observación 3.3.2.- Una matriz simétrica A define una forma cuadrática mediante la expresión

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\, A\, \boldsymbol{x}^t\,. \tag{3}$$

Teorema 3.3.3.- Si A es una matriz cuadrada y simétrica con coeficientes reales todos sus autovalores son reales.

Proposición 3.3.4.- Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ representada por la matriz simétrica A según (3).

i) Q es semidefinida positiva si, y sólo si, todos los autovalores de A son positivos. Es definida positiva si, y sólo si, todos los autovalores de A son estrictamente positivos.

ii) Q es semidefinida negativa si, y sólo si, todos los autovalores de A son negativos. Es definida negativa si, y sólo si, todos los autovalores de A son estrictamente negativos.

iii) Q es indefinida si, y sólo si, A tiene al menos un autovalor estrictamente positivo y al menos uno estrictamente negativo.

Dada una matriz simétrica $A = \big(a_{ij}\big)_{1 \le i,j \le n}$, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se denota por Δ_k al determinante

$$\Delta_k = \det \big(a_{ij}\big)_{1 \le i,j \le k}\,.$$

Proposición 3.3.5.- Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ representada por la matriz simétrica A. Con la notación anterior:

i) Q es definida positiva si, y sólo si, $\Delta_k > 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

ii) Q es definida negativa si, y sólo si, $(-1)^k\, \Delta_k > 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

Volviendo al problema que nos ocupaba:

Definición 3.4.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de clase $\mathcal{C}^2$ en A. Si $\boldsymbol{a} \in A$ la matriz (simétrica en virtud del teorema de Schwarz)

$$Hf(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

se denomina *matriz hessiana* de f en el punto $\boldsymbol{a}$.

A partir de la representación local que proporciona la fórmula de Taylor se deducen los siguientes resultados:

Teorema 3.5.- (condiciones necesarias para la existencia de extremo) Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en A con $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Si f tiene un mínimo (resp. máximo) relativo en $\boldsymbol{a}$, la forma cuadrática $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{h}\, Hf(\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{h}^t$ es semidefinida positiva (resp. negativa).

En consecuencia, si esta forma cuadrática es indefinida f no puede presentar extremos en el punto $\boldsymbol{a}$.

Teorema 3.6.- (condiciones suficientes para la existencia de extremo) Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en A y tal que $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Entonces:

i) Si la forma cuadrática $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{h}\, Hf(\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{h}^t$ es definida positiva (resp. negativa), f presenta un mínimo (resp. máximo) relativo estricto en $\boldsymbol{a}$.

ii) Si las formas cuadráticas $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{h}\, Hf(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{h}^t$ son semidefinidas positivas (resp. negativas) para todos los puntos $\boldsymbol{x}$ de un entorno de $\boldsymbol{a}$, f presenta un mínimo (resp. máximo) relativo en $\boldsymbol{a}$.

§ 4 FUNCIONES INVERSAS E IMPLÍCITAS.

Este epígrafe se dedica a presentar dos teoremas fundamentales del Cálculo Diferencial: el teorema de la función inversa y el de la función implícita, este último sin análogo posible en el caso unidimensional. Su germen se encuentra en los teoremas clásicos de

Cramer y Rouché del Algebra Lineal; de hecho, pensar en el caso lineal puede servir de gran ayuda a la hora de comprender el significado y alcance de estos teoremas.

Empezamos estudiando en qué condiciones una función, definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$ y con llegada en $\mathbb{R}^n$, es localmente invertible en el entorno de un punto $\boldsymbol{a} \in A$.

Definición 4.1.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^n$ que es diferenciable en $\boldsymbol{a}$. El determinante

$$\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \det \big(D_j f_i(\boldsymbol{a})\big)_{1\le i,j\le n} = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{1\le i,j\le n}$$

se denomina *determinante jacobiano* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$.

Teorema de la Función Inversa 4.2.-

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \ge 1)$ en A. Si $\boldsymbol{a} \in A$ es tal que la aplicación lineal $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ es regular, o equivalentemente, tal que $\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq 0$, entonces existen un abierto V que contiene al punto $\boldsymbol{a}$, y un abierto W que contiene al punto $f(\boldsymbol{a})$, tales que $\boldsymbol{f}$ aplica, biyectivamente, V en W. Además, la aplicación inversa $\boldsymbol{f}^{-1}\colon W \to V$ es también de clase $\mathcal{C}^k$ en W y se tiene

$$\big(\boldsymbol{f}^{-1}\big)'\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \big(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\big)^{-1}, \quad \boldsymbol{x} \in V .$$

Observaciones 4.3.-

i) La última fórmula es una igualdad de aplicaciones lineales, en particular, la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en el punto $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es la inversa de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$, y en consecuencia

$$\partial \boldsymbol{f}^{-1}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \frac{1}{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in V .$$

ii) A diferencia del caso lineal, en el que la inversibilidad es global, este teorema tiene carácter local, es decir, la regularidad de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{a}$ sólo garantiza, en general, la inyectividad de $\boldsymbol{f}$ en un entorno del punto $\boldsymbol{a}$; considérese por ejemplo la aplicación

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \big(e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y)\big) \end{aligned}$$

Definición 4.4.- Sean A y B dos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Se dice que una aplicación $\boldsymbol{\varphi}\colon A \to B$ es un *difeomorfismo* o *cambio de variables* de clase $\mathcal{C}^k$, si es biyectiva, de clase $\mathcal{C}^k$ en A, y la aplicación inversa $\boldsymbol{\varphi}^{-1}\colon B \to A$ es también de clase $\mathcal{C}^k$ en B.

El objeto del teorema de la función implícita es precisar condiciones tales que, dada una ecuación

$$\boldsymbol{f}\big((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_m)\big) = \mathbf{0}\,, \tag{4}$$

se pueda asociar a cada punto $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de un cierto conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, un único punto $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de otro conjunto $Y \subset \mathbb{R}^m$, de manera que el par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ verifique la ecuación. De esta forma, queda definida una aplicación

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\,,$$

con los pares de valores que son solución de la ecuación anterior.

En estas condiciones la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$ se dice que está *definida implícitamente* por la ecuación (4). Si ésta es lineal, la respuesta viene dada por el teorema de Rouché, pero en el caso general la resolución de tal ecuación, aun cuando tenga solución única, puede resultar extremadamente difícil. Parece entonces conveniente conocer las propiedades de la función $\boldsymbol{\varphi}$, aunque no se pueda obtener de forma explícita.

Teorema de la Función Implícita 4.5.-

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$, $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ en A, y $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ un punto de A tal que $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$. Se supone, además, que

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right)_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0\,. \tag{5}$$

Existen, entonces, un abierto U de $\mathbb{R}^n$, con $\boldsymbol{a} \in U$, y otro abierto V de $\mathbb{R}^m$, con $\boldsymbol{b} \in V$, tales que, para cada $\boldsymbol{x} \in U$ existe un único $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \in V$ con $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$; además, $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to V$ es una función de clase $\mathcal{C}^k$ en U.

Observaciones 4.6.-

i) A diferencia del caso lineal, el resultado tiene carácter local; considérese por ejemplo la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

ii) El teorema anterior admite una formulación más general en el sentido siguiente:

"Si la matriz jacobiana de la aplicación $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n+m}$ tiene rango máximo (m), esto es, existen $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq m+n$ tales que el menor correspondiente a las derivadas parciales respecto de las variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ tiene determinante no nulo, entonces estas m variables quedan determinadas implícitamente en función de las n restantes en un entorno de dicho punto".

Esto se reduce al caso contemplado en 4.5 sin más que considerar una permutación en el orden de las variables.

iii) La formulación más sencilla del teorema se obtiene para funciones definidas implícitamente, reales y de una variable real (es decir, con la notación del resultado, el caso $n = m = 1$):

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ en A, y (x_0, y_0) un punto de A tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Se supone, además, que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Existen, entonces, un abierto U de $\mathbb{R}$, con $x_0 \in U$, y otro abierto V de $\mathbb{R}$, con $y_0 \in V$, tales que, para cada $x \in U$ existe un único $\varphi(x) \in V$ con $f(x, \varphi(x)) = 0$; además, $\varphi\colon U \to V$ es una función de clase $\mathcal{C}^k$ en U.

En este caso, se ha obtenido para el conjunto de las soluciones de la ecuación $f(x, y) = 0$ una representación local (es decir, válida en un entorno adecuado del punto (x_0, y_0)) en forma de grafo $\{(x, \varphi(x)) : x \in U\}$ de la función implícita φ. Por lo tanto, el conjunto solución es (localmente) una "curva" en el plano con una expresión muy familiar.

Otro caso muy interesante se obtiene para funciones definidas implícitamente, reales y de dos variables reales $(n = 2,\ m = 1)$:

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^3$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ en A, y (x_0, y_0, z_0) un punto de A tal que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Se supone, además, que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Existen, entonces, un abierto U de $\mathbb{R}^2$, con $(x_0, y_0) \in U$, y otro abierto V de $\mathbb{R}$, con $z_0 \in V$, tales que, para cada $(x, y) \in U$ existe un único $\varphi(x, y) \in V$ con $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$; además, $\varphi\colon U \to V$ es una función de clase $\mathcal{C}^k$ en U. Por tanto, las soluciones de la ecuación $f(x, y, z) = 0$ se representan localmente como el grafo $\{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in U\}$ de la función implícita φ, es decir, el conjunto solución es (localmente) una "superficie" en el espacio tridimensional.

iv) Aun sin conocer explícitamente la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$, es posible calcular sus derivadas parciales sucesivas en el punto $\boldsymbol{a}$, lo cual se reduce a resolver una serie de sistemas lineales cuya compatibilidad viene garantizada por el hecho de que el determinante jacobiano respecto de las últimas variables no sea nulo.

En efecto, en las mismas condiciones y con la misma notación que en el teorema 4.5, denotemos por $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ a la aplicación definida en U por

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\,.$$

Puesto que esta aplicación es la idénticamente nula, todas sus derivadas parciales han de ser nulas en U. Así, fijado $1 \leq k \leq n$, se tiene para cada $i = 1, 2, \ldots, m$

$$0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}).$$

En virtud de (5) también se tiene que, para todos los puntos $\boldsymbol{x}$ en un entorno de $\boldsymbol{a}$,

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \right)_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0,$$

de manera que el sistema lineal dado por las m ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

en las m incógnitas $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$, es compatible determinado, lo que permite obtener las derivadas parciales de las funciones implícitas φ_j.

El sistema anterior se puede resolver mediante el método de Cramer; esta fórmula, que expresa las soluciones en función de los coeficientes del sistema, sirve para mostrar que las funciones implícitas son de la misma clase, $\mathcal{C}^k$, que la aplicación $\boldsymbol{f}$.

Si $\boldsymbol{f}$ es además de clase $\mathcal{C}^2$, dados $1 \leq l, k \leq n$, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_l \partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \\
&= \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{n+j} \partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{n+h} \partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\, \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_l}(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\, \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_l \partial x_k}(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}$$

lo que da lugar a un sistema lineal en las m incógnitas $\dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_l \partial x_k}(\boldsymbol{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$, cuya matriz de coeficientes es la misma que antes.

Nótese que el término independiente viene dado por las derivadas de $\boldsymbol{f}$ y las parciales primeras de $\boldsymbol{\varphi}$, que en el punto $\boldsymbol{a}$ ya han sido determinadas previamente.

Repitiendo este argumento se obtienen recursivamente las derivadas sucesivas de las funciones implícitas en el punto $\boldsymbol{a}$ como soluciones de sistemas lineales, todos ellos con la misma matriz de coeficientes.

v) En el caso más sencillo, descrito en la primera parte del apartado iii) anterior, para cada $x \in U$ se tiene que

$$f(x, \varphi(x)) = 0;$$

derivando respecto de x se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0, \qquad x \in U.$$

Puesto que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ y $f \in \mathcal{C}^1(A)$, también se tiene que para todos los puntos x en un entorno de x_0, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$, de manera que

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

En el caso de mayor regularidad y repitiendo este argumento como en el apartado anterior, se obtienen recursivamente las derivadas sucesivas de la función implícita φ en el punto x_0 como soluciones de ecuaciones lineales cuya incógnita aparece siempre multiplicada por el factor no nulo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$.

§ 5 EJERCICIOS.

Derivabilidad y Diferenciabilidad.

1.- Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos y según las direcciones que se indican:

1.1.- $f(x, y, z) = x^3 + 2\,y^3 + 3\,z$, en $(1, 1, 0)$ según la dirección $(1, -1, 2)$.

1.2.- $f(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha}$, para $x > 0$, $y > 0$, siendo $\alpha > 0$, en el punto $(1, 1, 1)$, según el vector $(2, 1, -1)$.

2.- Estudiar la continuidad y existencia de derivadas direccionales en el punto $(0, 0)$ de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

2.1.- $f(x, y) = \sqrt{|x\,y|}$ **2.2.-** $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x + y^2} & \text{si } -x \neq y^2; \\ 0 & \text{si } -x = y^2. \end{cases}$

2.3.- $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^4}{x^4 + y^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

3.- Estudiar la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\[2mm] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

4.- Demostrar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0;\\[2mm] 0 & \text{si } x+y=0,\end{cases}$$

no es diferenciable en los puntos de la forma $(a,-a)$, $a\in\mathbb{R}$.

5.- Estudiar la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}x\,y\,\log(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

6.- Probar que es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ la función

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\[2mm] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

y, sin embargo, las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en el punto $(0,0)$.

7.- Estudiar la diferenciabilidad en todo $\mathbb{R}^2$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } x^2-y^2\neq 0;\\[2mm] 0 & \text{si } x^2-y^2=0.\end{cases}$$

8.- Estudiar la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la aplicación $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{cases}\left(e^{x+y},\operatorname{sen}(x-y),x^2\operatorname{sen}\left(1/x\right)\right) & \text{si } x\neq 0;\\[2mm] \left(e^{y},\operatorname{sen}(-y),0\right) & \text{si } x=0.\end{cases}$$

9.- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie:

9.1.- $z=x^2+y^3$ en el punto $(2,1)$.

9.2.- $z=\operatorname{sen}(x-y)$ en el punto $(0,0)$.

10.- Demostrar que, si f es una función derivable en $\mathbb{R}$, la función u definida en $\mathbb{R}^2$ por $u(x,y) = f(x^2\,y)$ verifica la ecuación

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} - 2\,y\,\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0\,.$$

11.- Sean f y g dos funciones definidas en $(0,\infty)$, ambas derivables en $t_0 = 1$. Se define la función $u : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$u(x,y) = f(x\,y) + g\Big(\frac{y}{x}\Big)\,.$$

Calcular, si existen,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,1)\,.$$

12.- Suponiendo que todas las funciones involucradas son diferenciables, calcular:

i) $u'(t)$, siendo $u(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

ii) $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial s}$, siendo $u(r,s) = f\big(x(r,s), y(r,s), z(r,s)\big)$.

iii) $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, siendo $u(r,s,t) = f\big(x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t)\big)$.

iv) $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, siendo $u(r,s,t) = f\big(x(r,s,t)\big)$.

Derivadas Sucesivas. Fórmula de Taylor. Extremos Relativos.

13.- En cada uno de los siguientes casos comprobar que las derivadas parciales cruzadas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ son iguales:

13.1.- $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4\,\mathrm{sen}(x\,y)$ **13.2.-** $f(x,y) = \dfrac{1}{x}\cos(y^2)$, $x \neq 0$

13.3.- $f(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ **13.4.-** $f(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x\,y}{1+x^2+y^2}\right)$

13.5.- $f(x,y) = \log(1 + x\,y)$, $x > 0$, $y > 0$.

14.- Probar que existen en el punto $(0,0)$ las segundas derivadas parciales cruzadas de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

pero no son iguales.

15.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Si la función

$$u(x,y) = f(x,y)\, e^{ax+by}$$

es tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv 0\,,$$

encontrar los valores de a y b para los que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f \equiv 0\,.$$

16.- Comprobar que la función u, definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$ por

$$u(x,y) = \log\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)$$

verifica la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0\,. \qquad (\textit{Ecuación de Laplace})$$

17.- Sea $a > 0$. Comprobar que la función u definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ por

$$u(x,t) = \frac{1}{2\,a\sqrt{\pi\, t}}\; e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

verifica la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv a^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \qquad (\textit{Ecuación del Calor})$$

18.- Determinar el desarrollo de Taylor de orden 3 de la función

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x + 2\,y)$$

en el punto $(0,0)$.

19.- Determinar el desarrollo de Taylor de orden 3 de la función

$$f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$$

en el punto $(1,0)$.

20.- Utilícese la fórmula de Taylor para expresar las siguientes funciones en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$:

20.1.- $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy^2 + x - y$

20.2.- $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2\,x$

21.- Calcular, si existen, los siguientes límites:

21.1.- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) - x\,y}{x^2+y^2}\,.$

21.2.- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\left(e^{x^2+y^2}-1\right)^2}\,\frac{\operatorname{tg}(x\,y)-\operatorname{sen}(x\,y)}{1-\cos(x)\cos(y)}\,.$

22.- Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:

22.1.- $f(x,y) = x^3 + 3\,x\,y^2 - 15\,x - 12\,y\,.$

22.2.- $f(x,y) = x^2 - 2\,x\,y + y^2 + x^4 + y^4\,.$

23.- Sea $a > 0$. Demostrar la desigualdad

$$x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y} \geq 3\sqrt[3]{3}\,a^2, \quad \text{si } x > 0,\ y > 0.$$

24.- Discutir, según los valores del parámetro a, la existencia de extremos relativos de la siguiente función:

$$f(x,y) = x^3 - 3\,a\,x^2 - 4\,a\,y^2 + 1\,.$$

25.- Discutir, según los valores del parámetro a, si en el punto $(0,0)$ presenta un extremo relativo la función

$$f(x,y) = a\left(2\,x\,y + y^2 + y\,x^2 + \cos(x+y)\right) + x^2\left(a^2 - y\right).$$

26.- Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3\,z^2 + y\,z + 2\,x\,z - x\,y\,.$$

<u>*Funciones Inversas e Implícitas.*</u>

27.- Se considera la aplicación $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \left(e^{2\,x} - e^y, e^y\right).$$

i) Probar que $\boldsymbol{f}$ es inyectiva.

ii) Determinar el conjunto imagen $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$.

iii) Obtener explícitamente la aplicación inversa $\boldsymbol{f}^{-1}$.

iv) Comprobar que las matrices jacobianas de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f}^{-1}$ en puntos correspondientes son inversas una de la otra.

28.- Se consideran el abierto de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$$

y la aplicación $\boldsymbol{f}$ de A en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \Big(\frac{x^4+y^4}{x}, \operatorname{sen}(x)+\cos(x)\Big)\,.$$

i) ¿Es $\boldsymbol{f}$ inyectiva en A?

ii) Determinar los puntos de A para los cuales existe un entorno donde $\boldsymbol{f}$ admite inversa de clase $\mathcal{C}^1$.

iii) Para los puntos (x,y) hallados en el apartado anterior determinar la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en el punto $\boldsymbol{f}(x,y)$.

29.- Demostrar que la relación

$$x^3 + y^3 - 3\,x\,y - 1 = 0$$

define, en un entorno de $0 \in \mathbb{R}$, una función implícita $y = \varphi(x)$ con $\varphi(0) = 1$.

Determinar el desarrollo de Taylor de orden 3 en el punto 0 de la función φ.

30.- Sea f una función real de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = -2$. Demostrar que la relación

$$y - z\,x = f(z)$$

define, en un entorno del punto $(1,0)$ una función implícita $z = z(x,y)$ con $z(1,0) = 0$. Probar que existe un entorno de dicho punto donde se verifica

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z\,\frac{\partial z}{\partial y} \equiv 0\,.$$

31.- Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1,1)$ de la función z, con $z(1,1) = 1$, definida implícitamente en un entorno de dicho punto por la ecuación

$$z^{15} + y^2\,z^2 - x\,y^7 - x^8 = 0\,.$$

32.- Comprobar que el sistema

$$\begin{cases} x^2\, y^2\, z^2 = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

define, en un entorno del punto 1, funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$, con $y(1) = 1$, $z(1) = 1$. Calcular $y'(1)$ y $z'(1)$.

33.- En el abierto $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ se considera la ecuación

$$e^{z\, x^2} + \log(x^2 + y^2 + z) = 1\,.$$

i) Comprobar que dicha relación define una función implícita $z = z(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en una bola abierta centrada en $(0, 0)$ y tal que $z(0, 0) = 1$.

ii) ¿Presenta z algún extremo local en $(0, 0)$?

34.- Se consideran las funciones $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x, y, z) = (x + y + z - 1,\, x\, y + z^2 - 1)\,, \qquad h(u, v) = \cos(u) + e^v\,.$$

i) Calcular las derivadas de g y h en los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0)$ respectivamente.

ii) Si $f = h \circ g$, determinar la derivada direccional de f en el punto $(0, 0, 1)$ según el vector $(1, 1, -1)$.

iii) Demostrar que la ecuación $f(x, y, z) - 2 = 0$ define una función implícita $z = z(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de $(0, 0)$ con $z(0, 0) = 1$.

iv) Probar que la función z presenta un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$.

§ 6 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.1.- $D_{(1,-1,2)} f(1, 1, 0) = 3$. **1.2.-** $D_{(2,1,-1)} f(1, 1, 1) = \alpha$.

2.1.- Continua en $(0, 0)$; las derivadas direccionales según vectores (v_1, v_2) con $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$ valen 0, y el resto no existen.

2.2.- No es continua en $(0, 0)$; las derivadas direccionales según vectores (v_1, v_2) con $v_1 = 0$ valen 0, y el resto no existen.

2.3.- No es continua en $(0, 0)$; las derivadas direccionales según vectores (v_1, v_2) valen v_2^4/v_1^3 si $v_1 \neq 0$, y 0 si $v_1 = 0$.

3.- Diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4.- La función f no tiene límite en $(a, -a)$, para ningún $a \in \mathbb{R}$.

5.- Diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

6.- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, pero las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no tienen límite en $(0,0)$.

7.- Diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \colon |x| = |y|\}$.

8.- Las tres componentes de f son diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

9.1.- $4x + 3y - z - 6 = 0$. **9.2.-** $-x + y + z = 0$.

10.- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xyf'(x^2y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 f'(x^2y)$.

11.- $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1) = f'(1) - g'(1)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1,1) = f'(1) + g'(1)$.

12.- i) Obviando los puntos en que se evalúa cada función, se tiene que

$$u' = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'.$$

ii) En este y los siguientes apartados, basta cambiar, en la próxima expresión, r por cualquiera de las otras variables para obtener las derivadas parciales restantes:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

iii) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial r}$. **iv)** $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{\partial x}{\partial r} = f'\dfrac{\partial x}{\partial r}$.

14.- $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)(0,0) = -1$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)(0,0) = 1$.

15.- $a = b = -1$.

18.- $T_3\big(f,(0,0)\big)(x,y) = x + 2y - \dfrac{1}{6}x^3 - x^2y - 2xy^2 - \dfrac{4}{3}y^3$.

19.- $T_3\big(f,(1,0)\big)(x,y) = 1 + (x-1)^2 - \dfrac{1}{2}y^2$.

20.1.- $f(x,y) = 12 + 8(x-1) + 15(y-2) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) + 7(y-2)^2$

$$+(x-1)^3 + (x-1)(y-2)^2 + (y-2)^3.$$

20.2.- $f(x,y) = 9 + 6(x-1) + 5(y-2) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2) + (y-2)^2$.

21.1.- 0. **21.2.-** 0.

22.1.- Mínimo relativo en $(2,1)$, máximo relativo en $(-2,-1)$.

22.2.- Mínimo relativo en $(0,0)$.

23.- La función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$ presenta en el primer cuadrante un único extremo relativo en el punto $({}^{a}/\sqrt[3]{3}, {}^{a}/\sqrt[3]{3})$, que es un mínimo, en el que f toma el valor $3\sqrt[3]{3}\,a^2$. Si $(x,y) \notin ({}^{a}/9, 3a) \times ({}^{a}/9, 3a)$, entonces $f(x,y) \geq 9a^2 > 3\sqrt[3]{3}\,a^2$. Aplíquese el teorema de Weierstrass en el compacto $[{}^{a}/9, 3a] \times [{}^{a}/9, 3a]$ para concluir.

24.- Si $a = 0$, f no presenta extremos. Si $a > 0$, en $(0,0)$ hay un máximo relativo. Si $a < 0$, en $(0,0)$ hay un mínimo relativo.

25.- En $(0,0)$ hay un extremo (mínimo, de hecho) relativo si, y sólo si, $a \geq 1$.

26.- En $(0,0,0)$ hay un mínimo relativo.

27.- **ii)** $f(\mathbb{R}^2) = \{(u,v) \colon u + v > 0,\ v > 0\}$;
iii) $f^{-1}(u,v) = ({}^{1}/2 \log(u+v), \log(v))$.

28.- **i)** No. **ii)** Los puntos (x,y) con $y \neq 0$ y $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
iii) $(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{f}(x,y)) = (\boldsymbol{f}'(x,y))^{-1}$.

29.- $T_3(\varphi, 0)(x) = 1 + x - \dfrac{2}{3}x^3$.

30.- A partir de la relación $y - z(x,y)\,x = f(z(x,y))$, derivar respecto de x o de y para obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, respectivamente.

31.-
$$T_2(z,(1,1))(x,y) = 1 + \frac{9}{17}(x-1) + \frac{5}{17}(y-1) + \frac{1}{2}\Big(\frac{-988}{17^3}(x-1)^2 + \frac{5580}{17^3}(y-1)^2 - 2\frac{8129}{17^3}(x-1)(y-1)\Big).$$

32.- $y'(1) = 0$, $z'(1) = -1$.

33.- **ii)** z presenta un máximo relativo en $(0,0)$.

34.- **i)** $g'(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $h'(0,0) = (\,0 \quad 1\,)$.

ii) $D_{(1,1,-1)}f(0,0,1) = -2$.

iv) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = \dfrac{1}{2}$.

TEMA 6 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

El *Cálculo de Primitivas* o *Integración Indefinida* es una materia de especial importancia práctica, siendo la base teórica sobre la que se fundamenta relativamente sencilla en cuanto a conceptos. Esta importancia se pone de manifiesto si se observa, entre otras muchas cosas, que la inmensa mayoría de los fenómenos físicos vienen descritos por Ecuaciones Diferenciales, cuya resolución teórica necesita de esta materia.

La clase de funciones definidas en un intervalo que admiten primitiva en él es muy amplia (por ejemplo, contiene a toda función continua); no obstante, el problema de calcular la primitiva de una función es, en general, irresoluble, es decir, existen funciones cuya primitiva no puede ser expresada de forma elemental (como la función de Gauss $\Phi(x) = \int e^{-x^2}\,dx$).

A partir del epígrafe §2 nos centramos en el estudio de las primitivas de ciertas clases muy concretas de funciones. Como se puede comprobar a lo largo de estas notas, la mayoría de los métodos reducen el problema original al de las Fracciones Racionales, que estudiamos en el citado apartado.

§ 1 DEFINICIONES Y PRIMERAS PROPIEDADES.

Definición 1.1.- Sea f una función real definida en un intervalo I de la recta real. Se dice que la función F, definida y derivable en el mismo intervalo, es una primitiva de f si se verifica que

$$F'(x) = f(x) \quad \left(\frac{dF}{dx}(x) = f(x)\right) \quad \text{para cada } x \in I\,.$$

Nota: La definición proporciona el conocimiento de las primitivas de un gran número de funciones elementales (ver §9). Por ejemplo, puesto que $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, la función seno es una primitiva del coseno en $\mathbb{R}$.

Propiedades 1.2.-

De las propiedades aritméticas de la derivación se deducen los dos siguientes resultados, que proporcionan las primeras reglas prácticas para la integración:

1.2.1.- Si F es una primitiva de f y C es un número real, entonces la función $F+C$ es también una primitiva de f. De hecho, si G es otra primitiva de F, se tiene que $F-G$ es constante.

Nota: El conjunto de las primitivas de una función f se denomina *Integral Indefinida de* f, y se denota por

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{ó} \qquad \int f\,.$$

Según el resultado anterior este conjunto se obtiene sumando constantes a una primitiva arbitraria, F, por lo que es usual escribir

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

En estas expresiones la variable "x" es irrelevante, lo mismo se podría escribir $\int f(y)\,dy$; la variable de integración adquiere un papel destacado, por ejemplo, cuando la función depende de dos o más variables, como en

$$\int \operatorname{sen}(z^3x^2)\,dx\,.$$

1.2.2.- Si F, G son primitivas de las funciones f y g respectivamente, definidas ambas en un mismo intervalo I, y si α, β son números reales, entonces

$$\alpha\,F + \beta\,G \quad \text{es una primitiva de} \quad \alpha\,f + \beta\,g \quad \text{en } I\,.$$

1.2.3.- De la fórmula de derivación del producto se deduce la

Fórmula de Integración por Partes: Sean f, g dos funciones definidas en el mismo intervalo y tal que ambas son derivables. Entonces

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Esta fórmula se suele escribir de forma más compacta

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du,$$

donde $u = f(x)$, $du = f'(x)\,dx$, $v = g(x)$, $dv = g'(x)\,dx$.

Nota: La expresión $\gamma(x)\,dx$ tiene perfecto sentido desde el punto de vista de las aplicaciones lineales, para ser más precisos, de las formas diferenciales. Aquí sólo nos preocupa como formalismo de cálculo.

1.2.4.- La Regla de la Cadena proporciona nuevos argumentos para el cálculo de Primitivas.

Método de Sustitución: Sean f y φ funciones de variable real tales que φ es derivable y la imagen de φ está contenida en el dominio de f. Si F es una primitiva de f, entonces

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C\,.$$

Cambio de Variable: Sean f y φ funciones definidas en los intervalos (a,b) y (c,d) respectivamente, tales que φ transforma biyectivamente el intervalo (c,d) en (a,b), y tanto φ como φ^{-1} son derivables. Al considerar la integral indefinida

$$\int f\big(\varphi(y)\big)\,\varphi'(y)\,dy = \int g(y)\,dy\,,$$

si G es una primitiva de g, se obtiene que

$$\int f(x)\,dx = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C\,.$$

Este método es útil cuando el cambio de variable transforma el cálculo de la primitiva de f en el de la de g, conocida o más sencilla de obtener.

Nótese que el argumento utilizado es exactamente el mismo que en el Método de Sustitución, sólo que aplicado en sentido inverso.

Nota: Es usual representar, abusando de la notación, las identidades de aplicaciones lineales $d\varphi(y) = \varphi'(y)\,dy$ por $dx(y) = \varphi'(y)\,dy$, e incluso

$$dx = \varphi'\,dy \qquad \text{ó} \qquad dy = (\varphi^{-1})'\,dx\,.$$

Éste será el criterio que seguiremos en adelante.

§ 2 INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES.

Definición 2.1.- Una función f se dice que es una *Función* o *Fracción Racional* si se escribe en su dominio de definición como cociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Si el grado de P es mayor o igual que el grado de Q es posible escribir

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde C es el polinomio cociente y R es el resto, que tiene grado estrictamente menor que el de Q. Es por esta razón que de ahora en adelante, y salvo que se diga lo contrario, sólo consideraremos fracciones racionales con el grado del numerador menor que el del denominador.

Teorema: Todo polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales se puede descomponer de forma única como un producto

$$Q(x) = C\,(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_r)^{m_r}\,q_1(x)^{n_1}\ldots q_s(x)^{n_s},$$

donde $C \in \mathbb{R}$, $a_1,\ldots,a_r$ son las raíces reales de Q, $m_1,\ldots,m_r$ son sus multiplicidades respectivas, $q_1,\ldots,q_s$ son polinomios mónicos de grado 2 sin raíces reales, y $n_1, \ldots, n_s$ son sus multiplicidades.

Nota: El hecho de que los poliomios q_i de la descomposición anterior no tengan raíces reales significa que $q_i(x) = x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ con $\alpha_i^2 - 4\beta_i < 0$.

2.2.- Método de Descomposición en Fracciones Simples.

Este método, que es útil cuando los factores del denominador (ver teorema anterior) son de multiplicidad baja, se basa en el siguiente resultado.

Teorema: Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción racional y Q se descompone como antes, entonces $f(x)$ se escribe de forma única como

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \ldots \\ & + \frac{A_{r,1}}{(x-a_r)} + \frac{A_{r,2}}{(x-a_r)^2} + \ldots + \frac{A_{r,m_r}}{(x-a_r)^{m_r}} + \ldots \\ & + \frac{B_{1,1}\,x + C_{1,1}}{q_1(x)} + \frac{B_{1,2}\,x + C_{1,2}}{q_1(x)^2} + \ldots + \frac{B_{1,n_1}\,x + C_{1,n_1}}{q_1(x)^{n_1}} + \ldots \\ & + \frac{B_{s,1}\,x + C_{s,1}}{q_s(x)} + \frac{B_{s,2}\,x + C_{s,2}}{q_s(x)^2} + \ldots + \frac{B_{s,n_s}\,x + C_{s,n_s}}{q_s(x)^{n_s}}, \end{aligned} \tag{$*$}$$

donde los $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ son números reales.

Estos coeficientes se pueden calcular por el denominado *Método de los Coeficientes Indeterminados*, que se reduce a un problema de Algebra Lineal.

Según lo anterior es suficiente calcular las primitivas de las fracciones que aparecen en la expresión $(*)$, denominadas *Fracciones Simples*.

2.2.1.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \log(|x-a|) + C.$

2.2.2.- $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C,\ n > 1.$

2.2.3.- $\displaystyle\int \frac{A\,x + B}{x^2 + \alpha\,x + \beta}\,dx, \quad A \neq 0;$

En primer lugar se escribe la fracción a integrar del siguiente modo

$$\frac{A\,x+B}{x^2+\alpha\,x+\beta}=\frac{A}{2}\,\frac{2\,x+{}^{2B}\!/_{A}}{x^2+\alpha\,x+\beta}=\frac{A}{2}\,\frac{2\,x+\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}+\frac{A}{2}\,\frac{{}^{2B}\!/_{A}-\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,.$$

Nótese que el numerador del primer sumando es la derivada del denominador, de manera que la primitiva de este sumando es inmediata y resulta ser

$$\int\frac{A}{2}\,\frac{2\,x+\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,dx=\frac{A}{2}\,\log(|x^2+\alpha\,x+\beta|)+C\,.$$

La forma clásica para calcular la primitiva del segundo sumando es reducirla mediante un cambio de variable a una conocida. Puesto que

$$x^2+\alpha\,x+\beta=(x+{}^{\alpha}\!/_{2})^2+(\beta-{}^{\alpha^2}\!/_{4})=(x+\mu)^2+\gamma^2=\gamma^2\big((x+\mu)^2/_{\gamma^2}+1\big),$$

donde $\mu={}^{\alpha}\!/_{2}, \gamma^2=\beta-{}^{\alpha^2}\!/_{4}$, tras realizar el cambio de variable

$$\boldsymbol{x+\mu=\gamma\,t\,;\quad dx=\gamma\,dt}$$

resulta

$$\int\frac{dx}{x^2+\alpha\,x+\beta}=\int\frac{dx}{\gamma^2\big((x+\mu)^2/_{\gamma^2}+1\big)}=\frac{1}{\gamma}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$
$$=\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}(t)+C=\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}\,\big((x+\mu)/_{\gamma}\big)+C\,.$$

2.2.4.- $\displaystyle\int\frac{A\,x+B}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n}\,dx,\ n>1;$

Para calcular estas primitivas, después de haber escrito la fracción como suma de dos, igual que en 2.2.3, se puede utilizar un método de recurrencia (ver 8.1), pero cuando en el denominador aparecen raíces múltiples, sobre todo si éstas son complejas y de multiplicidad elevada, es más cómodo el método que exponemos en el siguiente apartado.

2.3.- Método de Hermite.

No desarrollaremos completamente el método, nos limitamos a señalar la idea, que es bastante sencilla. La derivada de una fracción de la forma

$$\frac{1}{(x-a)^n}\quad\text{o}\quad\frac{A\,x+B}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n},\quad n\geq 1,$$

es una nueva fracción cuyo denominador tiene el mismo factor, pero con su multiplicidad aumentada en una unidad. En cierto sentido, la primitiva de una fracción racional involucrará fracciones cuyo denominador tendrá la multiplicidad de sus factores disminuida en una unidad, si ésta es mayor que 1, más otros términos de tipo logarítmico o arco tangente que procederán de los factores irreducibles.

Explícitamente:
Sea $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una fracción racional, entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{R(x)}{M(x)} + \int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx,$$

donde: M es un polinomio cuyos factores son los mismos de Q, pero con su multiplicidad disminuida en una unidad; R es un polinomio (que hay que hallar) de grado menor que el de M; B es el producto de todos los factores irreducibles de Q (es decir, $B\,M = Q$), y A es un polinomio (que hay que hallar) de grado menor que el de B.

Para determinar estos polinomios basta observar que, según la definición de primitiva, debe verificarse que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{M(x)}\right) + \frac{A(x)}{B(x)},$$

lo cual permite calcular los coeficientes de $R(x)$ y $A(x)$ por el método de los coeficientes indeterminados. Una vez hecho esto, el problema se reduce a calcular la primitiva de ${}^{A(x)}/_{B(x)}$, que es posible según el método anterior.

§ 3 FRACCIONES RACIONALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Este parágrafo lo dedicamos al cálculo de primitivas de funciones del tipo

$$R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)\,,$$

donde R es una fracción racional de dos variables (aquí no se supone que el grado de P sea menor que el de Q).

Ejemplo: Si $R(x,y) = \dfrac{2\,x\,y + x}{x^2 + y^3}$, entonces

$$R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) = \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)^2 + \cos(x)^3}\,.$$

3.1.- El procedimiento general es reducir estas funciones a fracciones racionales clásicas mediante el cambio de variable

$$\boldsymbol{t = \operatorname{tg}\big({}^{x}/_{2}\big)}\,,$$

con el que, a partir de las fórmulas trigonométricas, se tiene que:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(x) = \frac{2\,t}{1+t^2}}\,;\quad \boldsymbol{\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}}\,;\quad \boldsymbol{dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt}\,.$$

El integrando de la primitiva resultante es una función racional de t por serlo $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y dx.

3.2.- Existen situaciones particulares en las cuales es posible resolver estas primitivas de forma más sencilla. Nos limitamos a describir los procedimientos sin justificar las aseveraciones que se hacen:

3.2.1.- $R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$ *es impar respecto al coseno*:
Este caso se da cuando

$$R\big(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)\big) = -R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) .$$

Mediante el cambio

$$\boldsymbol{t = \operatorname{sen}(x)\,; \quad 1 - t^2 = \cos(x)^2\,; \quad dt = \cos(x)\,dx,}$$

resulta que

$$\int R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)\,dx = \int S(t)\,dt\,,$$

donde S es una fracción racional.

3.2.2.- $R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$ *es impar respecto al seno*:
Se verifica que

$$R\big(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) = -R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)\,,$$

y haciendo el cambio

$$\boldsymbol{t = \cos(x)\,; \quad 1 - t^2 = \operatorname{sen}(x)^2\,; \quad dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx,}$$

se transforma la integral en la de una fracción racional.

3.2.3.- $R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$ *es par respecto al seno y al coseno*:
Esto significa que

$$R\big(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)\big) = R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)\,;$$

se hace el cambio $\boldsymbol{t = \operatorname{tg}(x)}$, resultando que

$$\boldsymbol{\frac{t^2}{1+t^2} = \operatorname{sen}(x)^2\,; \quad \frac{1}{1+t^2} = \cos(x)^2\,; \quad dt = \big(1 + \operatorname{tg}(x)^2\big)\,dx \quad \text{o} \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt,}$$

y la primitiva original se reduce a una racional.

Nota: Las relaciones trigonométricas permiten, en muchos casos, simplificar el cálculo de este tipo de primitivas; por ejemplo, la primitiva de la función $f(x) = \cos^2(x)$

se puede resolver según el método expuesto en 3.2.3, pero resulta más sencillo si se tiene en cuenta que

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2},$$

siendo las primitivas de los dos sumandos inmediatas.

3.3.- Primitivas de funciones reducibles a las anteriores.

Las fracciones racionales que involucran expresiones de la forma $\operatorname{sen}(mx)$ o $\cos(nx)$, donde m, n son números naturales, se pueden reducir a las de los tipos anteriores expresando $\operatorname{sen}(mx)$ y $\cos(nx)$ en función de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, lo que es posible sin más que tener en cuenta las fórmulas trigonométricas del ángulo suma.

§ 4 FRACCIONES RACIONALES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

4.1.- Nos interesamos ahora por las primitivas de funciones del tipo $R(e^x)$, donde R es una fracción racional.

El procedimiento general es realizar el cambio de variable

$$\boldsymbol{e^x = t}\,, \quad \text{es decir,} \quad \boldsymbol{x = \log(t)}\,,$$

con lo cual

$$\boldsymbol{dt = e^x\,dx} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{dx = \frac{1}{t}\,dt}$$

reduciéndose a la primitiva de una fracción racional:

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt.$$

4.2.- Fracciones Racionales de las Funciones Hiperbólicas.

Al igual que en el parágrafo §3 nos interesamos en las primitivas de las funciones del tipo $R\big(\operatorname{Sh}(x), \operatorname{Ch}(x)\big)$, donde R es una fracción racional de dos variables. Recordemos que las funciones hiperbólicas se definen por

$$\operatorname{Sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{Ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{Tgh}(x) = \frac{\operatorname{Sh}(x)}{\operatorname{Ch}(x)}\,.$$

Entre sus propiedades (ver el apéndice del tema 3, dedicado a las funciones elementales), son fundamentales las dos siguientes:

i) $\operatorname{Ch}(x)^2 - \operatorname{Sh}(x)^2 = 1\,.$

ii) $\mathrm{Sh}'(x) = \mathrm{Ch}(x)\,; \quad \mathrm{Ch}'(x) = \mathrm{Sh}(x)\,; \quad \mathrm{Tgh}'(x) = 1 - \mathrm{Tgh}(x)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{Ch}(x)^2}\,.$

4.2.1.- De forma análoga al método expuesto en el apartado 3.1, el cambio de variable

$$\boldsymbol{t = \mathbf{Tgh}\big(x/2\big)\,; \qquad x = 2\,\mathbf{ArgTgh}(t)\,; \qquad dx = \frac{2}{1-t^2}\,dt}\,,$$

reduce estas primitivas a las de fracciones racionales. Dejamos como ejercicio para el alumno el estudio exhaustivo de este procedimiento.

Nota: Es posible también aplicar el argumento de 4.1, puesto que toda fracción racional $R\big(\mathrm{Sh}(x), \mathrm{Ch}(x)\big)$ es una fracción racional $S(e^x)$. Como ejercicio proponemos demostrar esta última aseveración (*Indicación*: Nótese que $e^x e^{-x} = 1$).

4.2.2.- Por último señalaremos que los mismos argumentos utilizados en 3.2 pueden ser repetidos, paso por paso, sustituyendo las funciones trigonométricas por las hiperbólicas de igual nombre.

§ 5 INTEGRALES DEL TIPO

$$\boldsymbol{\int R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{m_2/n_2}, \dots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{m_\nu/n_\nu}\right) dx}.$$

Aquí R denota una función racional de $\nu+1$ variables, $R(x, y_1, \dots, y_\nu)$, y $m_k \in \mathbb{Z}$, $n_k \in \mathbb{N}$ para todo $k = 1, 2, \dots, \nu$. Por ejemplo, la integral

$$I = \int \frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}{x\,\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}} + \sqrt[4]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3}}\,dx$$

es del tipo en cuestión, pues la función racional de 4 variables,

$$R(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{y_1}{x\,y_2 + y_3},$$

permite escribir

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}, \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1/3}, \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3/4}\right) dx\,.$$

La representación no es única. Invitamos al lector a dar varias representaciones, tanto para esta función como para las de los ejercicios propuestos.

Sea $p = \text{m.c.m.}(n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$. El procedimiento general para la resolución de este tipo de primitivas consiste en efectuar el cambio de variable

$$\boldsymbol{\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^p}, \qquad \text{es decir,} \qquad \boldsymbol{x = \frac{t^p d - b}{a - t^p c}},$$

que transforma la integral en la de una fracción racional en t.

5.1.- Casos particulares.

5.1.1.- Integrales del tipo $\displaystyle\int R\Big(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, \ldots, x^{m_\nu/n_\nu}\Big)\, dx$.

5.1.2.- Integrales del tipo $\displaystyle\int R\Big(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \ldots, (ax+b)^{m_\nu/n_\nu}\Big)\, dx$.

5.1.3.- Integrales del tipo $\displaystyle\int R\Big(x, \sqrt[m]{ax+b}\Big)\, dx$.

§ 6 INTEGRALES BINÓMICAS o BINOMIAS.

Estudiamos en este epígrafe las primitivas del tipo

$$\boldsymbol{\int x^m \big(a\,x^n + b\big)^p\, dx},$$

donde m,n y p son números racionales. Haciendo el cambio de variable

$$\boldsymbol{t = x^n\,; \quad x = t^{1/n}\,; \quad dx = \frac{1}{n}\, t^{1/n-1}\, dt},$$

se tiene que

$$\int x^m \big(a\,x^n + b\big)^p\, dx = \frac{1}{n}\int t^q \big(a\,t + b\big)^p\, dt,$$

con $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$.

Sobre el integrando de la última primitiva se observa que:

6.1.- Si $p \in \mathbb{Z}$, es de la forma $R(t, t^q)$, con R fracción racional, y la primitiva es del tipo 5.1.1.

6.2.- Si $q \in \mathbb{Z}$, es de la forma $R\big(t, (at+b)^p\big)$, R fracción racional, y la primitiva es del tipo 5.1.2.

6.3.- Si $p + q \in \mathbb{Z}$, es posible escribirlo como $\left(\dfrac{at+b}{t}\right)^p t^{p+q}$, que es del tipo estudiado en §5 con $c = 1$ y $d = 0$.

Nota: La racionalización es imposible si no es entero alguno de los números p, q, $p+q$. En el caso de que los exponentes m, n o p no sean racionales no existe un procedimiento general para el cálculo elemental de estas primitivas.

6.4.- Casos particulares: No se hace necesaria la reducción a integrales del tipo estudiado en §5 cuando se dan los siguientes casos.

6.4.1.- Si p es natural, por la *Fórmula del Binomio de Newton*

$$(a\,t+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k\, b^{p-k}\, t^k\,,$$

y la integración es inmediata:

$$\int t^q (a\,t+b)^p dt = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k\, b^{p-k} \int t^{k+q}\, dt\,.$$

6.4.2.- Si q es natural, realizando el cambio

$$\boldsymbol{z = a\,t + b\,;\quad t = \frac{z-b}{a}\,;\quad dt = \frac{1}{a}\,dz,}$$

se sigue que

$$\int t^q\,(a\,t+b)^p\,dt = \frac{1}{a^{q+1}} \int (z-b)^q z^p\,dz\,,$$

que es del tipo anterior.

6.4.3.- Si $-(p+q+2)$ es natural, mediante el cambio

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{z}\,;\quad dt = \frac{-1}{z^2}\,dz}\,,$$

se obtiene

$$\int t^q\,(a\,t+b)^p\,dt = -\int z^{-(q+p+2)}(a+b\,z)^p\,dz$$

reduciéndose al caso 6.4.2.

§ 7 INTEGRALES DEL TIPO $\int \boldsymbol{R\Big(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\Big)\,dx}$.

Como siempre $R(x,y)$ denota una función racional de dos variables. Se supone que existe un subconjunto A de la recta real (de hecho un intervalo o unión de dos intervalos) tal que $a\,x^2+b\,x+c \geq 0$ para todo $x \in A$, pues en caso contrario el problema no tiene sentido.

Es posible obtener estas primitivas mediante diversos procedimientos, de los que citaremos los siguientes:

7.1.- Racionalización.

A continuación se exponen distintos tipos de cambio de variable según el signo de los coeficientes a y c.

7.1.1.- Si $a > 0$, se puede hacer el cambio de variable

$$\boldsymbol{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \sqrt{a}\,x + t}\,.$$

Elevando al cuadrado y despejando x en función de t, se tiene que

$$\boldsymbol{x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t} = r(t)}\,; \quad \boldsymbol{dx = r'(t)\,dt}$$

y en consecuencia

$$\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\Big)\,dx = \int R\Big(r(t), \sqrt{a}\,r(t) + t\Big)\,r'(t)\,dt\,;$$

esta última es una integral racional, pues $R(x,y)$, $r(t)$ y $r'(t)$ son funciones racionales.

7.1.2.- Si $c > 0$, es posible efectuar el cambio

$$\boldsymbol{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,x + \sqrt{c}}\,.$$

Despejando x en función de t, se tiene que

$$\boldsymbol{x = \frac{2\,t\sqrt{c} - b}{a - t^2} = r(t)}\,; \quad \boldsymbol{dx = r'(t)\,dt}\,,$$

con lo que la integral transformada es de nuevo racional.

7.1.3.- Si $a < 0$, el trinomio $a\,x^2 + b\,x + c$ se anula en dos puntos, entre los cuales toma valores positivos (cuando x tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, el polinomio tiende hacia $-\infty$), es decir,

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - \alpha)\,(x - \beta).$$

Consideremos el cambio

$$\boldsymbol{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \alpha)}\,.$$

Elevando al cuadrado esta igualdad se tiene que

$$\boldsymbol{a\,(x - \beta) = t^2\,(x - \alpha)}\,, \quad \text{luego} \quad \boldsymbol{x = \frac{a\,\beta - t^2\,\alpha}{a - t^2} = r(t)}\,; \quad \boldsymbol{dx = r'(t)\,dt}\,,$$

y la integral se reduce a una racional.

7.2.- Reducción a fracciones racionales de las funciones trigonométricas o hiperbólicas.

Se distinguen dos situaciones generales según el signo de a.

7.2.1.- Si $\boldsymbol{a > 0}$ es posible escribir

$$a\,x^2 + b\,x + c = \Big(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\Big)^2 + \Big(c - \frac{b^2}{4\,a}\Big)\,.$$

7.2.1.1.- Si además $\boldsymbol{c - \frac{b^2}{4\,a} > 0}$ (o sea, $a\,x^2 + b\,x + c > 0$ para todo x), poniendo $\gamma^2 = c - \frac{b^2}{4\,a}$ resulta que

$$a\,x^2 + b\,x + c = \gamma^2 \left(\left(\frac{\sqrt{a}\,x}{\gamma} + \frac{b}{2\gamma\sqrt{a}} \right)^2 + 1 \right),$$

y tras realizar el cambio de variable

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{\gamma}\,x + \frac{b}{2\gamma\sqrt{a}} = t\,; \quad x = \frac{\gamma}{\sqrt{a}}\,t - \frac{b}{2\,a}\,; \quad dx = \frac{\gamma}{\sqrt{a}}\,dt}\,,$$

se obtiene que

$$\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\Big)\,dx = \int S\Big(t, \sqrt{t^2+1}\Big)\,dt\,,$$

donde $S(x,y)$ es una fracción racional.

Puesto que $\mathrm{Ch}^2(z) = \mathrm{Sh}^2(z) + 1$, es lógico hacer el cambio

$$\boldsymbol{t = \mathrm{Sh}(z)\,; \quad \sqrt{t^2+1} = \mathrm{Ch}(z)\,; \quad dt = \mathrm{Ch}(z)\,dz},$$

resultando una integral que se resuelve según los métodos expuestos en 4.2.

7.2.1.2.- Si por el contrario se tiene que $\boldsymbol{c - \frac{b^2}{4\,a} < 0}$ (el polinomio tiene dos raíces reales distintas), tomamos ahora $\gamma^2 = \frac{b^2}{4\,a} - c$, y resulta que

$$a\,x^2 + b\,x + c = \gamma^2 \left(\left(\frac{\sqrt{a}\,x}{\gamma} + \frac{b}{2\gamma\sqrt{a}} \right)^2 - 1 \right).$$

Del mismo cambio de variable realizado en 7.2.1.1 se sigue que

$$\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\Big)\,dx = \int S\Big(t, \sqrt{t^2-1}\Big)\,dt\,,$$

con S fracción racional. En este caso se hace el cambio

$$\boldsymbol{t = \mathrm{Ch}(z)\,; \quad \sqrt{t^2-1} = \mathrm{Sh}(z)\,; \quad dt = \mathrm{Sh}(z)\,dz}\,,$$

resultando de nuevo una primitiva del tipo estudiado en 4.2.

Nota: Si $c - \frac{b^2}{4\,a} = 0$, el polinomio es cuadrado perfecto y la primitiva original es en realidad racional.

7.2.2.- Si $\boldsymbol{a < 0}$ $(-a > 0)$ se tiene que

$$a\,x^2 + b\,x + c = -\Big(\sqrt{-a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\Big)^2 + \Big(c - \frac{b^2}{4\,a}\Big)\,.$$

Puesto que el trinomio toma valores positivos en algún subconjunto de $\mathbb{R}$ debe ser $c - \dfrac{b^2}{4\,a} > 0$ (el polinomio tiene dos raíces reales distintas); poniendo $\gamma^2 = c - \dfrac{b^2}{4\,a}$ resulta que

$$a\,x^2 + b\,x + c = \gamma^2 \left(1 - \Big(\frac{\sqrt{-a}\,x}{\gamma} - \frac{b}{2\gamma\sqrt{-a}} \Big)^2 \right),$$

y haciendo el cambio de variable

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{-a}}{\gamma}\,x - \frac{b}{2\gamma\sqrt{-a}} = t\,; \quad x = \frac{\gamma}{\sqrt{-a}}\,t - \frac{b}{2a}\,; \quad dx = \frac{\gamma}{\sqrt{-a}}\,dt}\,,$$

se sigue que

$$\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\Big)\,dx = \int S\Big(t, \sqrt{1-t^2}\Big)\,dt\,,$$

donde $S(x,y)$ es una fracción racional. Cualquiera de los dos cambios de variable siguientes reducen esta última integral a la de una fracción racional de las funciones trigonométricas, que han sido estudiadas en §3:

$$\boldsymbol{t = \mathbf{sen}(z)\,; \quad \sqrt{1-t^2} = \mathbf{cos}(z), \quad dt = \mathbf{cos}(z)\,dz}\,,$$
$$\boldsymbol{t = \mathbf{cos}(z)\,; \quad \sqrt{1-t^2} = \mathbf{sen}(z), \quad dt = -\,\mathbf{sen}(z)\,dz}\,.$$

§ 8 MÉTODOS DE RECURRENCIA.

Con frecuencia aparecen, en el cálculo de primitivas, integrales que dependen de uno o varios parámetros naturales. Utilizando la fórmula de integración por partes y/o realizando un cambio de variable adecuado, su valor se relaciona, en muchos casos, con el de esas mismas integrales para valores próximos de los parámetros.

Por ejemplo: si n es natural, utilizando integración por partes se tiene que

$$\int x^n\,e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}\,e^x\,dx;$$

de este modo hemos reducido en una unidad el exponente n, y si se repite el proceso n veces, basta calcular una primitiva de e^x para terminar el cálculo.

A continuación se desarrollan varios ejemplos que pueden ilustrar, a nuestro entender, el espíritu de este procedimiento.

8.1.- Integrales de la forma $\boldsymbol{I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}}$.

En virtud de la fórmula de integración por partes, si se considera

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^n} \quad \text{y} \quad dv = dx\,,$$

se tiene que

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n \Big[\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \Big],$$

es decir,

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n \Big[I_n(x) - I_{n+1}(x) \Big],$$

y despejando $I_{n+1}(x)$ se sigue que

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\Big(\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1) I_n(x) \Big) \quad \text{para todo } \ n\,.$$

Aplicando n veces dicha fórmula, el problema se reduce a calcular

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + C\,.$$

8.1.1.- Estudiemos el caso 2.2.4 del epígrafe 2. Si consideramos una descomposición semejante a la efectuada en 2.2.3 se tiene que

$$\frac{A\,x+B}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n} = \frac{A}{2}\,\frac{2\,x+\alpha}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n} + \frac{A}{2}\,\frac{2B/A-\alpha}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n}\,.$$

Observamos que una primitiva del primer sumando es

$$-\frac{A}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^{n-1}}\,,$$

y con la notación y el cambio de variable utilizados en 2.2.3, se deduce que

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n} = \int \frac{dx}{\gamma^{2n}\Big(\frac{(x+\mu)^2}{\gamma^2}+1\Big)^n} = \frac{1}{\gamma^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}\,.$$

La última integral es del tipo 8.1.

8.2.- Si P es un polinomio de dos variables con coeficientes reales, las integrales indefinidas

$$\int P\big(x, \log(x)\big)\,dx\,; \quad \int P\Big(x, \arccos(x)\Big)\,dx\,; \quad \int P\big(x, \operatorname{arcsen}(x)\big)\,dx\,,$$

realizando respectivamente los cambios de variable

$$\boldsymbol{x = e^t}\,; \quad \boldsymbol{x = \cos(t)}\,; \quad \boldsymbol{x = \operatorname{sen}(t)}\,,$$

resultan ser de la forma

$$\int P(e^t, t)\, e^t\,dt, \quad -\int P\big(\cos(t), t\big)\ \operatorname{sen}(t)\,dt\,, \quad \int P\big(\operatorname{sen}(t), t\big)\ \cos(t)\,dt\,,$$

que se pueden calcular por recurrencia mediante integración por partes.

8.3.- Para finalizar veremos un ejemplo de fórmula de recurrencia para una integral que depende de varios parámetros naturales. Sea

$$I_{m,n}(x) = \int \operatorname{sen}^m(x)\, \cos^n(x)\, dx\,.$$

Si se considera

$$u = \cos^{n-1}(x)\,; \qquad du = -(n-1)\cos^{n-2}(x)\operatorname{sen}(x)\, dx\,,$$
$$dv = \operatorname{sen}^m(x)\cos(x)\, dx\,; \quad v = \frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)}{m+1}\,,$$

utilizando el método de integración por partes, se sigue que

$$\begin{aligned} I_{m,n}(x) &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)\cos^{n-1}(x)}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^{n-2}(x)\operatorname{sen}^2(x)\, dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)\cos^{n-1}(x)}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^{n-2}(x)\left(1-\cos^2(x)\right) dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)\cos^{n-1}(x)}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\Big(I_{m,n-2}(x) - I_{m,n}(x)\Big), \end{aligned}$$

y despejando se tiene que

$$I_{m,n}(x) = \frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)\, \cos^{n-1}(x)}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\, I_{m,n-2}(x)\,.$$

Reiterando el proceso, reducimos el problema al cálculo de $I_{m,1}(x)$ ó $I_{m,0}(x)$, según sea n impar o par. Haremos notar que:

8.3.1.- Una primitiva de $I_{m,1}(x)$ es $\dfrac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)}{m+1}$;

8.3.2.- El cálculo de una primitiva de $I_{m,0}(x)$, que es un proceso de recurrencia uniparamétrico, se propone en el ejercicio 13.2.

§ 9 TABLA DE PRIMITIVAS INMEDIATAS.

POTENCIALES

- $\displaystyle\int u(x)^a\, u'(x)\, dx = \frac{1}{a+1}\, u(x)^{a+1} + C. \quad (a \neq -1)$

LOGARÍTMICAS

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \log\big(|u(x)|\big) + C.$

EXPONENCIALES

- $\displaystyle\int e^{u(x)}\, u'(x)\, dx = e^{u(x)} + C.$

- $\displaystyle\int a^{u(x)}\, u'(x)\, dx = \frac{1}{\log(a)}\, a^{u(x)} + C. \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

TRIGONOMÉTRICAS

- $\displaystyle\int \cos\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \operatorname{sen}\big(u(x)\big) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = -\cos\big(u(x)\big) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\cos^2\big(u(x)\big)}\, dx = \int \sec^2\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \int \Big(1 + \operatorname{tg}^2\big(u(x)\big)\Big)\, u'(x)\, dx = \\ = \operatorname{tg}\big(u(x)\big) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2\big(u(x)\big)}\, dx = \int \operatorname{cosec}^2\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \int \Big(1 + \operatorname{cotg}^2\big(u(x)\big)\Big)\, u'(x)\, dx = \\ = -\operatorname{cotg}\big(u(x)\big) + C.$

INVERSAS DE TRIGONOMÉTRICAS

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}\, dx = \operatorname{arcsen}\big(u(x)\big) + C = -\arccos\big(u(x)\big) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}\big(u(x)\big) + C = -\operatorname{arccotg}\big(u(x)\big) + C.$

HIPERBÓLICAS

- $\displaystyle\int \operatorname{Ch}\big(u(x)\big)\,u'(x)\,dx = \operatorname{Sh}\big(u(x)\big) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{Sh}\big(u(x)\big)\,u'(x)\,dx = \operatorname{Ch}\big(u(x)\big) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\operatorname{Ch}^2\big(u(x)\big)}\,dx = \operatorname{Tgh}\big(u(x)\big) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\operatorname{Sh}^2\big(u(x)\big)}\,dx = -\operatorname{CoTgh}\big(u(x)\big) + C.$

ARGUMENTOS HIPERBÓLICOS

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+1}}\,dx = \operatorname{ArgSh}\big(u(x)\big) + C = \log\Big(u(x) + \sqrt{u^2(x)+1}\Big) + C.$

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}\,dx = \operatorname{ArgCh}\big(u(x)\big) + C = \log\Big|u(x) + \sqrt{u^2(x)-1}\Big| + C.$

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}\,dx = \operatorname{ArgTgh}\big(u(x)\big) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u(x)}{1-u(x)}\right| + C.$

Tablas más amplias de primitivas, así como colecciones de ejercicios, se pueden encontrar en los dos textos que citamos a continuación:

∗ Bombal F., Rodríguez L., Vera G.: *Problemas de Análisis Matemático, Vol. 3: Cálculo Integral*, Editorial AC.

∗ Coquillat F.: *Cálculo Integral*, Editorial Tebar Flores.

§ 10 EJERCICIOS.

En todos los ejercicios se propone calcular las primitivas de las funciones correspondientes.

1.- *Integración por Partes.*

1.1.- $x\,e^x$ **1.2.-** $x^2\cos(x)$ **1.3.-** $\operatorname{sen}(x)\,e^x$ **1.4.-** $\operatorname{sen}^2(x)$

1.5.- $\log(x^2+2)$ **1.6.-** $\operatorname{sen}(x)\,\log\big(1+\operatorname{sen}(x)\big)$ **1.7.-** $\dfrac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg}(x)$

2.- *Método de Sustitución.*

2.1.- $x^2\operatorname{sen}(x^3)$ **2.2.-** $\dfrac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}}$ **2.3.-** $\dfrac{\operatorname{arctg}(x)^3}{1+x^2}$ **2.4.-** $x\operatorname{cotg}(2x^2+1)$

2.5.- $\sqrt{\dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{1-x^2}}$ **2.6.-** $\dfrac{1}{\sqrt{20+8x-x^2}}$ **2.7.-** $\dfrac{1}{2x^2+2x+5}$

3.- *Descomposición en Fracciones Simples.*

3.1.- $\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ **3.2.-** $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$ **3.3.-** $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^6}$

3.4.- $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$ **3.5.-** $\dfrac{x^3}{x^4+x^2+1}$ **3.6.-** $\dfrac{1}{x^3-1}$

4.- *Método de Hermite.*

4.1.- $\dfrac{x-1}{x^2(x^2+1)^2}$ **4.2.-** $\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ **4.3.-** $\dfrac{x+2}{x^3(x+1)(x^2+2x+2)^2}$

4.4.- $\dfrac{1}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}$

5.- *Fracciones Racionales de Funciones Trigonométricas.*

5.1.- $\dfrac{1}{5+4\cos(x)}$ **5.2.-** $\dfrac{2-\cos(x)}{2+\cos(x)}$ **5.3.-** $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$ **5.4.-** $\dfrac{\operatorname{tg}(x)}{1+\cos(x)}$

6.- *Fracciones Racionales de Funciones Trigonométricas: Caso 3.2.*

6.1.- $\dfrac{1}{\cos(x)}$ **6.2.-** $\operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)$ **6.3.-** $\dfrac{1+\cos^2(x)}{\cos(x)\big(1+\operatorname{sen}^2(x)\big)}$

6.4.- $\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}$ **6.5.-** $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}$ **6.6.-** $\dfrac{1}{a^2\operatorname{sen}^2(x)+b^2\cos^2(x)}$

7.- *Fracciones Racionales de Funciones Trigonométricas: Caso 3.3.*

7.1.- $\cos(2x)\operatorname{sen}^2(x)$ **7.2.-** $\dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(2x)}{\cos(x)}$ **7.3.-** $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(3x)\cos(x)}$

8.- *Fracciones Racionales de la Función Exponencial.*

8.1.- $\dfrac{e^{2x}-e^x+1}{e^x-2}$ **8.2.-** $\dfrac{1}{a^2e^x+b^2e^{-x}}$

9.- *Fracciones Racionales de Funciones Hiperbólicas.*

9.1.- $\operatorname{Ch}^2(x)$ **9.2.-** $\dfrac{1}{\operatorname{Sh}(x)}$ **9.3.-** $\dfrac{1}{\operatorname{Ch}^2(x)+\operatorname{Sh}^2(x)}$ **9.4.-** $\operatorname{Ch}^3(x/2)$

10.- *Funciones del tipo* §5.

10.1.- $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}$ **10.2.-** $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$ **10.3.-** $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}$

10.4.- $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

11.- *Integrales Binomias.*

11.1.- $x^2\left(a+b\,x^2\right)^{-5/2}$ **11.2.-** $x\left(1+x^{-1/2}\right)^2$ **11.3.-** $x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-1/3}$

11.4.- $x\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2}$ **11.5.-** $\dfrac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$ **11.6.-** $\dfrac{1}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$

12.- *Funciones del tipo* §7.

12.1.- $\dfrac{1}{\sqrt{2+3\,x-2\,x^2}}$ **12.2.-** $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ **12.3.-** $\dfrac{x^3+1}{\sqrt{1-x^2}}$

12.4.- $\sqrt{3-2\,x-x^2}$ **12.5.-** $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

13.- *Métodos de Recurrencia.*

13.1.- $\log^n(x)$ **13.2.-** $\operatorname{sen}^n(x)$ **13.3.-** $\cos^n(x)$ **13.4.-** $\operatorname{tg}^n(x)$

Determinar una primitiva, en todos los casos anteriores, cuando $n=3$.

13.5.- $\left(x^3+x^2-2\,x\right)e^{-x}$ **13.6.-** $\left(x^5+4\,x^4\right)\operatorname{sen}(2x)$ **13.7.-** $x^{2n+1}\,e^{x^2/2}$

14.- *Métodos de Recurrencia: Caso 8.2.*

14.1.- $x^3\log^2(x)$ **14.2.-** $(x^2+x+1)\arccos(x)$ **14.3.-** $x^n\,\operatorname{arcsen}(x)$

§ 11 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

Salvo que se indique lo contrario, se denominará I a la integral pedida. En la mayoría de los apartados la solución consistirá únicamente en una primitiva. No siempre que se aplique un cambio de variable (c.v.) se expresará la primitiva en función de la variable original, dejando este paso como ejercicio.

1.1.- xe^x-e^x **1.2.-** $x^2\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)$
1.3.- $\dfrac{e^x}{2}\Big(\operatorname{sen}(x)-\cos(x)\Big)$ **1.4.-** $\dfrac{1}{2}\Big(x-\operatorname{sen}(x)\cos(x)\Big)$
1.5.- $x\log(x^2+2)-2\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+2}\,dx=x\log(x^2+2)-2(x-\sqrt{2}\operatorname{arctg}(x/\sqrt{2}))$
1.6.- $-\cos(x)\log\big(1+\operatorname{sen}(x)\big)+x+\cos(x)$
1.7.- $x\operatorname{arctg}(x)-\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2(x)$

2.1.- $-\dfrac{1}{3}\cos(x^3)$ **2.2.-** $\dfrac{5}{16}(x^4+2)^{4/5}$ **2.3.-** $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}^4(x)$ **2.4.-** $\dfrac{1}{4}\log|\operatorname{sen}(2x^2+1)|$
2.5.- $\dfrac{2}{3}\big(\operatorname{arcsen}(x)\big)^{3/2}$ **2.6.-** $\operatorname{arcsen}\big(\dfrac{x-4}{6}\big)$ **2.7.-** $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\big(\dfrac{2x+1}{3}\big)$

3.1.- $I=\displaystyle\int\Big(1-\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x-2}\Big)\,dx=x-2\log|x-1|+5\log|x-2|$
3.2.- $I=\displaystyle\int\Big(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\Big)\,dx=-\log|x|-\frac{1}{x}+\log|x+1|$
3.3.- $-\dfrac{1}{3(x-1)^3}-\dfrac{1}{2(x-1)^4}-\dfrac{2}{5(x-1)^5}$
3.4.- $\dfrac{1}{4}\log|x+1|-\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{4}\log|x-1|-\dfrac{1}{4(x-1)}$
3.5.- Con el cambio de variable $x^2=t$ queda

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{4}\log(t^2+t+1)-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\big(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\big),$$

y basta deshacer el cambio.
3.6.- $\dfrac{1}{3}\log|x-1|-\dfrac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\big(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\big)$

4.1.- Escribimos $I=\dfrac{ax^2+bx+c}{x(1+x^2)}+\displaystyle\int\frac{dx^2+ex+f}{x(1+x^2)}\,dx$; se deduce que $a=3/2$,

$b = {}^1\!/_2$, $c = 1$, $d = 0$, $e = {}^3\!/_2$, $f = 1$. Así,

$$I = \frac{3x^2+x+2}{2x(1+x^2)} + \int \frac{3x+2}{2x(1+x^2)}\,dx = \frac{3x^2+x+2}{2x(1+x^2)} + \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x)\,.$$

4.2.- Ponemos $I = \dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(1+x^2)^2} + \displaystyle\int \frac{ex+f}{1+x^2}\,dx$, y resulta que

$$I = \frac{{}^3\!/_8 x^3 + {}^5\!/_8 x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x).$$

4.3.- Escribiendo directamente

$$I \;=\; \frac{a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d}{x^2(x^2+2\,x+2)} \;+\; \int \Big(\frac{j}{x} + \frac{k\,x+l}{x^2+2\,x+2} + \frac{m}{x+1}\Big)\,dx\,,$$

se tiene que

$$a = \frac{5}{4}\,,\; b = \frac{5}{2}\,,\; c = 2\,,\; d = \frac{-1}{2}\,,\; j = \frac{7}{4}\,,\; k = \frac{-3}{4}\,,\; l = \frac{-5}{4}\,,\; m = -1\,.$$

4.4.- $\dfrac{1}{4}\dfrac{x+1}{x^2+1} + \dfrac{1}{4}\log|x+1| - \dfrac{1}{8}\log(x^2+1) + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)$

5.1.- C.v. $\operatorname{tg}({}^x\!/_2) = t$: $I = 2\displaystyle\int \frac{dt}{9+t^2} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}({}^t\!/_3)$.

5.2.- Con el mismo c.v.,

$$I = 2\int \frac{1+3t^2}{(3+t^2)(1+t^2)}\,dt = 8\int \frac{dt}{3+t^2} - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}({}^x\!/_2)\Big) - x.$$

5.3.- C.v. $\operatorname{tg}({}^x\!/_2) = t$: $I = -2\displaystyle\int \frac{dt}{t^2-2t-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\log|t-1-\sqrt{2}| + \frac{\sqrt{2}}{2}\log|t-1+\sqrt{2}|$.

También se puede escribir $-2\displaystyle\int \frac{dt}{t^2-2t-1} = \sqrt{2}\operatorname{ArgTh}\Big({}^{\sqrt{2}}\!/_2(t-1)\Big)$.

5.4.- C.v. $\operatorname{tg}({}^x\!/_2) = t$: $I = -\log|1-t^2|$.

6.1.- Aplicar el c.v. $\operatorname{sen}(x) = t$: $I = \displaystyle\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\log|t-1| + \frac{1}{2}\log|t+1|$.

6.2.- Con el c.v. $\cos(x) = t$, $I = -\displaystyle\int (1-t^2)t^4\,dt = \frac{1}{7}\cos^7(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x)$.

6.3.- C.v. $\operatorname{sen}(x) = t$:

$$I = \int \frac{2-t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt = -\frac{1}{4}\log|t-1| + \frac{1}{4}\log|t+1| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(t).$$

6.4.- C.v. $\operatorname{tg}(x) = t$: $I = t - \operatorname{arctg}(t)$. **6.5.-** Con $\operatorname{tg}(x) = t$, $I = t - \dfrac{1}{t}$.

6.6.- El c.v. $\operatorname{tg}(x) = t$ conduce a $I = \displaystyle\int \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}({}^{a\operatorname{tg}(x)}\!/_b)$.

7.1.- Puesto que

$$\cos(2x)\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{1}{4},$$

tenemos que $I = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \dfrac{1}{16}\operatorname{sen}(4x) - \dfrac{x}{4}$.

7.2.- $\dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(2x)}{\cos(x)} = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, luego $I = \operatorname{sen}^2(x) + \log|\cos(x)|$.

7.3.- Como $\operatorname{sen}(3x) = 4\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)$, el c.v. $\cos(x) = t$ lleva a

$$\int \frac{dt}{(t^2-1)t(4t^2-1)} = {}^1\!/_6 \log|t-1| + {}^1\!/_6\log|t+1| + \log|t| - {}^2\!/_3\log|2t-1| - {}^2\!/_3\log|2t+1|.$$

8.1.- C.v. $e^x = t$: $I = \displaystyle\int \frac{t^2-t+1}{t(t-2)}\,dt = t + {}^3\!/_2\log|t-2| - {}^1\!/_2\log|t|$.

8.2.- Como en el anterior, $I = \dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}({}^{at}\!/_b) = \dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}({}^{ae^x}\!/_b)$.

9.1.- $\displaystyle\int \operatorname{Ch}^2(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\Big(1 + \operatorname{Ch}(2x)\Big)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{Sh}(2x)$.

9.2.- C.v. $\operatorname{Tgh}({}^x\!/_2) = t$: $I = \log|t|$.

9.3.- C.v. $\operatorname{Tgh}(x) = t$: $I = \displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg}(t)$.

9.4.- C.v. $\operatorname{Sh}({}^x\!/_2) = t$: $I = 2t + \dfrac{2}{3}t^3$.

10.1.- C.v. $x = t^4$: $I = \displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}\,4t^3\,dt = \frac{4}{3}t^3 - 4t + 4\operatorname{arctg}(t)$.

10.2.- Tras el c.v. $x + 1 = t^2$,

$$I = 2\int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}\,dt = 2\log|t-1| - \log(t^2+t+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}(2t+1)\Big).$$

10.3.- Hacemos $\dfrac{1+x}{1-x} = t^2$, de donde $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}\,dt$, y

$$\begin{aligned} I &= 4\int \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)(t^2+1)^2}\,dt \\ &= -\frac{1}{3}\log|t+1| - \frac{4}{3}\log(t^2-t+1) + \frac{3}{2}\log(t^2+1) - \frac{t+1}{t^2+1}. \end{aligned}$$

10.4.- Con el c.v. $x = t^6$, $I = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log|t+1|$.

11.1.- C.v. $x^2 = t$, $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int t^{-2}\Big(\frac{a+bt}{t}\Big)^{-5/2}dt$; si $\dfrac{a+bt}{t} = s$, $I = \dfrac{1}{3a}s^{-3/2}$.

11.2.- C.v. $x^{-1/2} = t$: $I = -2\displaystyle\int \frac{t^2+2t+1}{t^5}\,dt = t^{-2} + \frac{4}{3}t^{-3} + \frac{1}{2}t^{-4}$.

11.3.- C.v. $x^5 = t$: $I = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int \frac{dt}{t(1+t)^{1/3}}$. C.v. $1 + t = s^3$:

$$I = \frac{3}{5}\int \frac{s\,ds}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{1}{5}\log|s-1| - \frac{1}{10}\log(s^2+s+1) + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}({}^{\sqrt{3}}\!/_3(2s+1)).$$

11.4.- C.v. $x^{2/3} = t$: $I = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int t^2(t+2)^{1/2}\,dt$; c.v. $t+2 = s$: $I = \dfrac{3}{7}s^{7/2} - \dfrac{12}{5}s^{5/2} + 4s^{3/2}$.

11.5.- C.v. $x^2 = t$: $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{t\,dt}{(1+2t)\sqrt{1+2t}}$; c.v. $1+2t = u^2$: $I = \dfrac{1}{4}u + \dfrac{1}{4u}$.

11.6.- C.v. $x^3 = t$: $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \Big(\dfrac{t}{2+t}\Big)^{5/3}\dfrac{dt}{t^3}$; c.v. $\dfrac{t}{2+t} = u^3$: $I = \dfrac{1}{10}u^5 - \dfrac{3}{8}u^2 - \dfrac{1}{4u}$.

12.1.- Como $2+3\,x-2\,x^2 = \dfrac{25}{8}\Big[1-\big(\dfrac{4}{5}\,x-\dfrac{3}{5}\big)^2\Big]$, se aplica el c.v. $\dfrac{4}{5}\,x-\dfrac{3}{5} = \operatorname{sen}(t)$:

$$I = \int \frac{\frac{5}{4}\cos(t)\,dt}{\frac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\Big(\frac{4}{5}\,x-\frac{3}{5}\Big).$$

12.2.- $x^2-x+1 = \dfrac{3}{4}\Big[1+\big(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\big)^2\Big]$; c.v. $\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} = \operatorname{Sh}(t)$:

$$I = \frac{3}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Ch}(t) = \frac{3}{2}\operatorname{ArgSh}\big(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\big) + \sqrt{x^2-x+1}.$$

12.3.- C.v. $x = \operatorname{sen}(t)$:

$$I = \int \big(\operatorname{sen}^3(t)+1\big)\,dt = t + \int \operatorname{sen}(t)\big(1-\cos^2(t)\big)\,dt = t-\cos(t)+\frac{1}{3}\cos^3(t).$$

12.4.- $3-2\,x-x^2 = 4\Big[1-\big(\dfrac{x+1}{2}\big)^2\Big]$; c.v. $\dfrac{x+1}{2} = \operatorname{sen}(t)$:

$$I = 4\int \cos^2(t)\,dt = 2t+\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{arcsen}\big(\frac{x+1}{2}\big) + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2\,x-x^2}.$$

12.5.- C.v. $x-1 = \operatorname{sen}(t)$: $I = \dfrac{3}{2}t - 2\cos(t) - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)$.

13.1.- En este y en los siguientes apartados denominaremos I_n a la integral propuesta. Integramos por partes eligiendo $u = \log^n(x)$, $dv = dx$, y resulta que

$$I_n = x\log^n(x) - \int xn\log^{n-1}(x)\frac{1}{x}\,dx = x\log^n(x) - nI_{n-1}, \quad n\geq 1; \quad I_0 = x.$$

Cuando $n = 3$,

$$\begin{aligned}\int \log^3(x)\,dx = I_3 = x\log^3(x) - 3I_2 &= x\log^3(x) - 3\Big(x\log^2(x) - 2I_1\Big)\\ &= x\log^3(x) - 3x\log^2(x) + 6\Big(x\log(x) - I_0\Big)\\ &= x\log^3(x) - 3x\log^2(x) + 6x\log(x) - 6x.\end{aligned}$$

13.2.- $I_0 = x$, $I_1 = -\cos(x)$. Para $n \geq 2$, integramos por partes tomando $u = \operatorname{sen}^{n-1}(x)$, $dv = \operatorname{sen}(x)\,dx$:

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)(I_{n-2}-I_n).$$

Despejando, $I_n = -\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$; $I_3 = -\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^2(x)\cos(x) - \dfrac{2}{3}\cos(x)$.

13.3.- Análogamente, $I_0 = x$, $I_1 = \operatorname{sen}(x)$, $I_n = \dfrac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x) + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. Cuando $n = 3$, $I_3 = \dfrac{1}{3}\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) + \dfrac{2}{3}\operatorname{sen}(x)$.

13.4.- $I_0 = 1$ e $I_1 = -\log|\cos(x)|$. Si $n \geq 2$, como $\operatorname{tg}'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$,

$$I_n = \int \operatorname{tg}^{n-2}(x)\Big(1 + \operatorname{tg}^2(x)\Big)\,dx - I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}(x) - I_{n-2}.$$

En particular, $I_3 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x) - I_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x) + \log|\cos(x)|$.

13.5.- Integrando por partes reiteradamente, $I = -(x^3 + 4x^2 + 6x + 6)e^{-x}$.

13.6.- Análogamente, $I = -\dfrac{1}{2}x^5\cos(2x) + \Big(\dfrac{5}{4}\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)\Big)x^4 + \Big(\dfrac{5}{2}\cos(2x) + 4\operatorname{sen}(2x)\Big)x^3 + \Big(-\dfrac{15}{4}\operatorname{sen}(2x) + 6\cos(2x)\Big)x^2 + \Big(-6\operatorname{sen}(2x) - \dfrac{15}{4}\cos(2x)\Big)x + \dfrac{15}{8}\operatorname{sen}(2x) - 3\cos(2x)$.

13.7.- Llamemos I_n a la integral, $n \geq 0$. $I_0 = e^{x^2/2}$. Para $n \geq 1$, tomando $u = x^{2n}$ y $dv = xe^{x^2/2}$, $I_n = x^{2n}e^{x^2/2} - 2n\displaystyle\int x^{2n-1}e^{x^2/2}\,dx = x^{2n}e^{x^2/2} - 2n\,I_{n-1}$.

14.1.- El c.v. $x = e^t$ conduce a $I = \displaystyle\int e^{4t}t^2\,dt = \frac{1}{4}t^2e^{4t} - \frac{1}{8}te^{4t} + \frac{1}{32}e^{4t}$.

14.2.- Con el cambio $x = \cos(t)$,

$$I = -\int \Big(t\operatorname{sen}(t)\cos^2(t) - t\operatorname{sen}(t)\cos(t) - t\operatorname{sen}(t)\Big)\,dt = \frac{1}{3}t\cos^3(t) + \frac{1}{2}t\cos^2(t)$$
$$+\, t\cos(t) - \frac{1}{9}\cos^2(t)\operatorname{sen}(t) - \frac{11}{9}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{4}\cos(t)\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{4}t.$$

14.3.- Haciendo $x = \operatorname{sen}(t)$, la integral dada es $I_n = \displaystyle\int t\operatorname{sen}^n(t)\cos(t)\,dt$; si aplicamos partes con $u = t$, resulta que

$$I_n = \frac{1}{n+1}t\operatorname{sen}^{n+1}(t) - \frac{1}{n+1}\int \operatorname{sen}^{n+1}(t)\,dt,$$

y esta última integral ya ha sido calculada en el apartado 13.2.

TEMA 7 INTEGRAL DE RIEMANN

Al tratar con figuras planas simples, tales como rectángulos y triángulos, la noción de área tiene una interpretación intuitiva clara en términos de las dimensiones de sus lados; este concepto es bastante antiguo, de hecho, la matemática de la Grecia clásica fundamentaba la aritmética en las propiedades geométricas: por ejemplo, el resultado de multiplicar dos números positivos a y b, se interpretaba como el área de un rectángulo cuyos lados miden a y b; así, la propiedad distributiva del producto respecto de la suma se expresa: "El área de la unión es la suma de las áreas".

Al intentar extender el concepto de área o "medida" a conjuntos más generales esto deja de ser válido; no obstante, en las situaciones usuales los conjuntos pueden ser "aproximados" por uniones de rectángulos, y su área por las sumas de las de estos últimos. Mencionaremos que Arquímedes obtuvo ya el área limitada por un arco de parábola y una recta como límite de áreas de uniones de rectángulos.

Sin embargo, no fue hasta mucho más tarde que se fundamentó rigurosamente esta teoría, principalmente por la contribución de matemáticos como Dirichlet o Cauchy, y culminada posteriormente por Riemann, de quien recibe el nombre; aunque la integral de Riemann presenta todavía algunas deficiencias, solventadas por otras teorías como la de Lebesgue, es suficiente para abordar la mayoría de los problemas que se presentan habitualmente en las ciencias.

§ 1 DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL.

Definición 1.1.- Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Se llama *partición* de $[a, b]$ a todo conjunto

$$P = \{ x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b \},$$

donde $x_{i-1} < x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son los subintervalos de la partición, y su *amplitud* se define como $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Se llama *diámetro* de la partición al número

$$\|P\| = \max\{ \Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n \}.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Definición 1.2.- Sea f una función real definida en $[a,b]$ y acotada. Dada una partición $P = \{ x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b \}$ de $[a,b]$, y elegido un punto t_i en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, el conjunto $T = \{ t_1, t_2, \ldots, t_n \}$ se denomina *conjunto de puntos intermedios asociado a P.*

Denotaremos por $\mathcal{T}(P)$ a la familia de los conjuntos de puntos intermedios asociados a la partición P.

Si $T \in \mathcal{T}(P)$ se llama *suma de Riemann asociada a f, a P y a T* al número

$$\sigma(f,P,T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

Definición 1.3.- Sea f una función real definida en $[a,b]$ y acotada. Se dice que f es *integrable Riemann* (o simplemente, *integrable*) en $[a,b]$ si existe un número real $I(f)$ que verifica la siguiente propiedad: "Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$ y para cada $T \in \mathcal{T}(P)$ se tiene que

$$|I(f) - \sigma(f,P,T)| < \varepsilon.$$

En este caso, el número $I(f)$ se denomina la *integral de f en* $[a,b]$, y se denota por

$$\int_a^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación 1.4.- La existencia de funciones integrables es obvia; basta considerar las funciones constantes. Sin embargo, no toda función acotada es integrable. Considérese por ejemplo la función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases}$$

§ 2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN.

A la hora de estudiar la integrabilidad de una función, la definición suele ser poco cómoda. Este epígrafe se dedica, en primer lugar, a establecer condiciones suficientes de integrabilidad y mostrar que la clase de funciones integrables contiene a una amplia gama de funciones. A continuación se presentan las propiedades fundamentales de la integral.

Teorema 2.1.- Toda función continua en $[a,b]$ es integrable.

Teorema 2.2.- Toda función monótona en $[a,b]$ es integrable.

Proposición 2.3.- Sean f y g funciones reales definidas en $[a, b]$ e integrables, y sea $k \in \mathbb{R}$.

2.3.1.- Linealidad: Las funciones $f + g$ y $k\,f$ son integrables en $[a, b]$, y se tiene que

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \text{y} \qquad \int_a^b kf = k\int_a^b f\,.$$

2.3.2.- Monotonía: Si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g\,.$$

2.3.3.- La función $|f|$ es integrable en $[a, b]$, y

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b |f|\,.$$

El recíproco no es cierto, es decir, la integrabilidad de $|f|$ no implica la de f. Basta considerar la función definida en $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Proposición 2.4.- Sea f una función integrable en $[a, b]$ y tal que $f([a, b]) \subset [c, d]$. Sea g una función continua en $[c, d]$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

Observación 2.5.- La composición de dos funciones integrables puede no ser integrable.

Corolario 2.6.- Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$. Entonces:

i) f^2 y fg son integrables en $[a, b]$.

ii) Si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq \delta$ para cada $x \in [a, b]$, la función $1/f$ es integrable en $[a, b]$.

Proposición 2.7.- (**aditividad respecto del intervalo**)

i) Si f es integrable en $[a, b]$, lo es en todo subintervalo de $[a, b]$.

ii) Recíprocamente, sea $c \in (a, b)$ de modo que f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$.

Entonces, f es integrable en $[a, b]$, y se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Notación: Para $\alpha < \beta$ se conviene que

$$\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f\,, \qquad \text{y} \qquad \int_\alpha^\alpha f = 0\,.$$

Con este convenio, dados tres números reales cualesquiera α, β, $\gamma \in [a, b]$ se cumple que

$$\int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f = \int_\alpha^\beta f,$$

relación conocida como *Identidad de Chasles*.

Proposición 2.8.- Sean f y g funciones acotadas en $[a, b]$ que difieren en un conjunto finito de puntos de $[a, b]$. Entonces, f y g son simultáneamente integrables o no integrables, y, en caso de serlo, se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Como consecuencia de los dos últimos resultados, se obtienen nuevos criterios de integrabilidad.

Definición 2.9.- Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b]$.

Se dice que f es *continua a trozos* si existe una partición

$$P = \{\, x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b \,\} \in \mathcal{P}([a, b])$$

de modo que f es continua en (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, y existen los límites laterales (finitos) en cada punto de la partición.

Si además f es constante en cada subintervalo, se dice *escalonada*.

Se dice que f es *monótona a trozos* si existe una partición $P \in \mathcal{P}([a, b])$ de manera que f es monótona en cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) que define P.

Corolario 2.10.- Toda función continua a trozos en $[a, b]$ es integrable.

Corolario 2.11.- Toda función acotada y monótona a trozos en $[a, b]$ es integrable.

A partir del teorema de Bolzano se deduce la siguiente propiedad:

Teorema de la Media 2.12.- Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea g una función integrable en $[a,b]$ tal que $g(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$. Entonces, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f\,g = f(c) \int_a^b g.$$

Observaciones 2.13.-

i) Si se toma g idénticamente igual a 1, se deduce que para una función continua f en $[a,b]$ existe $c \in (a,b)$ de modo que

$$\int_a^b f = f(c)\,(b-a).$$

ii) Si se suprime la hipótesis de que g sea positiva el resultado es, en general, falso. Basta considerar, en el intervalo $[-1,1]$, la función identidad $f(x) = x$ y

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1,0]; \\ 1 & \text{si } x \in (0,1]. \end{cases}$$

iii) Una versión más fuerte del teorema anterior se obtiene al imponer la integrabilidad de f en lugar de su continuidad. En este caso se tiene que:

Si $m, M \in \mathbb{R}$ son tales que $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a,b]$, existe un número $\mu \in [m,M]$ tal que

$$\int_a^b f\,g = \mu \int_a^b g.$$

§ 3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL. CONSECUENCIAS.

En este epígrafe se presenta el resultado que le da título y los que de él se derivan. En particular se deduce que toda función continua en un intervalo admite primitiva y se obtienen mecanismos para la integración práctica.

Teorema Fundamental del Cálculo Integral 3.1.-

Sea f una función integrable en $[a,b]$. Se define la función real F dada por

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a,b].$$

i) La función F es continua en $[a,b]$.

ii) Si f es continua en $c \in [a,b]$, F es derivable en c y además

$$F'(c) = f(c)\,.$$

Observaciones 3.2.-

i) Si c es uno de los extremos del intervalo, la continuidad de f se entiende por la derecha (si $c = a$) o por la izquierda (si $c = b$), deduciéndose la existencia de la derivada lateral correspondiente de F en c.

ii) Si se supone f continua en $[a, b]$, F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a, b]$ y se tiene que $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$. Por lo tanto, F es una primitiva de f, y se concluye que toda función continua en $[a, b]$ admite primitiva.

Regla de Barrow 3.3.-

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea F una primitiva de f en dicho intervalo (i.e., $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$). Entonces, para cada $x \in [a, b]$ se verifica que

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)\,.$$

Una versión más fuerte la da el siguiente resultado conocido como *Regla de Barrow generalizada* o *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo*:

Teorema 3.4.- Sea f una función integrable en $[a, b]$ que admite una primitiva, F, en dicho intervalo. Entonces, para cada $x \in [a, b]$ se verifica que

$$\int_a^x f = F(x) - F(a).$$

Notación: Si F es una función definida en un intervalo $[a, b]$ y $c, d \in [a, b]$ es usual escribir

$$F(d) - F(c) = F(x)\Big|_{x=c}^{x=d}.$$

Fórmula de Integración por Partes 3.5.-

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$ con primitivas F y G, respectivamente. Se tiene que

$$\int_a^b F\,g = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f\,G\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$\int_a^b F\,G' = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b F'\,G\,.$$

Teorema del Cambio de Variable 3.6.-

Sea φ una función definida en $[c,d]$, derivable y con derivada continua, y de modo que $\varphi([c,d]) \subset [a,b]$. Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces, se verifica que

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f = \int_c^d (f\circ\varphi)\,\varphi' \,.$$

Corolario 3.7.- Sea φ una función definida en $[c,d]$, derivable y cuya derivada es continua y de signo constante (estas hipótesis garantizan que φ es una biyección, necesariamente monótona, entre $[c,d]$ y un intervalo $[a,b]$). Si f es una función continua en $[a,b]$, se verifica que

$$\int_a^b f = \int_c^d (f\circ\varphi)\,|\varphi'|\,.$$

Observación 3.8.- Los resultados relativos al teorema del Cambio de Variable se verifican igualmente con la sola hipótesis de la integrabilidad de f, deduciéndose en este caso la integrabilidad de $(f\circ\varphi)\,\varphi'$, y la igualdad de las integrales correspondientes.

§ 4 APLICACIÓN DE LA INTEGRAL AL CÁLCULO DE ÁREAS

Consideremos el recinto R del plano limitado por las rectas verticales $x=a$, $x=b$ (con $a<b$) y las gráficas de dos funciones f y g, continuas en $[a,b]$, y tales que $f(x)\geq g(x)$, para cada $x\in[a,b]$.

El *área* de este recinto se define como

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

Esto se generaliza al caso de funciones arbitrarias f y g, mediante la fórmula

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

§ 5 EJERCICIOS.

1.- Determinar un polinomio P tal que $P(0)=P(1)=0$ y

$$\int_0^1 P(x)\,dx = 1\,.$$

2.- Demostrar las siguientes desigualdades:

2.1.- $\dfrac{1}{6} \leq \displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{10+x} \leq \frac{1}{5}$. **2.2.-** $\dfrac{1}{10\sqrt{2}} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{10}$.

3.- Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas y tales que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

4.- Sea f una función real, integrable en $[a,b]$, con $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$. Probar que, si f es continua en un punto $c \in [a,b]$ y $f(c) > 0$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0\,.$$

5.- Sea f una función integrable en $[-\alpha, \alpha]$, con $\alpha > 0$. Demostrar que:

i) Si f es par, $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 2\int_0^{\alpha} f(t)\,dt\,.$

ii) Si f es impar, $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0\,.$

6.- Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo α. Probar que la función F, definida en $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt\,,$$

es constante.

7.- Calcular:

7.1.- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \max\big\{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big\}\,dx.$

7.2.- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)\,\operatorname{sen}^3(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx.$

7.3.- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log(x)}\,dx.$

7.4.- $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx.$

7.5.- $\displaystyle\int_{-3}^{3} \big|x(x-1)(x+1)(x-2)\big|\,dx.$

7.6.- $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\log(x)|\,dx.$

8.- Para $x > -1$ se define

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}.$$

i) Determinar explícitamente $f(x)$.

ii) Mediante una integración por partes, demostrar la relación

$$2\,f(x) = 3\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^2} - \frac{x}{1+x^3}, \qquad x > -1\,.$$

iii) Expresar en función de f, mediante un cambio de variable, la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\alpha^3 + t^3}, \qquad \text{con } \alpha > 1,\ x > -1\,.$$

9.- Sea g una función continua en $\mathbb{R}$. Se considera la función f definida por

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t)\, g(x-t)\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Probar que f admite derivada segunda en $\mathbb{R}$ y se satisface la relación

$$f'' + f \equiv g\,.$$

10.- Sea f una función real continua en $\mathbb{R}$, y sean u y v dos funciones reales derivables en $\mathbb{R}$. Se define la aplicación g en $\mathbb{R}$ mediante

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\,.$$

Demostrar que g es derivable en $\mathbb{R}$ y que

$$g'(x) = f\big(v(x)\big)\, v'(x) - f\big(u(x)\big)\, u'(x)\,.$$

11.- Calcular la derivada de las siguientes funciones:

11.1.- $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{t^4 + t^2 + 2}\, dt.$

11.2.- $f(x) = \displaystyle\int_1^{\cos(x)} \operatorname{sen}(t)\, dt.$

11.3.- $f(x) = \displaystyle\int_0^{\int_1^x t dt} t^3\, dt.$

11.4.- $f(x) = \displaystyle\int_{\int_1^{x^2} t dt}^{\int_0^{\cos(2x)} t dt} t^2\, dt.$

11.5.- $f(x) = \displaystyle\int_3^{x^2} \frac{1 + t^2}{2 + t^6}\, dt.$

11.6.- $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}.$

12.- Sea f la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}}\,.$$

i) Demostrar que f es impar.

ii) Calcular $f'(x)$ y estudiar la variación de f.

iii) Probar que para cada $t > 1$ se tiene que

$$\frac{1}{t^2 + 1} < \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}} < \frac{1}{t^2}\,,$$

y deducir que si $x > 1$, entonces

$$\operatorname{arctg}(2x) - \operatorname{arctg}(x) < f(x) < \frac{1}{2x}\,.$$

iv) Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

13.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2)\,dt}{x}$.

14.- Probar que la función

$$f(x) = \int_{1-x}^{1+x} \log(t^2)\,dt$$

es decreciente en $[0, 1/2]$.

15.- Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 3. \end{cases}$$

Se define la función F en $[0, 3]$ por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Probar que F es continua en dicho intervalo y no es derivable en $x = 1$.

¿Admite f primitiva en el intervalo $[0, 3]$?

16.- Hallar los extremos relativos de la función f definida de $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t)\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(t)} dt.$$

17.- Probar que la ecuación

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt = 1$$

tiene una sola solución, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.

18.- i) Probar que para cada $x \ge 0$ se tiene que $x - \dfrac{x^3}{6} \le \operatorname{sen}(x) \le x$.

ii) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}\,dt$.

19.- Sean $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable y $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0; \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } 0 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

i) Probar que si f es continua en 0, entonces F es continua en $[0,1]$.

ii) Probar que si f es continua en $[0,1]$ y derivable en 0, entonces F es derivable en $[0,1]$. Además, $f'(0) = 2\,F'(0)$.

20.- Calcular los siguientes límites:

20.1.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt}{x^3}$.

20.2.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right)^2}{\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,dt}$.

21.- Calcular:

21.1.- El área comprendida entre la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y la cuerda de ecuación $x = h$, con $h > a$.

21.2.- El área comprendida entre las parábolas de ecuaciones

$$y^2 = a\,x \qquad \text{y} \qquad x^2 = b\,y\,.$$

21.3.- El área del recinto limitado por la curva de ecuación

$$y = x^3 - x$$

y su tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

21.4.- El área del sector parabólico que determina la recta que pasa por los puntos $(16, 12)$ y $(4, -6)$ sobre la parábola de ecuación $y^2 = 9\,x$.

21.5.- El área comprendida entre el eje OX y cada una de las siguientes curvas, de ecuaciones:

21.5.1.- $y = x^2 - 6x + 5$.

21.5.2.- $y^2 = 4x^2 - x^4$.

21.5.3.- $y = x^3 - 4x^2$.

21.5.4.- $y = \operatorname{sen}(2x)$, $0 \leq x \leq 4\,\pi$.

§ 6 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.- $P(x) = ax^2 + bx + c$. $P(0) = 0 \Rightarrow c = 0$; $P(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$, es decir, $b = -a$. $\int_0^1 P(x)\,dx = 1 \Rightarrow a = -6$. Así, $P(x) = 6x - 6x^2$.

2.1.- $\dfrac{1}{12} \le \dfrac{1}{10+x} \le \dfrac{1}{10}$, $x \in [0,2]$. **2.2.-** $\dfrac{x^9}{\sqrt{2}} \le \dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}} \le x^9$, $x \in [0,1]$.

3.- Aplicar el teorema de la media a la función $f - g$.

4.- Utilícese que f es continua en c para construir un rectángulo apoyado en el eje OX y situado bajo la gráfica de f.

5.- i) El cambio de variable $t = -u$ permite escribir

$$\int_{-\alpha}^{0} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{0} f(-u)\,(-du) = \int_{0}^{\alpha} f(-u)\,du = \int_{0}^{\alpha} f(u)\,du.$$

ii) Se razona como en el apartado anterior.

6.- $F(x) = \displaystyle\int_0^{x+\alpha} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$; el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de la cadena garantizan que F es derivable en $\mathbb{R}$, y que $F'(x) = 0$.

7.1.- $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \operatorname{sen}(x)\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} \cos(x)\,dx = 2\sqrt{2}$.

7.2.- Cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$; $I = \dfrac{3}{4} - \log(2)$. **7.3.-** $I = \log(2)$.

7.4.- Cambio de variable $x = \operatorname{Sh}(u)$; $I = \operatorname{ArgSh}(2) - \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = -\log(\sqrt{5} - 2) - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

7.5.- Si $f(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)$,

$$I = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{0} (-f(x))\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} (-f(x))\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx = \frac{1226}{15}.$$

7.6.- $I = \displaystyle\int_{1/e}^{1} (-\log(x))\,dx + \int_1^e \log(x)\,dx = 2$.

8.- i) $f(x) = \dfrac{1}{3}\log(x+1) - \dfrac{1}{6}\log(x^2 - x + 1) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

ii) Tras aplicar partes (con $u = \dfrac{1}{1+t^3}$), utilícese que $\dfrac{t^3}{(1+t^3)^2} = \dfrac{1}{1+t^3} - \dfrac{1}{(1+t^3)^2}$.

iii) Con el cambio de variable $t = \alpha u$ se deduce que $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\alpha^3 + t^3} = \frac{1}{\alpha^2} f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

9.- El cambio de variable $x - t = u$ transforma f en

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \int_0^x \cos(u)\, g(u)\, du - \cos(x) \int_0^x \operatorname{sen}(u)\, g(u)\, du.$$

10.- $g(x) = \displaystyle\int_0^{v(x)} f(t)\, dt - \int_0^{u(x)} f(t)\, dt = F(v(x)) - F(u(x))$, si $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Entonces, $g'(x) = F'\big(v(x)\big)\, v'(x) - F'\big(u(x)\big)\, u'(x) = f\big(v(x)\big)\, v'(x) - f\big(u(x)\big)\, u'(x)$.

11.1.- $f'(x) = \dfrac{e^x}{x^4 + x^2 + 2}$. **11.2.-** $f'(x) = -\operatorname{sen}(\cos(x))\, \operatorname{sen}(x)$.

11.3.- $f'(x) = \big(\frac{1}{2}(x^2 - 1)\big)^3\, x$. **11.4.-** $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\cos^5(2x)\operatorname{sen}(2x) - \dfrac{1}{2}\, x^3 (x^4 - 1)^2$.

11.5.- $f'(x) = \dfrac{2x + 2x^5}{2 + x^{12}}$. **11.6.-** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^4}}\, 2x - \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

12.- i) $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4 + (-u)^2 + 2}} = -f(x)$.

ii) f es decreciente en $(-\infty, -1/\sqrt[4]{2}) \cup (1/\sqrt[4]{2}, +\infty)$, y creciente en $(-1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2})$.

iii) Si $t > 1$, $t^2 + 1 > \sqrt{t^4 + t^2 + 2} > t^2$, luego $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2 + 1} < f(x) < \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.

iv) $0 < f(x) < \dfrac{1}{2x}$.

13.- Con la regla de L'Hôpital, $L = 1$.

14.- $f'(x) = \log((1 + x)^2)\, (1 + x)' - \log((1 - x)^2)\, (1 - x)' = 2\log(1 - x^2) < 0$.

15.- $F(x) = \int_0^x 1\, dt = x$, $x \in [0, 1]$; $F(x) = \int_0^1 1\, dt + \int_1^x 2\, dt = 2x - 1$, $x \in (1, 3]$. $F'(x) = 1$ si $x \in [0, 1)$, y $F'(x) = 2$ si $x \in (1, 3]$; sin embargo, $F'(1^-) = 1 \neq F'(1^+) = 2$. f no admite primitiva en $[0, 3]$.

16.- $f'(x) = \operatorname{sen}(x^2)\, \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^2)}\, 2x$; si $x_k = \sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, f presenta en x_{2k} un mínimo relativo, y en x_{2k-1} un máximo relativo.

17.- La función $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$ es derivable en $\mathbb{R}$. $f'(x) = e^{x^2} > 0$, luego f es inyectiva. $f(0) = 0$, $f(1) = \int_0^1 e^{t^2}\, dt \geq \int_0^1 1\, dt = 1$.

18.- i) Probar que las funciones $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x) - x + \dfrac{x^3}{6}$ son no negativas en $[0, \infty)$.
ii) Utilizar i) para acotar la integral entre otras dos que tienen límite igual a $\log(3)$ cuando x tiende a 0^+. Concluir con el criterio del sandwich.

19.- i) La función g dada por $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in [0,1]$, es continua, luego F es continua en $(0,1]$. Si f es continua en $x=0$, g es derivable en $x=0$ y $g'(0) = f(0)$. Para cada $x \in (0,1]$,

$$F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0},$$

luego $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = g'(0) = f(0) = F(0)$.

ii) La función g es derivable en $[0,1]$, por lo que F es derivable en $(0,1]$. Además,

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt - f(0)\,x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{2\,x} = \frac{1}{2}f'(0).$$

20.1.- Aplicando la regla de L'Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^3} = \dfrac{2}{3} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x^3} = -\dfrac{2}{3}$.

20.2.- Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces, el límite vale 0.

21.1.- $A = 2\frac{b}{a}\int_a^h \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}h\sqrt{h^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\log\Big(h+\sqrt{h^2-a^2}\Big) + \frac{1}{2}a^2\log(a)$.

21.2.- $A = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{ab^2}} |\sqrt{a\,x} - \frac{x^2}{b}|\,dx = \frac{a\,b}{3} > 0.$

21.3.- $A = \Big|\displaystyle\int_{-1}^{2} \big(2x+2-(x^3-x)\big)\,dx\Big| = \frac{27}{4}.$

21.4.- $A = 2\displaystyle\int_0^4 3\sqrt{x}\,dx + \int_4^{16} \Big[3\sqrt{x} - \big(\frac{3}{2}x-12\big)\Big]\,dx = 108.$

21.5.1.- $A = -\displaystyle\int_1^5 (x^2-6x+5)\,dx = \frac{32}{3}.$

21.5.2.- $A = \displaystyle\int_{-2}^{2} +\sqrt{4x^2-x^4}\,dx = \frac{16}{3}.$ **21.5.3.-** $A = -\displaystyle\int_0^4 (x^3-4x^2)\,dx = \frac{64}{3}.$

21.5.4.- $A = 4\displaystyle\int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(2x)|\,dx = 4\Big(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}(2x)\,dx\Big) = 8.$

TEMA 8 INTEGRALES IMPROPIAS

La integral de Riemann se define para funciones reales acotadas definidas en intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$. Sin embargo, para el estudio de diversos problemas de las Ciencias se hace necesario dar una extensión del concepto de integral que permita la consideración de funciones y/o intervalos no acotados; por ejemplo, en el cálculo del área de una región plana limitada por la gráfica de una función no acotada, o en el cálculo de la energía transportada por una onda que se propaga indefinidamente en el tiempo.

Aunque estas y otras deficiencias de la integral de Riemann son solventadas por teorías de integración más avanzadas, es posible ampliar de forma sencilla el concepto de integral de Riemann al contexto más general ya mencionado de funciones o intervalos no acotados. El estudio de estas nuevas integrales (*impropias*) es el objeto de este tema.

§ 1 DEFINICIONES Y PRIMERAS PROPIEDADES.

Definición 1.1.- Sea f una función real definida en un intervalo I de la recta real (de cualquier naturaleza, cerrado o no, acotado o no). Se dice que f es *localmente integrable* en I (*en el sentido de Riemann*, se sobreentiende) si es integrable en el sentido de Riemann en todo intervalo cerrado y acotado contenido en I.

Definición 1.2.- Sea f una función real definida en un intervalo de la forma $[a, b)$, donde a es un número real y b puede ser un número real o $+\infty$. Supongamos que f es localmente integrable en $[a, b)$, lo que equivale a que para cada $x \in (a, b)$, f sea integrable en $[a, x]$. Se dice que f es *integrable en el sentido impropio* en $[a, b)$ si existe y es finito

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt\,.$$

En este caso, dicho número se denomina *integral impropia* de f en $[a, b)$ y se denota por

$$\int_a^{\to b} f(x)\, dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^{\to b} f\,.$$

Observación 1.3.- Por una mayor simplicidad, se adoptará también en lo sucesivo la notación

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f\,,$$

siendo sencillo en cada caso concreto determinar, a partir de la naturaleza del intervalo de integración o la de la función f, si la integral es impropia o de Riemann. La integrabilidad de una función se expresa también diciendo que la integral impropia correspondiente es *convergente*, mientras que si el límite expresado arriba es infinito o no existe, se dice que la integral impropia *no converge*. Estudiar la *naturaleza* o *carácter* de la integral impropia consiste en determinar su convergencia o su no convergencia.

Observación 1.4.- La definición de integral impropia se extiende de forma natural al caso de funciones reales f definidas en intervalos de la forma $(a, b]$ (donde a es un número real o $-\infty$ y b es un número real) y que son localmente integrables en $(a, b]$, es decir, integrables Riemann en cada intervalo $[x, b]$ con $a < x < b$. En este caso, la integral impropia se dirá *convergente* si existe y es finito el límite

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt\,,$$

cuyo valor se denotará también por

$$\int_{\to a}^b f(x)\, dx \qquad \text{o} \qquad \int_{\to a}^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f\,.$$

El siguiente resultado muestra la equivalencia de la integral de Riemann con la integral impropia para cierta clase de funciones acotadas. Aunque es válido también en la segunda situación descrita, se expone, por razones de brevedad, para integrales impropias del primer tipo.

Proposición 1.5.- Si f es una función real definida e integrable en el intervalo compacto $[a, b]$, entonces la integral impropia de f en $[a, b)$ converge y además su valor coincide con la integral de Riemann de f en $[a, b]$,

$$\int_a^{\to b} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Recíprocamente, si f es una función localmente integrable en $[a, b)$ y tal que existe y es finito el límite

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell\,,$$

entonces la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ converge; la función

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b), \\ \ell & \text{si } x = b, \end{cases}$$

resultado de extender f por continuidad, es integrable Riemann en $[a,b]$, y su integral coincide con la integral impropia de f en $[a,b)$.

Ejemplo: La función f definida en $I=(0,1]$ por

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

es continua en I, y $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$. Entonces, la integral impropia $\int_0^1 f$ converge, y coincide con el valor de la integral de Riemann en $[0,1]$ de la función

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x\in(0,1],\\ 1 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

que es continua en $[0,1]$.

Antes de definir un nuevo tipo de integrales impropias (que contempla ya intervalos de cualquier naturaleza) se presenta un resultado que garantiza la coherencia de la definición siguiente.

Lema 1.6.- Sea f una función real definida en un intervalo (a,b), donde $a\in\mathbb{R}$ ó $a=-\infty$ y $b\in\mathbb{R}$ ó $b=+\infty$. Supongamos que f es localmente integrable en (a,b). Si existe $c\in(a,b)$ tal que las integrales impropias

$$\int_{\to a}^{c} f \qquad \text{y} \qquad \int_{c}^{\to b} f$$

son convergentes, entonces para cada $d\in(a,b)$ se tiene que las integrales

$$\int_{\to a}^{d} f \qquad \text{y} \qquad \int_{d}^{\to b} f$$

convergen, y además

$$\int_{\to a}^{c} f+\int_{c}^{\to b} f=\int_{\to a}^{d} f+\int_{d}^{\to b} f\,.$$

Definición 1.7.- Sea f como en el lema precedente. Se dice que f es *integrable en sentido impropio* en (a,b), o que la integral impropia de f en (a,b), denotada por

$$\int_{\to a}^{\to b} f \qquad \text{o simplemente} \qquad \int_a^b f\,,$$

es *convergente*, cuando existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\int_{\to a}^{c} f \qquad \text{y} \qquad \int_{c}^{\to b} f$$

son convergentes. En este caso, se define la *integral impropia* como

$$\int_{\to a}^{\to b} f = \int_{\to a}^{c} f + \int_{c}^{\to b} f\,.$$

Observaciones 1.8.-

i) En virtud del resultado previo, ni la convergencia de la integral impropia, ni su valor si converge, dependen del valor c que aparece en la definición. También se deduce que si para un $c \in (a,b)$ se tiene que al menos una de las integrales

$$\int_{\to a}^{c} f \qquad \text{y} \qquad \int_{c}^{\to b} f$$

no converge, entonces tampoco converge la integral impropia $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f$.

ii) Cuando se pide estudiar la integral impropia de una función sobre un cierto intervalo, no siempre la función es localmente integrable en todo él. El problema se reduce a subdividir el intervalo en otros en los que sí lo sea, y a estudiar el carácter de las integrales impropias correspondientes. Se dirá que la integral inicial converge si así lo hacen todas las "subintegrales".

Ejemplo: La función f definida en $(0,2)\setminus\{1\}$ por

$$f(x) = \frac{\log\big((x-1)^2\big)}{\sqrt{2\,x - x^2}}$$

es continua en $(0,1)\cup(1,2)$, y por tanto localmente integrable en cada uno de estos dos subintervalos. Estudiar la naturaleza de la integral impropia de f en el intervalo $(0,2)$ consiste en estudiar cada una de las dos integrales impropias

$$\int_{\to 0}^{\to 1} f \qquad \text{y} \qquad \int_{\to 1}^{\to 2} f\,,$$

y la integral impropia $\displaystyle\int_0^2 f$ será convergente si lo son cada una de las anteriores.

Los siguientes resultados, que se deducen fácilmente de los análogos para integrales de Riemann, proporcionan criterios de convergencia y métodos de cálculo para integrales impropias. Por brevedad se enuncian sólo para integrales impropias del primer tipo considerado, siendo sencillo para el lector adaptarlos a otras situaciones.

Proposición 1.9.- (linealidad de las integrales impropias)

Sean f y g funciones reales localmente integrables en el intervalo $[a, b)$. Si las integrales impropias

$$\int_a^b f \qquad \text{y} \qquad \int_a^b g$$

convergen, entonces para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la integral de la función $\alpha f + \beta g$ (localmente integrable en $[a, b)$) es convergente, y además

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\,.$$

Regla de Barrow 1.10.-

Sea f una función localmente integrable en $[a, b)$. Se supone que existe una primitiva G de f en $[a, b)$. La integral impropia de f en $[a, b)$ converge si, y sólo si, existe y es finito

$$\lim_{x \to b^-} G(x)\,,$$

en cuyo caso, se tiene que

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} G(x) \; - G(a)\,.$$

Habitualmente, el miembro de la derecha de la igualdad se representa por

$$G(x)\Big|_{x=a}^{x \to b} \qquad \text{o} \qquad G(x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

al igual que en el caso de las integrales de Riemann.

En el caso general, si f es localmente integrable en (a, b) y G es una primitiva de f en (a, b), la integral de f convergerá si, y sólo si, los límites

$$\lim_{x \to a^+} G(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b^-} G(x)$$

existen y son finitos, en cuyo caso,

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} G(x) \; - \lim_{x \to a^+} G(x) = G(x)\Big|_{x \to a}^{x \to b}.$$

Observación 1.11.- La integrabilidad local en el intervalo correspondiente, así como la existencia de primitiva, vienen garantizadas en el caso de que la función f sea continua en dicho intervalo.

Cambio de variable 1.12.-

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ de extremos α y β (no necesariamente pertenecientes a I), con $\alpha < \beta$ y pudiendo ser infinitos cada uno de ellos. Sea φ una función real definida en I y de clase $\mathcal{C}^1$ en I, de modo que $\varphi'(t) \neq 0$ para cada $t \in I$. El conjunto imagen de φ es, como ya es sabido, un intervalo J, que supondremos de extremos a y b (no necesariamente en J), con $a < b$ y pudiendo ser cada uno de ellos infinito.

Si f es una función real definida y localmente integrable en J, entonces la función definida en I por

$$t \mapsto f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|$$

es localmente integrable en I, las integrales impropias

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$

tienen el mismo carácter, y si convergen, sus valores coinciden.

Integración por partes 1.13.-

Sean f y g funciones reales de clase $\mathcal{C}^1$ en un intervalo $[a, b)$ de modo que existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to b^-} f(x)\,g(x)\,.$$

Entonces, las integrales impropias

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

tienen el mismo carácter. Además, si convergen,

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = f(x)\,g(x)\Big|_{x=a}^{x\to b} - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt\,.$$

Observación 1.14.- En el resultado anterior, la condición de que exista y sea finito el límite $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,g(x)$ es esencial; si dicho límite es infinito puede suceder que las integrales impropias $\displaystyle\int_a^b f'\,g$ y $\displaystyle\int_a^b f\,g'$ no tengan el mismo carácter.

En el caso general, si f y g son de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo (a, b) (lo que garantiza la integrabilidad local de las funciones $f'\,g$ y $f\,g'$) se ha de exigir que los dos límites

$$\lim_{x\to b^-} f(x)\,g(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)\,g(x)$$

existan y sean finitos. La conclusión es que las integrales impropias

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

tienen el mismo carácter, y si convergen, se tiene que

$$\int_a^b f'(t)\, g(t)\, dt = f(x)\, g(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt\,.$$

§ 2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES POSITIVAS.

Pasamos ahora al estudio de otros criterios que permitan decidir si una determinada integral impropia es o no convergente; éstos serán aplicables a funciones de signo constante, aunque, por simplicidad en la exposición y sin que esto suponga restricción, se enunciarán para funciones positivas (nótese que las integrales impropias de las funciones f y $-f = -1\cdot f$ tienen el mismo carácter). Si no es éste el caso, además de aplicar la definición o los resultados anteriores, se puede recurrir al estudio de la convergencia absoluta, que definiremos más adelante.

De nuevo, la mayoría de los resultados que se exponen se enuncian para integrales impropias en intervalos de la forma $[a, b)$, pero se pueden adaptar fácilmente a los otros casos, tarea que dejamos como ejercicio al lector.

Teorema 2.1.- (Criterio de comparación)

Sean f y g funciones reales definidas y localmente integrables en un intervalo $[a, b)$, y tales que existe $c \in (a, b)$ de modo que

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad \text{para cada } x \in (c, b)\,.$$

Entonces:

i) Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, también converge $\displaystyle\int_a^b f$.

ii) Si $\displaystyle\int_a^b f$ no converge, tampoco converge $\displaystyle\int_a^b g$.

Observación 2.2.- Este criterio tiene una interpretación geométrica sencilla: la región limitada por el eje de abscisas, las rectas de ecuaciones $x = c$, $x = b$ y la gráfica de la función g contiene a la limitada por esas mismas tres rectas y la gráfica de la función f; si el área de la primera es finita la de la segunda también, si el área de la segunda es infinita así debe ser la de la primera.

El criterio de comparación se aplica usualmente según el resultado que se expone a continuación.

Corolario 2.3.- Sean f y g funciones reales definidas y localmente integrables en un intervalo $[a,b)$, y tales que existe $c \in (a,b)$ de modo que

$$f(x) \geq 0,\ \ g(x) > 0 \qquad \text{para cada } x \in (c,b)\,.$$

Si existe (finito o no) el límite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,,$$

entonces:

i) Si L pertenece a $(0,\infty)$, $\displaystyle\int_a^b f$ y $\displaystyle\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.

ii) Si $L = +\infty$ y $\displaystyle\int_a^b g$ no converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f$ no converge.

iii) Si $L = 0$ y $\displaystyle\int_a^b g$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

Definición 2.4.- Sea f una función definida y localmente integrable en $[a,b)$ (lo que implica que la función $|f|$ lo es). Se dice que f es *absolutamente integrable* en $[a,b)$, o que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge absolutamente*, si la integral

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

es convergente.

Proposición 2.5.- Si la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolutamente, entonces converge, y además se tiene que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Observación 2.6.- El recíproco de la proposición anterior no es, en general, cierto, como se puede comprobar con la integral

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx\,,$$

que es convergente y no converge absolutamente. En efecto:

La integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ es absolutamente convergente en virtud del criterio de comparación, puesto que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ converge y $\dfrac{|\cos(x)|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ para cada

$x > 1$. Aplicando la fórmula de integración por partes,

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = -\cos(x)\,\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x\to\infty} - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx = \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,,$$

y se deduce la convergencia de la primera integral. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx \geq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx$$

$$\geq \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi+\pi/4}^{k\pi-\pi/4} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx \geq \frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{k\pi-\pi/4} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,,$$

lo que muestra que dicha integral no es absolutamente convergente.

Observación 2.7.- Sea f una función definida y localmente integrable en $[a,\infty)$. La convergencia, incluso absoluta, de la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f$ no asegura nada acerca de la existencia del límite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$. Ahora bien, si dicho límite existe, su valor ha de ser necesariamente cero.

§ 3 COMPARACIÓN CON FUNCIONES TEST.

Se estudia a continuación la integrabilidad de determinadas clases de funciones positivas, denominadas funciones test, que se utilizan con frecuencia en la aplicación del criterio de comparación.

Proposición 3.1.- Sean a, b números reales con $a < b$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Las integrales impropias

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\theta} \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\theta}$$

son convergentes si, y sólo si, $\theta < 1$. En este caso el valor de ambas integrales es

$$\frac{(b-a)^{1-\theta}}{1-\theta}\,.$$

En particular, para $a = 0$, $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x^\theta}$ converge si, y sólo si, $\theta < 1$, y su valor es $\dfrac{b^{1-\theta}}{1-\theta}$.

Proposición 3.2.- Sean a, θ números reales.

1) Si $a > 0$, la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\theta}$ es convergente si, y sólo si, $\theta > 1$. En este caso su valor es $\dfrac{a^{1-\theta}}{\theta-1}$.

2) Si $a<0$, la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{(-x)^{\theta}}$ es convergente si, y sólo si, $\theta>1$. En este caso su valor es $\dfrac{(-a)^{1-\theta}}{\theta-1}$.

Es conocido que, si α y β son números reales con $\alpha>0$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\,|\log(x)|^{\beta}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)^{\beta}}{x^{\alpha}}=0\,.$$

A partir de estas relaciones, es fácil probar la siguiente

Proposición 3.3.- Sean γ, a números reales con $a>0$.

1) La integral impropia $\displaystyle\int_{\to 0}^{a}\frac{\log(x)}{x^{\gamma}}\,dx$ es convergente si, y sólo si, $\gamma<1$.

2) La integral impropia $\displaystyle\int_{a}^{\to\infty}\frac{\log(x)}{x^{\gamma}}\,dx$ es convergente si, y sólo si, $\gamma>1$.

También es conocido que si γ, β son números reales con $\beta>0$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\gamma}\,e^{-\beta/x}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\gamma}\,e^{-\beta x}=0\,,$$

gracias a lo cual es sencillo probar el resultado que sigue.

Proposición 3.4.- Sean β, γ números reales.

Si $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, la integral impropia $\displaystyle\int_{a}^{\to\infty} x^{\gamma}e^{-\beta x}\,dx$ es convergente únicamente si $\beta>0$ ó si $\beta=0$ y $\gamma<-1$.

En particular, si $\beta>0$ se tiene que

$$\int_{a}^{\to\infty} e^{-\beta x}\,dx=\frac{e^{-\beta a}}{\beta}\,.$$

§ 4 EJERCICIOS.

1.- Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias y calcular su valor cuando proceda:

1.1.- $\displaystyle\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

1.2.- $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sec^2(x)\,dx$.

1.3.- $\displaystyle\int_{1/4}^{1}\left(\sqrt{x}-1\right)^{-2}dx$.

1.4.- $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$.

1.5.- $\displaystyle\int_0^b e^{1/x}\, x^{\alpha}\, dx\,,\ b,\alpha\in\mathbb{R}.$

1.6.- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos(x)}.$

1.7.- $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$

1.8.- $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}(2x^2-4x)\, dx.$

1.9.- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

1.10.- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

1.11.- $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2(x)}{\operatorname{tg}^3(x)}\, dx.$

1.12.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, 2^{-x^2}\, dx.$

1.13.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(x)\, dx.$

1.14.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx.$

1.15.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

1.16.- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}},\ \alpha\in\mathbb{R}.$

1.17.- $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|^{-1/2}\, dx\ .$

1.18.- $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{x+18}{x^2-x-12}\, dx.$

1.19.- $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$

1.20.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{|x|}}}{\sqrt{|x|}}\, dx.$

1.21.- $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{x+1}{(x+3)\sqrt{|x|}}\, dx.$

1.22.- $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(x^4-x\right)^{-1} dx.$

2.- Determinar el carácter de las siguientes integrales:

2.1.- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x+1}}\, dx.$

2.2.- $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

2.3.- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+e^x)}}.$

2.4.- $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(t^2+\frac{1}{t^2})}\, dt.$

2.5.- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log(x)}{x(x^2-1)^{1/2}}\, dx.$

2.6.- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$

2.7.- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^{3/2}}\, dx.$

2.8.- $\displaystyle\int_1^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$

2.9.- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{1+\cos(x)+e^x}\, dx.$

2.10.- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}\, dx.$

3.- Probar que si $p>1$ las integrales impropias siguientes son convergentes:

3.1.- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^p}\, dx$

3.2.- $\displaystyle\int_1^{\infty} \operatorname{sen}^p\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

4.- Demostrar que son convergentes las siguientes integrales impropias:

4.1.- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\log(x)}{x^2+2x+1}\,dx.$ **4.2.-** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p-1}{\log(x)}\,dx\,,\quad p>-1.$

4.3.- $\displaystyle\int_0^1 \log(x)\log(1-x)\,dx.$ **4.4.-** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

5.- Demostrar que, para cada $n=0,1,2,\ldots$, la integral impropia

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

es convergente y calcular su valor.

6.- Probar que las integrales impropias

$$\int_0^{\pi/2} \log\big(\operatorname{sen}(x)\big)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\pi/2} \log\big(\cos(x)\big)\,dx$$

convergen y son iguales. Calcular su valor.

7.- Demostrar que las siguientes integrales impropias convergen, pero no convergen absolutamente.

7.1.- $\displaystyle\int_1^{\to\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx\,.$ **7.2.-** $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \operatorname{sen}\big(x^2\big)\,dx\,.$

8.- Se considera la función

$$f(x)=e^x-\cos(x)-x\,.$$

i) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 4 de la función f en el punto $x_0=0$.

ii) Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^{5/2}\,e^{2x}}\,dx.$$

9.- i) Obtener el desarrollo de Taylor de orden 4 en $x=0$ de la función

$$f(x)=e^{-2x^2}-\cos(\alpha x),\qquad \alpha>0.$$

ii) Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2x^2}-\cos(\alpha x)}{\sqrt{x^7(1+x)}}\,dx$$

en función del parámetro real $\alpha>0$.

10.- i) Hallar el desarrollo de Taylor de orden 2 en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \log(1 + \alpha x) - \operatorname{sen}(x), \qquad \alpha > 0.$$

ii) Estudiar, según los valores de $\alpha > 0$, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{f(x)\log(1+x^2)}{x^4 + x^5}\, dx.$$

11.- Sea $y > 0$. Se considera la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{-yt} \operatorname{sen}(t)\, dt\,.$$

i) Demostrar que para cada $y > 0$ la integral es absolutamente convergente. Calcular el valor de la integral dada, que denotaremos por $F(y)$.

ii) Probar que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la integral

$$\int_0^\infty e^{-yt} \operatorname{sen}(y^{\alpha+1} t)\, dt$$

converge absolutamente, y que su valor, al que llamamos $G_\alpha(y)$, es igual a

$$\frac{1}{y^{\alpha+1}} F\Big(\frac{1}{y^\alpha}\Big)\,.$$

iii) Demostrar que la integral impropia

$$\int_{\to 0}^{\to\infty} G_\alpha(y)\, dy$$

es convergente si, y sólo si, $\alpha \neq 0$. Calcular su valor para $\alpha = 2$.

§ 5 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.1.- Converge y vale $\frac{\pi}{2}$. **1.2.-** No converge. **1.3.-** No converge. **1.4.-** No converge.
1.5.- No converge. **1.6.-** No converge. **1.7.-** No converge.
1.8.- Converge y vale $\frac{3}{2}$. **1.9.-** Converge y vale π. **1.10.-** Converge y vale 0.
1.11.- No converge. **1.12.-** Converge y vale 0. **1.13.-** No converge.
1.14.- No converge. **1.15.-** Converge y vale π.
1.16.- No converge para todo α. **1.17.-** Converge y vale 4. **1.18.-** No converge.
1.19.- No converge. **1.20.-** No converge. **1.21.-** No converge. **1.22.-** No converge.

2.1.- $|f(x)| \leq e^{-x}$, $x \geq 0$, y $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$ converge.
2.2.- $\big|\cos\big(1/x\big)\big| \leq 1$, $x \neq 0$, y el intervalo es acotado.
2.3.- Converge. **2.4.-** Converge. **2.5.-** Converge.

2.6.- Comparar por cociente con $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ para la convergencia en $(0,1)$. Aplicar integración por partes para la convergencia en $(1,\infty)$.

2.7.- Converge. **2.8.-** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(1/x^2\right)}{1/x^2} = 1$. Converge.

2.9.- $\left|\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{1+\cos(x)+e^x}\right| \leq e^{-x}$. Converge. **2.10.-** Converge.

3.1.- $|\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^p}| \leq \dfrac{1}{x^p}$, $x \geq 1$. **3.2.-** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^p\left(\frac{1}{x}\right)}{1/x^p} = 1$.

4.1.- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\log(x)}{x^2+2x+1} = 0$.

4.2.- Si $p=0$ es trivial. Si $p \neq 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = p \in \mathbb{R}$. Si $p>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, y la integral es de Riemann. Si $p \in (-1,0)$, comparar con $\int_0^1 x^p\, dx$.

4.3.- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log(x)\log(1-x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \log(x)\log(1-x) = 0$.

4.4.- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{3/4} f(x) = 0$.

5.- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n e^{-x}}{e^{-x/2}} = 0$ y $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x/2}\, dx$ converge. $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!$, $n \geq 0$.

6.- Comparar la primera integral I con $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(x)\, dx$. Mediante el cambio de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, $I = -\displaystyle\int_{\pi/2}^0 \log\big(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-t)\big)\, dt = \int_0^{\pi/2} \log\big(\cos(t)\big)\, dt$. Tomar logaritmos en la igualdad $\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)$ e integrar en $(0,\pi)$ los dos miembros para deducir que $I = -\dfrac{\pi}{2}\log(2)$.

7.1.- Aplicando integración por partes, la integral converge. Para probar que no converge absolutamente, obsérvese que si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [\pi n - \pi/3, \pi n + \pi/3]$, $|\cos(x)| \geq \dfrac{1}{2}$.

7.2.- Aplicar el cambio de variable $x^2 = t$.

8.- i) $e^x - \cos(x) - x = x^2 + \dfrac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ en $x_0 = 0$, con $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

ii) El integrando es positivo y continuo en $(0,\infty)$. La integral impropia converge:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{x^{5/2}e^{2x}}}{1/x^{1/2}} = 1, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^{5/2}\, e^{2x}}}{1/x^2} = 0\,.$$

9.- i) $e^{-2x^2} - \cos(\alpha x) = \big(\dfrac{\alpha^2}{2} - 2\big)x^2 + \big(2 - \dfrac{\alpha^4}{24}\big)x^4 + x^4\varepsilon(x)$ en $x_0 = 0$, con

$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

ii) La integral dada converge si y sólo si $\alpha = 2$.

10.- i) $f(x) = (\alpha - 1)x - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ en $x_0 = 0$, con $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

ii) Si $\alpha \neq 1$ entonces la integral impropia no converge, ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)\log(1+x^2)}{x^4+x^5}}{1/x} = \alpha - 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Si $\alpha = 1$ entonces la integral converge, porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)\log(1+x^2)}{x^4+x^5} = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f(x)\log(1+x^2)}{x^4+x^5}}{1/x^2} = 0\,.$$

11.- i) $|e^{-yt}\operatorname{sen}(t)| \leq e^{-yt}$; $F(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

ii) Realizar el cambio de variable $y^{\alpha+1}t = u$.

iii) $G_\alpha(y) = \dfrac{1}{y^{1+\alpha} + y^{1-\alpha}}$, $y > 0$;

$$\int_0^\infty G_2(y)\,dy = \int_0^\infty \frac{y\,dy}{y^4+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(y^2)\Big|_{y=0}^{y\to\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

TEMA 9 CURVAS Y SUPERFICIES

En el planteamiento de muchos problemas de las Ciencias Aplicadas aparecen de forma natural los conceptos de curva y superficie; por ejemplo, a la hora de describir el movimiento de una partícula, la posición en el espacio tridimensional de una membrana, etc. El objetivo de este tema es establecer el marco adecuado necesario para dar un tratamiento matemático riguroso a todos estos objetos que aparecen como subconjuntos de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ y que se pueden describir (parametrizar) localmente identificándolos con subconjuntos de espacios de dimensión menor.

§ 1 CURVAS EN $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.- Una *curva paramétrica* en $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) es un par $(I, \boldsymbol{\varphi})$, donde I es un intervalo de la recta real y $\boldsymbol{\varphi}$ es una aplicación definida en I, con valores en $\mathbb{R}^n$, y de clase $\mathcal{C}^k$ en I.

Si I es un intervalo compacto, $I = [a, b]$, los puntos $\boldsymbol{\varphi}(a)$ y $\boldsymbol{\varphi}(b)$ se denominan respectivamente el *origen* y el *extremo* de la curva; si dichos puntos coinciden, se dice que la curva es *cerrada*.

Se llama *soporte* de la curva al conjunto $\boldsymbol{\varphi}(I)$, imagen de I por $\boldsymbol{\varphi}$, denotado usualmente por $\boldsymbol{\varphi}^*$, y se dice entonces que $\boldsymbol{\varphi}$ es una *parametrización* de $\boldsymbol{\varphi}^*$.

Se dice que la curva $(I, \boldsymbol{\varphi})$ es *simple* si la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva (si la curva es cerrada, se pide la inyectividad en $[a, b)$).

Por último, si la curva es de clase $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, se puede considerar para cada $t \in I$ el vector $\boldsymbol{\varphi}'(t)$, denominado *vector tangente* a la curva en el punto $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Se dice que dicho punto es *regular* si $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$. Cuando todos los puntos de una curva son regulares, la curva se dice *regular*.

Observación 1.2.- También se utilizan los nombres de *arco* o *camino* como sinónimos de curva.

Ejemplos 1.3.-

1.3.1.- Consideremos una función real f definida en un intervalo I y de clase $\mathcal{C}^k$ en I, $k \geq 1$. Entonces, la curva $(I, \boldsymbol{\varphi})$ dada por

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, f(t)), \qquad t \in I\,,$$

es una curva *plana* (es decir, a valores en $\mathbb{R}^2$) de clase $\mathcal{C}^k$, simple, regular, y

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \big(1, f'(t)\big) \neq (0,0) \quad \text{ para cada } t \in I\,.$$

Su soporte es precisamente el grafo de la función.

1.3.2.- Es familiar la expresión paramétrica de una recta en el plano, conocidos un punto de la misma (a_1, a_2) y un vector director (v_1, v_2) (no nulo):

$$(x(t), y(t)) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2), \qquad t \in \mathbb{R};$$

el par $(\mathbb{R}, \boldsymbol{\varphi})$, donde $\boldsymbol{\varphi}(t) = (x(t), y(t))$, es una curva paramétrica plana de clase $\mathcal{C}^\infty$, simple y regular, cuyo vector tangente en cada punto es el vector director.

1.3.3.- El par $(I, \boldsymbol{\varphi})$, donde I es un intervalo y

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \qquad t \in I,$$

es una curva paramétrica plana de clase $\mathcal{C}^\infty$ y regular, con soporte contenido en la circunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio 1. Es sencillo probar que:

a) la curva es simple si, y sólo si, la longitud de I es menor o igual que 2π;

b) la curva es cerrada si, y sólo si, $I = [a, a + 2n\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.4.- Dados dos intervalos de $\mathbb{R}$, I_1 e I_2, se dice que una aplicación $\theta: I_1 \to I_2$ es un *difeomorfismo* entre ambos si es biyectiva y tanto θ como θ^{-1} son de clase $\mathcal{C}^1$ (y, por lo tanto, con derivada no nula en todo punto). Si los intervalos no son abiertos se entiende que las derivadas en los extremos son laterales.

Definición 1.5.- Se dice que dos curvas paramétricas en $\mathbb{R}^n$, $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, son *equivalentes* si existe un difeomorfismo θ de I_1 en I_2 de manera que $\boldsymbol{\varphi}_2 \circ \theta = \boldsymbol{\varphi}_1$. En esta situación, θ recibe el nombre de *cambio de parámetro*.

Observación 1.6.- La relación así definida en el conjunto de las curvas paramétricas es de equivalencia en el sentido conjuntista (es decir, verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva), lo que se demuestra sin dificultad a partir del teorema de la función inversa y de la regla de la cadena.

Observación 1.7.- Resulta obvio que curvas paramétricas equivalentes tienen el mismo soporte; ahora bien, el recíproco no es cierto a menos que se impongan condiciones de regularidad, como las que aparecen en el siguiente resultado.

Teorema 1.8.- Dos curvas paramétricas regulares, simples y con el mismo soporte son siempre equivalentes.

Observación 1.9.- Este resultado justifica que en muchos casos se proporcione una curva indicando únicamente su soporte: si se admite que la parametrización con la que se va a representar dicho conjunto es regular y simple, cualquier otra con esas mismas propiedades resultará equivalente a aquella, lo que basta para garantizar la consistencia de los conceptos y resultados relativos a curvas con los que trabajaremos.

Observación 1.10.- Sean $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ curvas paramétricas equivalentes, y sea θ el cambio de parámetros de modo que $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2 \circ \theta$. Por la regla de la cadena, para cada $t \in I_1$,

$$\boldsymbol{\varphi}_1'(t) = \theta'(t)\, \boldsymbol{\varphi}_2'(\theta(t))\,.$$

Dado que $\theta'(t) \neq 0$ para todo $t \in I_1$, es inmediato que un punto P del soporte (común para ambas curvas) es regular o no independientemente de la parametrización escogida, y que, en caso de serlo, los vectores tangentes en P respecto a cada parametrización son proporcionales y determinan, por tanto, una misma dirección. Este hecho proporciona consistencia a la siguiente definición.

Definición 1.11.- Sea $(I, \boldsymbol{\varphi})$ una curva paramétrica y $P = \boldsymbol{\varphi}(t_0)$ un punto regular de su soporte. Se llama *recta tangente* a la curva (o a su soporte) en P a la que pasa por P y cuyo vector director es $\boldsymbol{\varphi}'(t_0)$.

Observación 1.12.- En la situación de la última observación, de la propiedad de Darboux para las derivadas se deduce que θ' ha de tener signo constante. Se establece entonces el siguiente concepto.

Definición 1.13.- Se dice que las curvas paramétricas equivalentes $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ corresponden a la *misma orientación* si el cambio de parámetros que pasa de una a otra tiene derivada positiva; se dice que corresponden a *orientaciones opuestas* si la derivada es negativa.

Observación 1.14.- La noción de orientación tiene una fácil interpretación geométrica: vectores tangentes correspondientes a parametrizaciones de la misma orientación tienen el mismo sentido, mientras que al cambiar la orientación cambia el sentido del vector tangente. En otras palabras, un cambio en la orientación se traduce en la inversión del sentido de recorrido de la curva.

Ejemplo 1.15.- Sea $(I, \boldsymbol{\varphi})$ la curva paramétrica con $I = [-1, 1]$ y $\boldsymbol{\varphi}: I \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2), \qquad t \in I\,.$$

Una curva paramétrica equivalente es $(J, \boldsymbol{\gamma})$, donde

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (2s, 4s^2), \qquad s \in J = [-1/2, 1/2]\,,$$

pues el difeomorfismo $\theta: I \to J$, $\theta(t) = t/2$, es tal que $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\gamma} \circ \theta$. Puesto que $\theta'(t) > 0$ para todo $t \in I$, ambas parametrizaciones tienen la misma orientación. Sin embargo, la curva $(H, \boldsymbol{\sigma})$ dada por $H = [-1, 1]$ y

$$\boldsymbol{\sigma}(u) = (-u, u^2), \qquad u \in H,$$

representa a la orientación opuesta, pues el cambio de parámetros es $\theta_1: I \to H$, dado por $\theta_1(t) = -t$, $t \in I$, con derivada negativa.

Una curva paramétrica con el mismo soporte que $(I, \boldsymbol{\varphi})$ es $(I, \boldsymbol{\varphi}_1)$, donde

$$\boldsymbol{\varphi}_1(v) = (v^3, v^6), \qquad v \in I;$$

sin embargo, ésta no es equivalente a $(I, \boldsymbol{\varphi})$, pues la aplicación g que permite escribir $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1 \circ g$ es $g: I \to I$, $g(t) = \sqrt[3]{t}$, $t \in I$, que no es difeomorfismo; nótese también que la curva $(I, \boldsymbol{\varphi}_1)$ no es regular en el punto $\boldsymbol{\varphi}_1(0) = (0, 0)$.

Curvas definidas implícitamente 1.16.-

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y F una función real definida y de clase $\mathcal{C}^1$ en U. Consideremos el conjunto

$$S = \{(x, y) \in U \;:\; F(x, y) = 0\}\,.$$

Tomemos $(x_0, y_0) \in S$ tal que $F'(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, y supongamos (sin pérdida de generalidad) que, en concreto, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, el teorema de las funciones implícitas garantiza la existencia de un intervalo abierto I, con $x_0 \in I$, un entorno abierto V de y_0 en $\mathbb{R}$, y una función $y = y(x)$, de I en V, de clase $\mathcal{C}^1$ en I, de modo que para cada $x \in I$, $y(x)$ es el único punto de V que satisface

$$F\big(x, y(x)\big) = 0\,.$$

Definimos la curva paramétrica (I, φ), donde

$$\varphi(x) = (x, y(x)), \qquad x \in I\,.$$

Por la propiedad anterior, el soporte está contenido en S, por lo que (I, φ) es una parametrización de una porción de S. Es inmediato que además es simple, de clase $\mathcal{C}^1$ y regular, pues el vector tangente es, para un $x \in I$, $\varphi'(x) = \big(1, y'(x)\big) \neq \mathbf{0}$. Recordando la forma en que están relacionadas las derivadas de F y la de y, es sencillo obtener la siguiente ecuación para la recta tangente a la curva en el punto x_0:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) = 0\,.$$

La misma ecuación se obtiene si es la variable x la que se puede despejar localmente en función de la y; el vector $F'(x_0, y_0)$ es un vector ortogonal a la recta tangente a S en el punto (x_0, y_0).

Si Γ es una curva en $\mathbb{R}^3$ que viene dada implícitamente por las ecuaciones

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad g_2(\boldsymbol{x}) = 0,$$

donde las funciones g_1 y g_2 son de clase $\mathcal{C}^k$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ y tales que el rango de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$,

$$\Big(D_j g_i\Big)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 3}}\,,$$

es 2 en cada punto de U, entonces la recta vectorial tangente a Γ en un punto $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ es precisamente el conjunto de vectores $\boldsymbol{v}$ que satisfacen

$$\nabla g_i(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Es decir, los vectores $\nabla g_1(\boldsymbol{x})$ y $\nabla g_2(\boldsymbol{x})$ engendran un plano vectorial ortogonal en $\mathbb{R}^3$ a la recta vectorial tangente a Γ en dicho punto.

Ejemplos 1.17.-

1.17.1.- Como es sabido, si $(a, b) \neq (0, 0)$ la ecuación

$$a\,x + b\,y + c = 0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

representa una recta plana que tiene en todo punto como recta vectorial tangente la formada por los vectores perpendiculares al vector (a, b). Es decir, el vector $(-b, a)$ engendra la recta tangente en cada punto.

1.17.2.- Si $a, b > 0$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa una elipse centrada en el origen de coordenadas, de ejes de simetría paralelos a los coordenados, y cuyos semiejes horizontal y vertical miden, respectivamente, a y

b unidades (si $a = b$ se obtiene la circunferencia de radio a). En un punto (x_0, y_0) de la elipse el vector $(x_0/a^2, y_0/b^2)$ engendra la recta normal, mientras que el vector $(-y_0/b^2, x_0/a^2)$ engendra la recta tangente.

1.17.3.- El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z + d_1 = 0, \\ a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z + d_2 = 0, \end{cases}$$

donde los vectores $\boldsymbol{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\boldsymbol{v} = (a_2, b_2, c_2)$ son linealmente independientes, define una recta en el espacio $\mathbb{R}^3$ que tiene en todo punto como recta vectorial tangente la formada por los vectores perpendiculares a $\boldsymbol{u}$ y a $\boldsymbol{v}$. Por lo tanto, el vector $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ engendra la recta tangente en cada punto.

1.17.4.- El subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

tiene dos componentes conexas, una en el hemiespacio superior (es decir, formada por puntos con tercera coordenada positiva) y otra en el hemiespacio inferior. Cada una de ellas es una curva de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$.

§ 2 SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.1.- Se dice que un abierto D de $\mathbb{R}^2$ es *conexo* si todo par de puntos de D se puede unir mediante un camino con soporte íntegramente contenido en D, es decir, si para todos $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ de D, existe una aplicación continua $\boldsymbol{\gamma}\colon [0,1] \to D$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\gamma}(1) = \boldsymbol{y}$.

Definición 2.2.- Una *superficie paramétrica* de clase $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) en $\mathbb{R}^3$ es un par $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde D es un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\varphi}$ es una aplicación definida en D, con valores en $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{\varphi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \qquad (u, v) \in D\,,$$

de clase $\mathcal{C}^k$ en D, y localmente inyectiva (es decir, inyectiva en un entorno adecuado de cada punto de D).

Se llama *soporte* de la superficie al conjunto $\boldsymbol{\varphi}(D)$, imagen de D por $\boldsymbol{\varphi}$, denotado usualmente por $\boldsymbol{\varphi}^*$, y se dice entonces que $\boldsymbol{\varphi}$ es una *parametrización* de $\boldsymbol{\varphi}^*$.

Se dice que la superficie $(D, \boldsymbol{\varphi})$ es *simple* si la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva (globalmente).

Por último, si la superficie es de clase $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, se pueden considerar para cada $(u,v) \in D$ los vectores

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\Big) \qquad \text{y}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\Big)\,,$$

denominados *vectores tangentes* a la superficie en el punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$ de su soporte. Se dice que dicho punto es *regular* si los vectores tangentes a la superficie en él son linealmente independientes (es decir, la matriz jacobiana de $\boldsymbol{\varphi}$ en el punto (u,v) tiene rango 2), o equivalentemente, si es no nulo su producto vectorial

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)\,,$$

en cuyo caso dicho vector se denomina *vector normal* a la superficie en el punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$.

Cuando todos los puntos de una superficie son regulares, decimos que la superficie es *regular*.

Ejemplos 2.3.-

2.3.1.- Es bien conocida la ecuación paramétrica de un plano: dados un punto (x_0, y_0, z_0) del mismo y dos vectores generadores, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, linealmente independientes, el plano se parametriza por:

$$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = (x_0 + s\,u_1 + t\,v_1\,,\; y_0 + s\,u_2 + t\,v_2\,,\; z_0 + s\,u_3 + t\,v_3), \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Los vectores tangentes a la superficie en cada punto son precisamente $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, y el vector normal es $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Así, la superficie es simple, regular y de clase $\mathcal{C}^\infty$.

2.3.2.- Sea f una función real definida y de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ en un abierto D de $\mathbb{R}^2$. Su gráfica, representada en la forma usual en $\mathbb{R}^3$, es el soporte de la superficie paramétrica $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = (u, v, f(u,v)), \qquad (u,v) \in D\,.$$

Es inmediato comprobar que la superficie es simple, regular y de clase $\mathcal{C}^k$. Los vectores tangentes en cada punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$ resultan ser

$$\Big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\Big) \qquad \text{y} \qquad \Big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\Big)\,,$$

y el vector normal es

$$\Big(-\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\,,\, -\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\,,\, 1\Big).$$

2.3.3.- Consideremos la superficie paramétrica $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde

$$D = B(\mathbf{0}, 1) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 < 1\}\,, \qquad \text{y}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \Big(u, v, \sqrt{1-(u^2+v^2)}\Big), \qquad (u,v) \in D\,.$$

Esta superficie, cuyo soporte es el hemisferio superior de la esfera centrada en el origen y de radio 1, es del tipo considerado en el ejemplo anterior y, por tanto, es simple, de clase $\mathcal{C}^\infty$ y regular, siendo su vector normal en cada punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$

$$\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\Big)(u,v) = \bigg(\frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}, \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}, 1\bigg)\,.$$

Definición 2.4.- Dados dos abiertos de $\mathbb{R}^2$, D_1 y D_2, una aplicación $\boldsymbol{\theta}\colon D_1 \to D_2$ es un *difeomorfismo* entre ambos si es biyectiva, de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ y tal que el determinante de su matriz jacobiana, $\mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u})$, es no nulo en todo punto $\boldsymbol{u} \in D_1$.

Equivalentemente, $\boldsymbol{\theta}$ ha de ser biyectiva, y tanto $\boldsymbol{\theta}$ como $\boldsymbol{\theta}^{-1}$ tienen que ser de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ en sus respectivos dominios. Así, $\boldsymbol{\theta}^{-1}\colon D_2 \to D_1$ también es un difeomorfismo.

Definición 2.5.- Se dice que dos superficies paramétricas, $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, son *equivalentes* si existe un difeomorfismo $\boldsymbol{\theta}$ de D_1 en D_2 de manera que $\boldsymbol{\varphi}_2 \circ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi}_1$. En esta situación, $\boldsymbol{\theta}$ recibe el nombre de *cambio de parámetros*.

Observación 2.6.- La relación así definida en el conjunto de las superficies paramétricas es de equivalencia en el sentido conjuntista.

Observación 2.7.- Es inmediato que superficies paramétricas equivalentes tienen el mismo soporte. Sin embargo, el hecho de que dos parametrizaciones tengan el mismo soporte no implica que sean equivalentes, a menos que se verifiquen propiedades adicionales.

Teorema 2.8.- Dos superficies paramétricas regulares, simples y con el mismo soporte son siempre equivalentes.

Observación 2.9.- Si se admite que las parametrizaciones con las que se va a trabajar serán simples y regulares, es posible establecer conceptos y resultados coherentes para superficies que vengan dadas exclusivamente mediante su soporte. En lo sucesivo seguiremos este convenio.

Observación 2.10.- Si $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ son superficies paramétricas equivalentes, y $\boldsymbol{\theta}\colon D_1 \to D_2$ es el cambio de parámetros que permite escribir $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2 \circ \boldsymbol{\theta}$, por la regla de la cadena, para cada $(u,v) \in D_1$,

$$\boldsymbol{\varphi}_1'(u,v) = \boldsymbol{\varphi}_2'(\boldsymbol{\theta}(u,v)) \circ \boldsymbol{\theta}'(u,v)\,,$$

y dado que $\mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(u,v) \neq 0$ para todo (u,v), resulta que un punto P en el soporte de S es regular o no independientemente de la parametrización escogida, y que, en caso de serlo, los vectores tangentes en P respecto a cada parametrización generan un mismo plano y dan lugar a vectores normales proporcionales.

Definición 2.11.- Sea $(D, \boldsymbol{\varphi})$ una superficie paramétrica y $P = \boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0)$ un punto regular de su soporte.

Se llama *plano tangente* a la superficie (o a su soporte) en el punto P al plano afín que pasa por P y tiene a $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0, v_0)$ como vectores generadores.

Se llama *recta normal* a la superficie (o a su soporte) en P a la recta afín que pasa por P y tiene al vector normal a la superficie en P como vector director.

Observación 2.12.- En la situación de la última observación, y puesto que $\mathcal{J}\boldsymbol{\theta}$ no se anula en el conexo D_1, ha de tener signo constante. Se establece entonces la siguiente definición.

Definición 2.13.- Se dice que dos superficies paramétricas equivalentes $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ tienen la *misma orientación* si el cambio de parámetros que pasa de una a la otra tiene determinante jacobiano positivo; se dice que corresponden a *orientaciones opuestas* si el jacobiano es negativo.

Observación 2.14.- El concepto de orientación de una superficie tiene una fácil interpretación en términos del vector normal:

Si $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ son superficies paramétricas equivalentes, y $\boldsymbol{\theta}\colon D_1 \to D_2$ es el difeomorfismo tal que

$$\boldsymbol{\varphi}_1(u,v) = \boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{\theta}(u,v)) = \boldsymbol{\varphi}_2(s(u,v), t(u,v))\,, \qquad (u,v) \in D_1\,,$$

entonces, si $\boldsymbol{\varphi}_1(u,v)$ es un punto regular de la superficie geométrica que representan,

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial v}\Big)(u,v) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial s}(\boldsymbol{\theta}(u,v))\,\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}(\boldsymbol{\theta}(u,v))\,\frac{\partial t}{\partial u}(u,v)\right) \times \\
&\quad \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial s}(\boldsymbol{\theta}(u,v))\,\frac{\partial s}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}(\boldsymbol{\theta}(u,v))\,\frac{\partial t}{\partial v}(u,v)\right) \\
&= \left(\frac{\partial s}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial t}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial t}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial s}{\partial v}(u,v)\right)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}\Big)(\boldsymbol{\theta}(u,v)) \\
&= \mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(u,v)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}\Big)(\boldsymbol{\theta}(u,v))\,,
\end{aligned}$$

de donde se deduce que los vectores normales correspondientes a parametrizaciones de la misma orientación tienen el mismo sentido, mientras que si las parametrizaciones tienen orientación distinta, los vectores normales tienen sentidos opuestos.

Ejemplo 2.15.- Consideremos la superficie paramétrica $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$, donde $D_1 = \big(0, \pi/2\big) \times (0,1)$ y

$$\boldsymbol{\varphi}_1(u,v) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), v)\,, \qquad (u,v) \in D_1\,.$$

Su soporte es el conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 1\,,\ x > 0\,,\ y > 0,\ 0 < z < 1\}\,.$$

El vector normal que se obtiene para esta parametrización es

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial v}\Big)(u,v) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0), \qquad (u,v) \in D_1\,.$$

Otra parametrización equivalente a la anterior es $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, con $D_2 = (0,1)\times(0,1)$ y

$$\boldsymbol{\varphi}_2(s,t) = (s, \sqrt{1-s^2}, t), \qquad (s,t) \in D_2\,,$$

a la que se llega tras aplicar el cambio de parámetros $\boldsymbol{\theta}\colon D_1 \to D_2$ dado por

$$\boldsymbol{\theta}(u,v) = (\cos(u), v)$$

(compruébese que $\boldsymbol{\theta}$ es un difeomorfismo y que $\boldsymbol{\varphi}_2 \circ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi}_1$). Puesto que

$$\mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(u,v) = -\operatorname{sen}(u) < 0\,, \qquad (u,v) \in D_1\,,$$

la nueva parametrización corresponde a la orientación opuesta. Esto se podría haber deducido del cálculo del vector normal

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}\Big)(s,t) = \Big(\frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}, -1, 0\Big), \qquad (s,t) \in D_2\,,$$

que resulta ser de sentido opuesto al que se obtuvo con la primera parametrización.

Las superficies interesantes desde un punto de vista práctico son las simples y regulares. Las que hemos tratado hasta el momento son las denominadas *elementales*, es decir, parametrizadas en un solo abierto conexo de $\mathbb{R}^2$, pero en este contexto no entran objetos tan familiares como una esfera. Concretando más:

"Es imposible establecer una aplicación biyectiva y continua entre un abierto de $\mathbb{R}^2$ y el conjunto $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$".

Con el ánimo de generalizar lo expuesto hasta ahora a esta y otras "superficies no elementales" se introduce a un nivel más avanzado el concepto de variedad diferenciable, que omitimos. En lo sucesivo, cuando sea necesario y sin entrar en justificaciones, se considerará este tipo de superficies S como uniones del tipo

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \,\cup\, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m\,,$$

siendo la unión disjunta y tal que:

i) Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, S_j es (el soporte de) una superficie paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ y regular.

ii) Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, Γ_k es (el soporte de) una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ y regular.

Entonces, los cálculos a realizar sobre la superficie S se reducirán a los correspondientes sobre las S_j, despreciando las curvas Γ_i a lo largo de las cuales se "unen" dichas superficies.

Superficies definidas implícitamente 2.16.-

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^3$ y F una función real definida y de clase $\mathcal{C}^1$ en U. Consideremos el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in U \,:\, F(x, y, z) = 0\}.$$

Tomemos $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ tal que $F'(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}$, y supongamos (sin pérdida de generalidad) que, en concreto, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$. Entonces, el teorema de las funciones implícitas garantiza la existencia de un entorno abierto conexo D de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de z_0 en $\mathbb{R}$, y una función $z = z(x, y)$, de D en V, de clase $\mathcal{C}^1$ en D, de modo que para cada $(x, y) \in D$, $z(x, y)$ es el único punto de V que satisface

$$F\big(x, y, z(x, y)\big) = 0.$$

Definimos la superficie paramétrica $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde

$$\boldsymbol{\varphi}(x, y) = (x, y, z(x, y)), \qquad (x, y) \in D.$$

Por la propiedad anterior, el soporte está contenido en S, por lo que $(D, \boldsymbol{\varphi})$ es una parametrización de una porción de S. Es inmediato que además es simple, de clase $\mathcal{C}^1$ y regular, pues los vectores tangentes son, para un $(x, y) \in D$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(x, y) = \Big(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\Big), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(x, y) = \Big(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\Big),$$

y el vector normal resulta ser

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\Big)(x, y) = \Big(- \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\,,\, - \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\,,\, 1\Big) \neq \mathbf{0}.$$

Recordando la forma en que están relacionadas las derivadas de F y las de z, es sencillo obtener la siguiente ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $\boldsymbol{x}_0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,(z - z_0) = 0.$$

La misma ecuación del plano tangente se obtiene si son las variables x ó y las que se pueden despejar localmente en función de las otras dos; el vector $F'(\boldsymbol{x}_0)$ es un vector ortogonal al plano tangente a S en el punto $\boldsymbol{x}_0$.

Ejemplo 2.17.- Concretando lo anterior en el caso de una esfera en $\mathbb{R}^3$, que por comodidad en la notación tomaremos centrada en el origen, y que vendrá dada por

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}\,, \quad (r > 0)\,,$$

se tiene lo siguiente:

El vector normal a esta "superficie" en cada uno de sus puntos $\boldsymbol{x}$ es proporcional a $F'(\boldsymbol{x}) = 2\,\boldsymbol{x}$, siendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$.

§ 3 EJERCICIOS.

1.- Demostrar que la función g definida por

$$g(t) = 3\,t^5 + 10\,t^3 + 15\,t + 1$$

es un difeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

2.- El borde de un disco $B(\boldsymbol{a}, r) \subset \mathbb{R}^2$ es el soporte de una curva de clase $\mathcal{C}^1$ y regular; dar parametrizaciones de dicha curva correspondientes a las dos orientaciones posibles.

3.- Dada la curva paramétrica plana $([0, 2\pi], \boldsymbol{\varphi})$, siendo

$$\boldsymbol{\varphi}(\theta) = \big(\cos(\theta)\,(2\cos(\theta) - 1)\,,\, \operatorname{sen}(\theta)\,(2\operatorname{sen}(\theta) - 1)\big)\,,$$

se consideran los cambios de parámetro $\theta = t + 1$ y $\theta = -s$. Obtener las ecuaciones paramétricas de las curvas equivalentes correspondientes. ¿Dichas curvas conservan la orientación de la original?

4.- Estudiar los puntos regulares de la curva (llamada *hipotrocoide*)

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) - \cos\left({}^{t}\!/_{4}\right); \\ y(t) = 4\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}\left({}^{t}\!/_{4}\right), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

5.- ¿Son equivalentes las curvas paramétricas $(\mathbb{R}, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $((0, \infty), \boldsymbol{\varphi}_2)$ dadas por

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \big(t, \operatorname{sen}(t), e^t\big), \qquad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = \big(\log(t), \operatorname{sen}\big(\log(t)\big), t\big)\,?$$

Si lo son, ¿corresponden a una misma orientación?

6.- Se considera la curva paramétrica

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos(t)\,; \\ y(t) = \operatorname{sen}(t)\,; \\ z(t) = 2\operatorname{sen}\bigl({}^{t}\!/_{2}\bigr)\,, \end{cases} \qquad t \in [-2\pi, 2\pi]\,.$$

Demostrar que es regular, determinar los dos vectores tangentes unitarios en un punto genérico del soporte, y comprobar que el soporte del arco está contenido en

$$\Gamma = \bigl\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,\ (x-1)^2 + y^2 = 1\,\bigr\}\,.$$

7.- Es familiar el uso de las coordenadas polares (ρ, θ) para la representación de puntos en el plano euclídeo. También es posible a veces expresar una curva paramétrica plana "en polares", mediante una expresión del tipo $\rho = f(\theta)$, que corresponde a la aplicación

$$\theta \mapsto \bigl(f(\theta)\,\cos(\theta)\,,\ f(\theta)\,\operatorname{sen}(\theta)\bigr)\,,$$

definida en el intervalo o unión de ellos en los que se verifique que $f(\theta) \geq 0$ (pues dicho valor mide la distancia al origen del punto del soporte de la curva con argumento θ). El estudio de estas parametrizaciones requiere un análisis del comportamiento de la función f, que se puede reducir a los siguientes apartados:

7.1.- *Periodicidad*: cuando existe $p > 0$ tal que $f(\theta + p) = f(\theta)$ para todo θ, la gráfica de la función se repite tras un giro de amplitud p.

7.2.- *Variación de* ρ: el estudio de la monotonía de f informa de la variación de la distancia al origen de los puntos de la curva.

7.3.- *Puntos regulares*: supongamos que f es de clase $\mathcal{C}^1$. Un punto P del soporte, correspondiente a $\theta = \theta_0$, no es regular si y sólo si $f(\theta_0) = f'(\theta_0) = 0$ (en particular, si el soporte de la curva no contiene al origen, la curva es regular).

8.- Representar las siguientes curvas, expresadas en coordenadas polares:

8.1.- $\rho = \operatorname{tg}\bigl({}^{\theta}\!/_{2}\bigr)\,.$ **8.2.-** $\rho = |\operatorname{tg}(\theta)|\,.$ **8.3.-** $\rho = \operatorname{sen}(n\,\theta)\,,\ \ n \in \mathbb{N}\,.$

8.4.- $\rho = \dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}\,.$ **8.5.-** $\rho = 1 - \operatorname{sen}(2\,\theta)\,.$ **8.6.-** $\rho = \operatorname{sen}\bigl({}^{\theta}\!/_{2}\bigr) + \cos\bigl({}^{\theta}\!/_{2}\bigr)\,.$

8.7.- $\rho = \dfrac{a}{\theta}\,,\ \ a > 0\,.$ **8.8.-** $\rho = \dfrac{1 + 2\operatorname{sen}(\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}(\theta)}\,.$ **8.9.-** $\rho = 1 + \cos(\theta)\,.$

9.- Demostrar que si $A = \{(\eta, \nu) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \eta > 0\,,\ \nu > 0\}$, la aplicación f dada por

$$f(\eta, \nu) = \Big(\frac{\eta^2 + \nu^2}{2}, \frac{\eta^2 - \nu^2}{2}\Big)$$

es un difeomorfismo de A en el conjunto $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u > 0\,,\ |v| < u\}$.

10.- Se considera la superficie parametrizada en el abierto

$$D = \{(\eta, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \eta > 0,\ \nu > 0,\ \eta^2 + \nu^2 < 1\}$$

por la aplicación

$$\boldsymbol{\varphi}(\eta, \nu) = \big(\eta, \nu, \sqrt{1 - (\eta^2 + \nu^2)}\,\big)\,.$$

Si se realiza el cambio de parámetros del problema anterior, dar las nuevas ecuaciones de la superficie. ¿Se conserva la orientación?

11.- Se considera el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,, \quad a, b, c > 0\,. \qquad (\textit{Cono})$$

¿Es este conjunto el soporte de una superficie paramétrica regular de clase $\mathcal{C}^1$? ¿Lo es algún subconjunto suyo? En caso afirmativo, dar una representación paramétrica de la misma, y determinar el plano tangente en cada punto.

12.- Realizar el mismo estudio propuesto en el ejercicio anterior para el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0\,, \quad a, b > 0\,. \qquad (\textit{Paraboloide hiperbólico})$$

13.- Para las siguientes representaciones paramétricas, se pide:

i) Determinar abiertos de $\mathbb{R}^2$ lo más generales posibles donde sean inyectivas.

ii) Eliminar los parámetros para obtener una ecuación implícita de la superficie indicada.

iii) Dar una expresión del vector normal en los puntos regulares en función de los parámetros y de la ecuación implícita.

13.1.- *Plano* (que pasa por $\boldsymbol{x}_0$ con vectores generadores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$):

$$\boldsymbol{\varphi}(u, v) = \big(x_0 + u\,a_1 + v\,b_1\,,\ y_0 + u\,a_2 + v\,b_2\,,\ z_0 + u\,a_3 + v\,b_3\big)\,.$$

13.2.- *Paraboloide elíptico* $(a, b > 0)$:

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \big(a\,u\cos(v)\,,\ b\,u\operatorname{sen}(v)\,,\ u^2\big)\,.$$

13.3.- *Elipsoide* (de semiejes $a, b, c > 0$):

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \big(a\operatorname{sen}(u)\cos(v)\,,\ b\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)\,,\ c\cos(u)\big)\,.$$

13.4.- *Superficie de revolución* (generada al girar la gráfica de la función $z = f(x)$ alrededor del eje OZ):

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \big(u\cos(v)\,,\ u\operatorname{sen}(v)\,,\ f(u)\big)\,.$$

13.5.- *Cilindro elíptico* (superficie reglada):

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \big(a\cos(v)\,,\ b\operatorname{sen}(v)\,,\ u\big)\,.$$

13.6.- *Toro* (de radios a, b, $0 < b < a$):

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \Big(\big(a + b\cos(u)\big)\operatorname{sen}(v)\,,\ \big(a + b\cos(u)\big)\cos(v)\,,\ b\operatorname{sen}(u)\Big)\,.$$

14.- Establecer una parametrización de cada una de las siguientes curvas o superficies, dadas en términos de su soporte:

14.1.- La curva intersección del cilindro de ecuación $(x-1)^2+(y-2)^2 = r^2$ $(r > 0)$ con el plano de ecuación $x + z + 1 = 0$.

14.2.- El borde del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,0)$, recorrido en sentido horario.

14.3.- La curva intersección de las superficies de ecuaciones respectivas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad x + z = 1\,.$$

14.4.- La parte de la curva intersección de

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 = ax$$

contenida en el primer octante, y considerando como origen el punto $(a,0,0)$.

14.5.- La curva intersección de las superficies

$$x^2 - 2\,y\,z = 0 \qquad \text{y} \qquad y + z - \sqrt{2}\,x - 1 = 0,$$

entre los puntos $(0,0,1)$ y $(0,1,0)$.

14.6.- La curva de ecuación implícita

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\,\frac{x}{a} = 0\,,$$

recorrida en sentido antihorario.

14.7.- La curva que resulta de la intersección del plano $x + y + z = {}^{3\,a}\!/_{2}$ y la superficie que limita al cubo $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ $(a > 0)$.

14.8.- La superficie dada por $z^2 = 2\,x\,y$, $0 < x < 2$, $0 < y < 1$, $z > 0$.

14.9.- La región del plano $x + y + z = a$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

14.10.- La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = a\,x$, siendo $z \geq 0$.

14.11.- El casquete esférico dado por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,, \quad z > 1\,.$$

14.12.- La superficie que recorta el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2\,x$ en la hoja superior del cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

14.13.- La superficie del plano $x + y + z = {}^{3\,a}\!/_{2}$ interior al cubo $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ $(a > 0)$.

14.14.- La superficie obtenida al girar en torno al eje OZ la curva contenida en el plano OXZ de ecuación

$$z = (x^2 - 1)(x^2 - 4)\,, \quad x \in (-2, 2)\,.$$

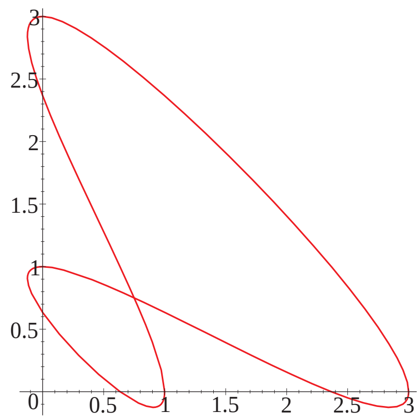
§ 4 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.- $g'(t) = 15\,t^4 + 30\,t^2 + 15 > 0$ para todo t, por lo que g es estrictamente creciente; además $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$ y $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$.

2.- $\boldsymbol{\varphi}_1(\theta) = \big(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\,\mathrm{sen}(\theta)\big),\ \ \theta \in [0, 2\pi]\,;$

$\boldsymbol{\varphi}_2(\theta) = \big(a_1 + r\cos(2\pi - \theta), a_2 + r\,\mathrm{sen}(2\pi - \theta)\big),\ \ \theta \in [0, 2\pi].$

3.-



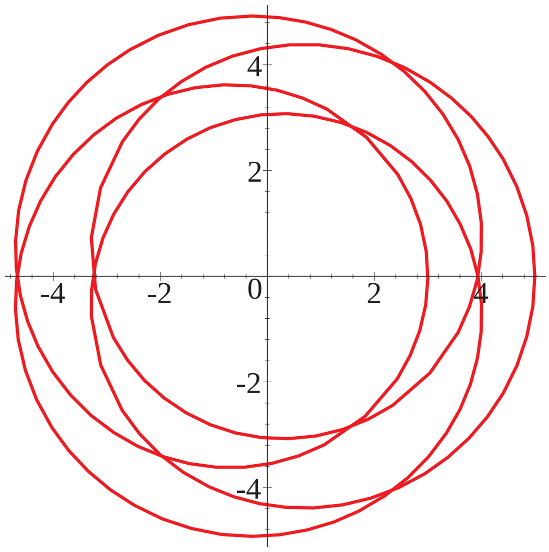
$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t{+}1)\,\big(2\cos(t{+}1) - 1\big), \\ y(t) = \mathrm{sen}(t{+}1)\,\big(2\,\mathrm{sen}(t{+}1) - 1\big), \end{cases}$$
$$t \in [-1, -1 + 2\pi];$$

conserva la orientación.

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \begin{cases} x(s) = \cos(s)\,\big(2\cos(s) - 1\big), \\ y(s) = \mathrm{sen}(s)\,\big(2\,\mathrm{sen}(s) - 1)\big), \end{cases}$$
$$s \in [-2\pi, 0];$$

no conserva la orientación.

4.- Todos los puntos de la curva son regulares, pero la curva no es simple (las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son periódicas, de periodo $8\,\pi$).



Nota: La hipotrocoide es una de las llamadas *curvas cicloidales*, que son constructibles con un artilugio o juguete compuesto por ruedas dentadas denominado *espirógrafo*. Este ejemplo, en particular, se obtiene colocando el bolígrafo en un punto a distancia 1 del centro de un círculo de radio 16 que rueda dentro de una circunferencia de radio 20.

5.- Sí: $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2 \circ h$, con $h(t) = e^t$.

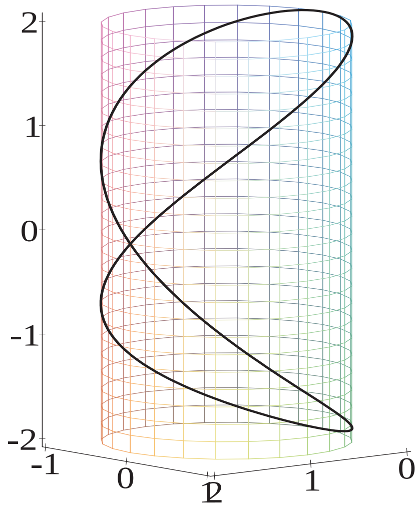
6.-

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}'(t) &= \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)\\ &= \big(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), \cos\left({}^{t}\!/_{2}\right)\big);\end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| = \sqrt{1+\cos^2\left({}^{t}\!/_{2}\right)};$$

$$\boldsymbol{t}_1 = \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|},$$

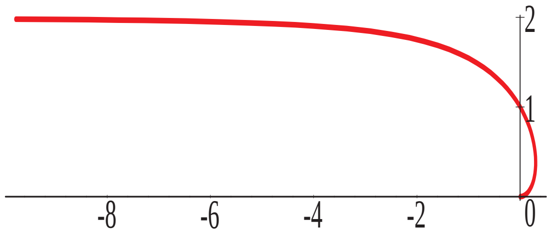
$$\boldsymbol{t}_2 = -\boldsymbol{t}_1 = \frac{-\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|}.$$



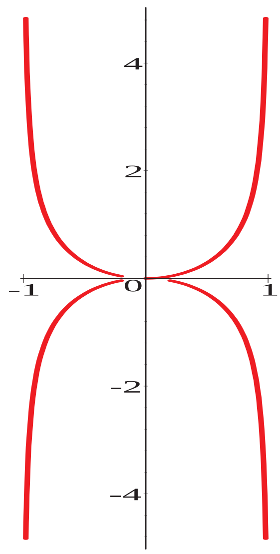
7.- Este ejercicio presenta el guión que se debe seguir para representar las curvas expresadas en coordenadas polares, como las que aparecen en el ejercicio siguiente.

8.- Se indica el dominio de definición en los casos en que no sea todo $\mathbb{R}$.

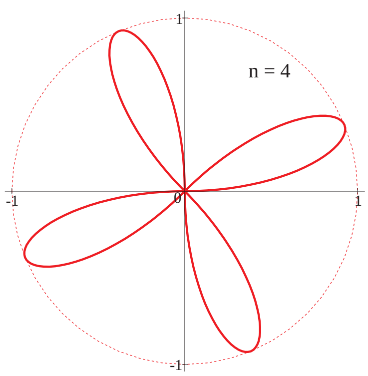
8.1.- $\varrho = \operatorname{tg}({}^{\theta}\!/_{2}),\ \ \theta \in (0,\pi)$



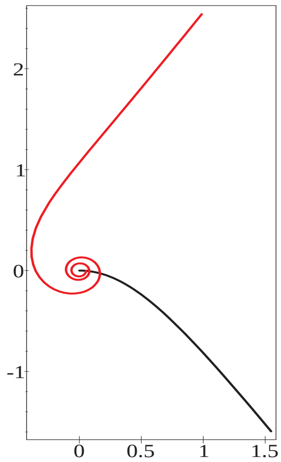
8.2.- $\varrho = |\operatorname{tg}(\theta)|$



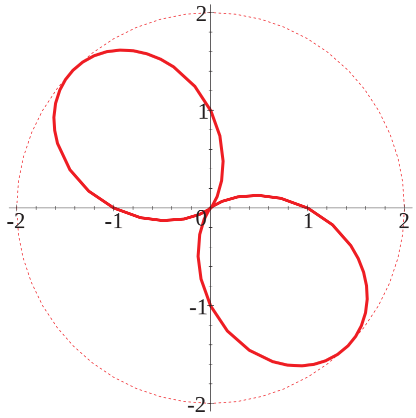
8.3.- $\varrho = \operatorname{sen}(n\,\theta),\ \ \theta \in ({}^{2k\pi}\!/_{n}, {}^{2k\pi}\!/_{n} + {}^{\pi}\!/_{n}),\ k \in \mathbb{Z}$



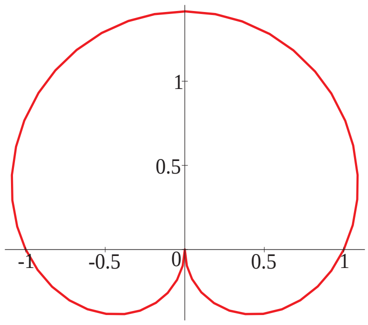
8.4.- $\varrho = \dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}\,,\quad \theta \in (-1,0) \cup (1,\infty)$



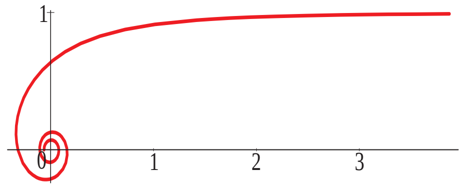
8.5.- $\varrho = 1 - \operatorname{sen}(2\,\theta)$



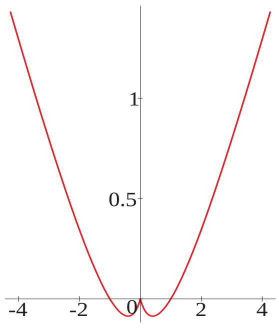
8.6.- $\varrho = \operatorname{sen}(\theta/2) + \cos(\theta/2)\,,\ \theta \in (4\,k\,\pi - \pi/2\,, 4\,k\,\pi + 3\pi/2)$



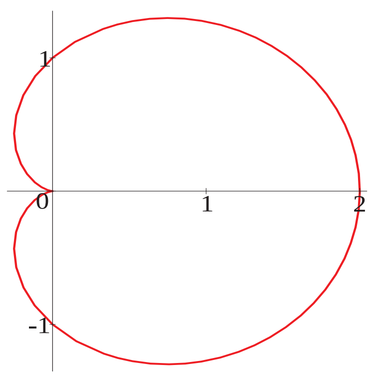
8.7.- $\varrho = a/\theta \quad (a > 0),\ \theta \in (0,\infty)$



8.8.- $\varrho = \dfrac{1 + 2\operatorname{sen}(\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}(\theta)}\,,\ \theta \in [-\pi/6\,, \pi/6) \cup (\pi - \pi/6\,, \pi + \pi/6]$



8.9.- $\varrho = 1 + \cos(\theta)$



9.- f es biyectiva entre A y B: $\begin{cases} u = \dfrac{\eta^2+\nu^2}{2}\,, \\ v = \dfrac{\eta^2-\nu^2}{2}\,, \end{cases}$ si, y sólo si, $\begin{cases} \eta = \sqrt{u+v}\,, \\ \nu = \sqrt{u-v}\,. \end{cases}$

Obviamente f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en A y su jacobiano es $\mathcal{J}f(\eta,\nu) = -2\,\eta\,\nu < 0$ para todo $(\eta,\nu)\in A$.

10.- La nueva parametrización es $\boldsymbol{\psi}\colon E\to\mathbb{R}^3$ donde

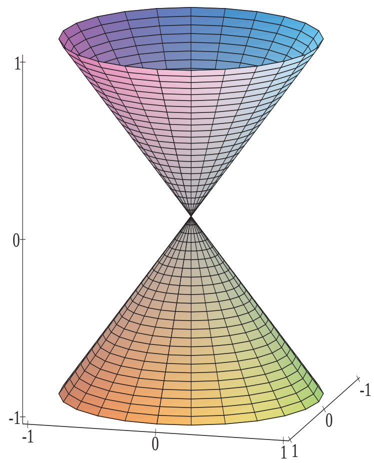
$$E = f(D) = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, u>0\,,\ |v|<u\,, u<1/2\right\},$$

y

$$\boldsymbol{\psi}(u,v) = \boldsymbol{\varphi}\circ f^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{u+v}, \sqrt{u-v}, \sqrt{1-2\,u}\right).$$

Puesto que el jacobiano de f es negativo, no se conserva la orientación.

11.- No es el soporte de una superficie paramétrica regular. De hecho no lo es ningún subconjunto suyo que contenga al vértice $(0,0,0)$; es imposible definir en este punto el plano tangente.



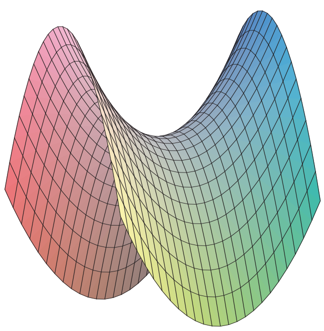
Por ejemplo,

$$\boldsymbol{\varphi}(\theta,t) = \left(\frac{a}{c}\,t\,\cos(\theta), \frac{b}{c}\,t\,\operatorname{sen}(\theta), t\right),$$

con $(\theta,t)\in(0,2\pi)\times(0,\infty)$, es una representación paramétrica de la hoja superior del cono menos la semirrecta

$$\left\{\left(\frac{a}{c}\,z, 0, z\right) : z\geq 0\right\}.$$

12.- La aplicación



$$\boldsymbol{\varphi}(x,y) = \left(x, y, \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

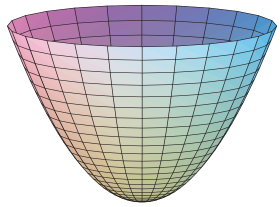
es una representación paramétrica (la gráfica de una función) del paraboloide hiperbólico, denominado popularmente *silla de montar*.

Nota: La figura representa una porción de esta superficie, correspondiente a la gráfica en un entorno del origen.

13.1.- *Plano*: i) $D=\mathbb{R}^2$. ii) $f(x,y,z) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x-x_0 \\ a_2 & b_2 & y-y_0 \\ a_3 & b_3 & z-z_0 \end{vmatrix} = 0\,;$

iii) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right).$

13.2.- *Paraboloide elíptico* $(a,b>0)$:

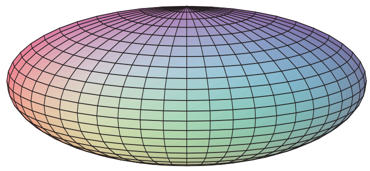


i) $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>0,\ \alpha<v<\alpha+2\pi\}$ o
$D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u<0,\ \alpha<v<\alpha+2\pi\}$.

ii) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-z=0.$

iii) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=(-2\,b\,u^2\cos(v),-2\,a\,u^2\operatorname{sen}(v),a\,b\,u)$; $\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)=\Big(\dfrac{2x}{a^2},\dfrac{2y}{b^2},-1\Big)$.

13.3.- *Elipsoide* (de semiejes $a,b,c>0$):



i) $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0<u<\pi,\ \alpha<v<\alpha+2\pi\}$ o
$D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : -\pi<u<0,\ \alpha<v<\alpha+2\pi\}$.

ii) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0.$

iii) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=\big(b\,c\operatorname{sen}^2(u)\cos(v)\,,\ a\,c\operatorname{sen}^2(u)\operatorname{sen}(v)\,,\ a\,b\cos(u)\operatorname{sen}(u)\big)$;
$\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)=\Big(\dfrac{2\,x}{a^2},\dfrac{2\,y}{b^2},\dfrac{2\,z}{c^2}\Big)$.

13.4.- *Superficie de revolución* (generada al girar la gráfica de la función $z=f(x)$ alrededor del eje OZ):

i) $D=\big(\mathrm{Dom}(f)\cap(0,\infty)\big)\times(\alpha,\alpha+2\pi)$ o
$D=\big(\mathrm{Dom}(f)\cap(-\infty,0)\big)\times(\alpha,\alpha+2\pi)$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

ii) $F(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2})-z=0.$

iii) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=\big(-uf'(u)\cos(v)\,,\ -uf'(u)\operatorname{sen}(v)\,,\ u\big)$;
$\Big(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\Big)=\Big(f'(\sqrt{x^2+y^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ f'(\sqrt{x^2+y^2})\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,-1\Big)$.

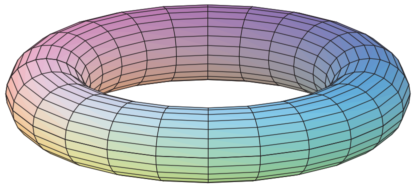
13.5.- *Cilindro elíptico* (superficie reglada):

i) $D=\mathbb{R}\times(\alpha,\alpha+2\pi)$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

ii) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0.$

iii) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=\big(-b\cos(v),-a\operatorname{sen}(v),0\big)$; $\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)=\Big(\dfrac{2\,x}{a^2},\dfrac{2\,y}{b^2},0\Big)$.

13.6.- *Toro* (de radios a, b, $0 < b < a$):



i) $D = (\alpha, \alpha + 2\pi) \times (\beta, \beta + 2\pi)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

ii) $f(x, y, z) = \big(\sqrt{x^2 + y^2} - a\big)^2 + z^2 - b^2 = 0$.

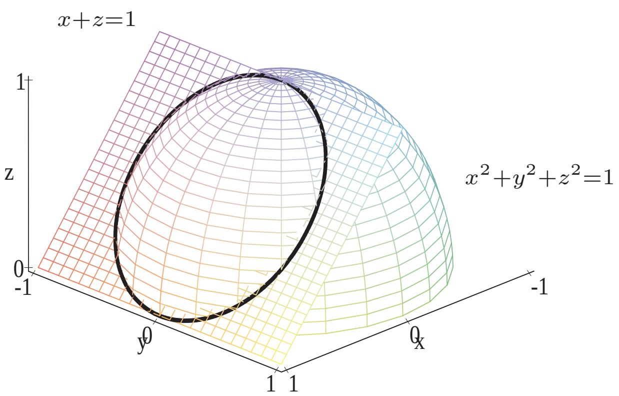
iii) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = b\,(a + b\cos(u))\,\big(\cos(u)\,\mathrm{sen}(v)\,,\ \cos(u)\cos(v)\,,\ 1\big)$;

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) = \Big(\frac{2\,(\sqrt{x^2 + y^2} - a)\,x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,\ \frac{2\,(\sqrt{x^2 + y^2} - a)\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,\ 2\,z\Big).$$

14.1.- $\gamma(t) = \big(1 + r\cos(t), 2 + r\,\mathrm{sen}(t), -2 - r\cos(t)\big)\,,\quad t \in [0, 2\pi]$.

14.2.- $\gamma(t) = \begin{cases} (t, t), & t \in [0, 1], \\ (1, 2 - t), & t \in [1, 2], \\ (3 - t, 0), & t \in [2, 3]. \end{cases}$

14.3.- $\gamma(t) = \Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(t), \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(t), \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(t)\Big),\quad t \in [0, 2\pi]$.



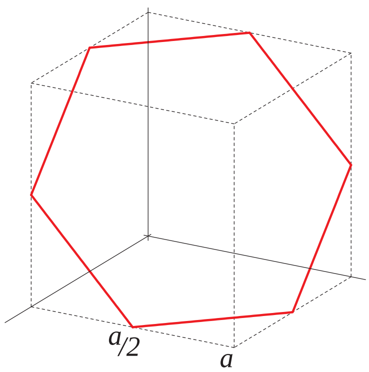
14.4.- $\gamma(t) = \Big(\dfrac{a}{2}(1 + \cos(t))\,,\ \dfrac{a}{2}\,\mathrm{sen}(t)\,,\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\,\sqrt{1 - \cos(t)}\,\Big),\quad t \in [0, \pi]\,.$

14.5.- $\gamma(t) = \Big(t + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,t^2\,,\ \dfrac{1}{2}\,t^2\,,\ 1 + \sqrt{2}\,t + \dfrac{1}{2}\,t^2\Big),\quad t \in [-\sqrt{2}, 0]$

Da la orientación opuesta, recorre la curva desde $(0, 1, 0)$ hasta $(0, 0, 1)$.

14.6.- $\gamma(t) = \big(a + a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t)\big),\quad t \in [0, 2\pi]$.

14.7.- La curva es un hexágono.



El segmento contenido en el plano $x = 0$ se parametriza por:

$$\gamma(t) = \Big(0, t, \frac{3a}{2} - t\Big),\quad t \in [a/2, a]\,.$$

Los demás segmentos se parametrizan de forma similar a partir de la ecuación del plano, imponiendo las condiciones $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$, respectivamente (ver 14.13).

14.8.- $\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \big(u, v, \sqrt{2\,u\,v}\,\big)$, $(u,v) \in D = (0,2)\times(0,1)$.

14.9.- $\boldsymbol{\varphi}(u,v) = (u, v, a-u-v)$, $(u,v) \in D = \{(u,v) : u^2+v^2 < a^2\}$.

14.10.- $\boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta) = \left(\frac{a}{2}\big(1+\rho\cos(\theta)\big)\,,\ \frac{a\rho}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)\,,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\,\sqrt{1-\rho\cos(\theta)}\right)$,
$(\rho,\theta) \in (0,1)\times(0,2\pi)$. (ver también 14.4)

14.11.- $\boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta), \sqrt{2-\rho^2}\,\big)$, $(\rho,\theta) \in (0,1)\times(0,2\pi)$.

14.12.- $\boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta), \rho\big)$,
$(\rho,\theta) \in D = \big\{(\rho,\theta) : \theta \in (-\pi/2\,, \pi/2)\,,\ 0<\rho<2\cos(\theta)\big\}$.

14.13.- $\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \left(u, v, \frac{3\,a}{2} - u - v\right)$,
$(u,v) \in D = \{(u,v) \in (0,a)\times(0,a) : a/2 < u+v < 3a/2\}$

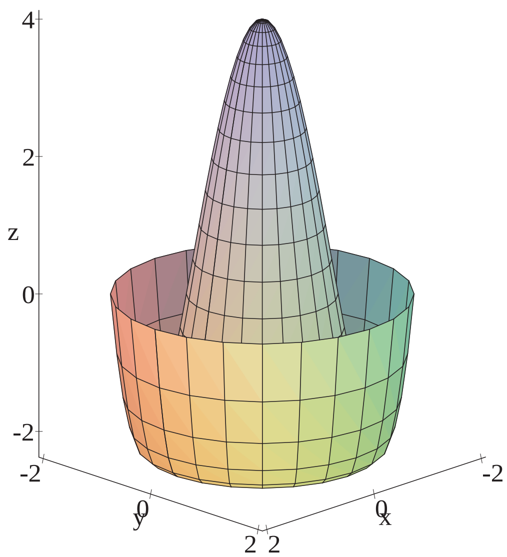
14.14.- (Ver también el ejercicio 13.4)

$\boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta), f(\rho)\big)$,

con $(\rho,\theta) \in (0,2)\times(0,2\pi)$,

siendo en este caso

$$f(x) = (x^2-1)(x^2-4)\,.$$



TEMA 10 INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN

La filosofía y la construcción de la integral de Riemann para funciones de varias variables es exactamente la misma que en el caso unidimensional, de hecho, la construcción que realizaremos de forma general en $\mathbb{R}^p$ coincide, al particularizarla para $p = 1$, con la teoría de la integral de Riemann en intervalos compactos de la recta real, así que esta teoría, al menos en lo conceptual, no debe suponer un esfuerzo demasiado grande para el que haya comprendido ese otro caso más simple.

La consideración de espacios euclídeos de dimensión arbitraria no aporta ninguna dificultad adicional, aunque el lector que así lo prefiera puede pensar en los casos usuales de aplicación práctica, que son los que se refieren a integrales dobles y triples, es decir, para dimensiones $p = 2$ y $p = 3$.

§ 1 INTERVALOS EN $\mathbb{R}^p$.

Este primer epígrafe se dedica a extender a los espacios euclídeos ciertas nociones ya conocidas para la recta real.

Definición 1.1.- Llamaremos *intervalo* (*acotado*) de $\mathbb{R}^p$ a todo producto cartesiano I de intervalos acotados $I_1, I_2, \ldots, I_p$ de $\mathbb{R}$:

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p .$$

Si a_j, b_j son números reales, $a_j < b_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, el intervalo

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p] ,$$

se dice *cerrado* y el intervalo

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_p, b_p) ,$$

se dice *abierto*.

Observaciones 1.2.-

i) Los intervalos cerrados son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^p$.

ii) Los intervalos abiertos son realmente subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^p$. Además el interior de un intervalo es el intervalo abierto de iguales extremos.

Definición 1.3.- Sea I un intervalo compacto de $\mathbb{R}^p$. Se llama *partición* de I a toda familia finita $\boldsymbol{P} = \{I_k \,:\, k = 1, 2, \ldots, n\}$ de intervalos compactos verificando las dos condiciones siguientes:

i) $I = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$.

ii) Si $k \neq j$, entonces $\overset{\circ}{I_k} \cap \overset{\circ}{I_j} = \emptyset$.

Los intervalos I_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, se denominan *subintervalos* de la partición.

Definición 1.4.- Para cada intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$$

se define su *medida* (*p-dimensional*) por

$$m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_p - a_p)\,,$$

y de igual forma se define la medida del intervalo abierto con los mismos extremos, $\overset{\circ}{I}$, y la de los demás intervalos entre $\overset{\circ}{I}$ e I.

Observaciones 1.5.-

i) Los términos *longitud*, *área* y *volumen* se refieren, como es habitual, a la medida en los casos $p = 1, 2, 3$, respectivamente.

ii) De forma rigurosa deberíamos denotar por m_p a la medida p-dimensional, pero por no recargar la notación omitiremos el subíndice en la mayoría de los casos, puesto que vendrá dado por el contexto.

iii) Cuando digamos que un conjunto es un intervalo admitiremos la posibilidad de que el conjunto sea vacío y, en ese caso, se define $m(\emptyset) = 0$.

Con este convenio se verifican las siguientes propiedades:

Propiedades 1.6.-

i) La intersección de dos intervalos es un intervalo.

ii) Si I, J son dos intervalos de $\mathbb{R}^p$, con $I \subseteq J$, entonces $m(I) \leq m(J)$.

iii) Si I es un intervalo de $\mathbb{R}^p$ y J es un intervalo de $\mathbb{R}^q$, entonces $I \times J$ es un intervalo de $\mathbb{R}^{p+q}$ y $m_{p+q}(I \times J) = m_p(I)\, m_q(J)$.

iv) Si $\boldsymbol{P} = \{I_k \,:\, k = 1, 2, \ldots, n\}$ es una partición del intervalo compacto I, entonces

$$m(I) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k)\,.$$

Se llama *diámetro* de la partición $\boldsymbol{P}$ al número

$$\|\boldsymbol{P}\| = \max\{\, m(I_k) : k = 1, 2, \ldots, n\,\}.$$

En la definición 1.4 se ha asignado la misma medida a un intervalo compacto de $\mathbb{R}^p$ que a su interior, lo cual es natural si se observa que estos dos intervalos difieren en subconjuntos de espacios afines de dimensión menor estrictamente que p y se piensa que, en $\mathbb{R}$ la longitud que se debería asignar a un conjunto unipuntual es 0, en $\mathbb{R}^2$ un segmento debe tener área 0, etc. Lo siguiente va destinado a precisar esta observación.

Definición 1.7.- Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^p$ se dice *de medida nula* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia de intervalos $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ tales que:

i) $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$. ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} m(I_k) < \varepsilon$.

Propiedades 1.8.-

i) Si $E \subset \mathbb{R}^p$ es de medida nula y $A \subset E$, entonces A es de medida nula.

ii) La unión finita de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula.

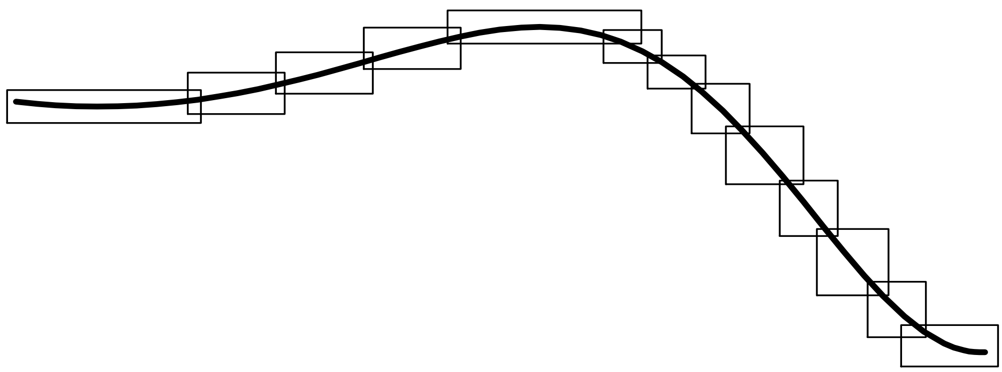
Teorema 1.9.- Sea U un abierto de $\mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{f}: U \to \mathbb{R}^p$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$. Si $E \subset U$ es un conjunto de medida nula, entonces su imagen, $\boldsymbol{f}(E)$, es también un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^p$.

Teorema 1.10.- Sea U un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{f}: U \to \mathbb{R}^p$, con $m < p$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $\boldsymbol{f}(U)$ es un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^p$.

Observación 1.11.- El resultado anterior tiene especial relevancia en el desarrollo de la integral, y en los casos usuales $p = 2, 3$ se interpreta de la siguiente manera:

- El soporte de una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ en el plano o en el espacio tiene medida (área, volumen) nula en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
- El soporte de una superficie paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ tiene medida (volumen) nula en $\mathbb{R}^3$.

Estos hechos dan sentido a las consideraciones previas a la definición 1.7.



Un recubrimiento de una curva compacta por un número finito de intervalos. La suma de las áreas de estos se puede hacer arbitrariamente pequeña aumentando su número.

§ 2 INTEGRACIÓN EN INTERVALOS.

Definición 2.1.- Sea f una función real definida y acotada en el intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Dada una partición $\boldsymbol{P} = \{I_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ de I, elegido un punto $\boldsymbol{x}_k$ en cada subintervalo I_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, el conjunto $T = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ se denomina *conjunto de puntos intermedios asociado a* $\boldsymbol{P}$ y el número dado por

$$\sigma(f, \boldsymbol{P}, T) = \sum_{k=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_k)\, m(I_k)$$

se llama *suma de Riemann de* f *asociada a* $\boldsymbol{P}$ *y a* T.

Definición 2.2.- Sea f una función real definida y acotada en el intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Se dice que f es *integrable en el sentido de Riemann*, *Riemann-integrable* o simplemente *integrable* en I si existe un número real $\mathcal{I}(f)$ que verifica la siguiente propiedad:

"Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $\boldsymbol{P}$ de I con $\|\boldsymbol{P}\| < \delta$ y para cada conjunto T de puntos intermedios asociado a $\boldsymbol{P}$ se tiene que

$$\big|\mathcal{I}(f) - \sigma(f, \boldsymbol{P}, T)\big| < \varepsilon\text{''}.$$

En este caso, a $\mathcal{I}(f)$ se le denomina la *integral de* f *en* I, que se denota por

$$\int_I f \qquad \text{ó} \qquad \int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad \text{ó} \qquad \int_I f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_p\,.$$

Observación 2.3.- En la práctica es habitual indicar la dimensión del espacio donde se integra mediante la repetición del símbolo de la integral, y así, las notaciones

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy\,; \qquad \iiint_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

son usuales cuando se integra en intervalos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Propiedades 2.4.- Sean f y g funciones reales definidas e integrables en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$.

2.4.1.- Linealidad: Las funciones $f+g$ y $k\,f$, $k\in\mathbb{R}$, son integrables en I, y se tiene que

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g \qquad \text{y} \qquad \int_I k\,f = k\int_I f\,.$$

2.4.2.- Monotonía: Si $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x}\in I$, entonces

$$\int_I f \le \int_I g\,.$$

2.4.3.- La función $|f|$ es integrable en I, y

$$\Big|\int_I f\Big| \le \int_I |f| \le \sup\{|f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x}\in I\}\, m(I)\,.$$

El recíproco no es cierto, es decir, la integrabilidad de $|f|$ no implica la de f.

Proposición 2.5.- Sea f una función integrable en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$ y tal que $f(I)\subset[a,b]$. Si $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua, entonces, la función compuesta $g\circ f$ es integrable en I.

Corolario 2.6.- Sean f y g funciones integrables en un mismo intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Entonces:

i) f^2 y $f\,g$ son integrables en I.

ii) Si existe $\delta>0$ tal que $f(\boldsymbol{x})\ge\delta$ para cada $\boldsymbol{x}\in I$, entonces, la función $1/f$ es integrable en I.

Proposición 2.7.- (*Aditividad de la integral respecto del intervalo*)

Sean f una función real definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{P}=\{I_k : k=1,2,\dots,n\}$ una partición de I. Entonces, f es integrable en I si, y sólo si, es integrable en cada subintervalo I_k, $1\le k\le n$. Además, si es integrable se verifica

$$\int_I f = \sum_{k=1}^{n}\int_{I_k} f\,.$$

Las propiedades o criterios de integrabilidad anteriores se deducen directamente de la definición, pero todavía no hemos proporcionado ejemplos de funciones integrables, a lo cual nos dedicamos ahora.

Proposición 2.8.- Sea f una función constante en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$, $f(\boldsymbol{x}) = c \in \mathbb{R}$ para cada $\boldsymbol{x} \in I$. Entonces f es integrable en I y

$$\int_I f = \int_I c = c\, m(I)\,.$$

Teorema 2.9.- Toda función continua en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$ es integrable en dicho intervalo.

Definición 2.10.- Sea f una función real y acotada en el intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Se dice que f es *escalonada* si existe una partición $\boldsymbol{P} = \{I_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ de I de modo que f es constante en cada subintervalo abierto $\overset{\circ}{I_k}$.

Proposición 2.11.- Si f es una función escalonada en el intervalo compacto I, entonces f es integrable en I. Además, si f toma el valor constante $c_k \in \mathbb{R}$ en cada intervalo abierto $\overset{\circ}{I_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, siendo $\boldsymbol{P} = \{I_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ partición de I, entonces

$$\int_I f = \sum_{k=1}^{n} c_k\, m(I_k)\,.$$

Observación 2.12.- Con la notación de la proposición precedente, una función escalonada f es discontinua a lo sumo en los puntos frontera de cada subintervalo I_k, puntos que, según 1.11 y 1.8.ii, conforman un conjunto de medida nula. El teorema siguiente va dirigido en este sentido y caracteriza las funciones integrables.

Teorema 2.13.- (*Criterio de Lebesgue de Riemann-integrabilidad*)

Sea f una función real definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Es condición necesaria y suficiente para que f sea integrable en el sentido de Riemann en I que el conjunto de puntos de discontinuidad de f sea de medida nula, es decir, que exista un subconjunto $A \subset I$ de medida nula tal que f es continua en $I \setminus A$.

Ejemplo: La función definida en $I = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > y; \\ 0 & \text{si } x \leq y, \end{cases}$$

es integrable ya que es continua en todos los puntos de I excepto en los de la diagonal $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\,,\ y = x\}$, que por ser un segmento es de medida nula en $\mathbb{R}^2$.

Hasta el momento hemos presentado diversos criterios de integrabilidad muy útiles en la práctica pero, excepto en el caso de las funciones escalonadas, no se ha dicho nada acerca del problema de determinar la integral de una función integrable, que si se aborda a partir de la definición resulta inviable en la mayoría de los casos. Este problema se reduce a la integración en intervalos de $\mathbb{R}$ mediante un procedimiento de 'integración iterada' que exponemos a continuación.

Notación: Si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_q) \in \mathbb{R}^q$, representaremos por $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ al elemento de $\mathbb{R}^{m+q}$ dado por

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_q)\,.$$

Definición 2.14.- Sea I un intervalo de $\mathbb{R}^{m+q}$. Se define la *proyección* de I en $\mathbb{R}^m$ como el intervalo de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$J_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \,:\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in I \;\text{ para algún } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^q\}\,,$$

y se define la *proyección* de I en $\mathbb{R}^q$ como el intervalo de $\mathbb{R}^q$ dado por

$$J_2 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^q \,:\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in I \;\text{ para algún } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\}\,.$$

Obviamente $I = J_1 \times J_2$.

Si f es una función real definida en I, para cada $\boldsymbol{x} \in J_1$, se define la función $f_{\boldsymbol{x}} \colon J_2 \to \mathbb{R}$, llamada *sección* de f por $\boldsymbol{x}$, mediante

$$f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,,$$

y para cada $\boldsymbol{y} \in J_2$, se define la sección de f por $\boldsymbol{y}$, $f_{\boldsymbol{y}} \colon J_1 \to \mathbb{R}$, como

$$f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,.$$

Teorema 2.15.- (*Teorema de Fubini*)

Sea f una función integrable en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{m+q}$, y supongamos que para todo $\boldsymbol{x} \in J_1$ la función $f_{\boldsymbol{x}}$ es integrable en J_2, y para todo $\boldsymbol{y} \in J_2$ la función $f_{\boldsymbol{y}}$ es integrable en J_1. Entonces:

i) Las funciones

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{J_2} f_{\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{y} = \int_{J_2} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \qquad \text{y} \qquad \psi(\boldsymbol{y}) = \int_{J_1} f_{\boldsymbol{y}}\, d\boldsymbol{x} = \int_{J_1} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}$$

son integrables en J_1 y J_2, respectivamente.

ii) Se verifica que

$$\begin{aligned}\int_I f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y} &= \int_{J_1}\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{J_1}\Big(\int_{J_2} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\Big)\,d\boldsymbol{x}\\ &= \int_{J_2}\psi(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \int_{J_2}\Big(\int_{J_1} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\Big)\,d\boldsymbol{y}\,.\end{aligned}$$

Observación 2.16.- En los casos usuales, cuando se manejan funciones continuas salvo en puntos que conforman curvas, superficies, etc. de dimensión estrictamente menor que p, las funciones $f_{\boldsymbol{x}}$ y $f_{\boldsymbol{y}}$ son integrables; en esta situación una aplicación iterada del teorema anterior conduce al siguiente resultado de aspecto más amigable:

Corolario 2.17.- Sea f una función integrable en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$, $I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_p,b_p]$. Entonces

$$\int_I f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{a_p}^{b_p}\Big(\cdots\Big(\int_{a_2}^{b_2}\Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\ldots,x_p)\,dx_1\Big)\,dx_2\Big)\cdots\Big)dx_p\,,$$

supuesto que todas las integrales en los intervalos $[a_j,b_j]$ tienen sentido. Lo mismo se puede decir para cualquier permutación del orden de las variables.

§ 3 INTEGRACIÓN EN CONJUNTOS MEDIBLES.

En las aplicaciones usuales de la integral de Riemann es necesario considerar a veces funciones definidas en conjuntos que no son intervalos. Se hace necesario por tanto, en primer lugar, determinar qué conjuntos son 'adecuados' para la integración, y en segundo lugar, extender el concepto de integral a este tipo de conjuntos. Éste es el objetivo del presente epígrafe. Respecto al primer punto, los conjuntos a considerar deben ser aquéllos que se puedan medir, es decir, de los que se pueda determinar su área, volumen, etc. Esta consideración se precisa a continuación.

Definición 3.1.- Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^p$. Se define su *función característica*, $\chi_E\colon\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, por

$$\chi_E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \boldsymbol{x}\in E;\\ 0, & \text{si } \boldsymbol{x}\notin E.\end{cases}$$

Obviamente la función característica de un subconjunto de $\mathbb{R}^p$ es acotada, así que tiene sentido hablar de su integrabilidad en cualquier intervalo I de $\mathbb{R}^p$.

Lema 3.2.- Sean E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^p$ e I,J dos intervalos compactos de $\mathbb{R}^p$ tales que $E\subset I$ y $E\subset J$. Entonces la función χ_E es integrable en I si, y sólo si, es integrable en J, además, en caso de ser integrable

$$\int_I \chi_E(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_J \chi_E(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Este lema garantiza la consistencia de la siguiente definición:

Definición 3.3.- Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^p$. Se dice que E es *medible en el sentido de Jordan* o simplemente *medible* si su función característica es integrable en cualquier intervalo compacto I con $E \subset I$. En este caso se define la *medida de* E, denotada $m(E)$, como el número real

$$m(E) = \int_I \chi_E(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,,$$

donde I es un intervalo compacto con $E \subset I$.

Observaciones 3.4.-

i) Es inmediato comprobar que todo intervalo de $\mathbb{R}^p$ es medible y que el concepto de medida que acabamos de definir coincide, para este tipo de conjuntos, con el que se dió antes (véase 2.8).

ii) Un conjunto compacto de medida nula es medible en el sentido de Jordan y su medida es precisamente 0. Cobra ahora sentido el adjetivo dado a estos conjuntos, que por otra parte sirven para caracterizar la medibilidad, lo que se precisa en el siguiente teorema.

Recordemos que dado un subconjunto E de $\mathbb{R}^p$ se define su *frontera* como el conjunto de puntos que son adherentes simultáneamente a E y a su complementario $\mathbb{R}^p \setminus E$:

$$\mathrm{Fr}(E) = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^p \setminus E}\,.$$

Teorema 3.5.- (*Caracterización de los conjuntos medibles*)

Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^p$. El conjunto E es medible en el sentido de Jordan si, y sólo si, su frontera es de medida p-dimensional nula.

Ejemplos: La frontera de un intervalo en $\mathbb{R}^2$ es la unión de los cuatro segmentos que forman sus lados, la de un círculo es la circunferencia que lo delimita, la de una bola en $\mathbb{R}^3$ es la esfera que la delimita, etc. En los tres casos citados las fronteras son conjuntos de medida nula (en virtud de 1.11) y por tanto todos estos conjuntos son medibles.

Abordamos ahora el problema de la integración.

Notación: Dada una función real f definida y acotada en un subconjunto E de $\mathbb{R}^p$, se denota por $f^*\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \text{si } \boldsymbol{x} \in E; \\ 0, & \text{si } \boldsymbol{x} \notin E. \end{cases}$$

Lema 3.6.- Sean K un subconjunto compacto y medible de $\mathbb{R}^p$, $f\colon K \to \mathbb{R}$ una función acotada e I, J dos intervalos compactos de $\mathbb{R}^p$ tales que $K \subset I$ y $K \subset J$. Entonces la función f^* es integrable en I si, y sólo si, es integrable en J; además, en caso de ser integrable,

$$\int_I f^*(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_J f^*(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Esto da sentido a la siguiente definición:

Definición 3.7.- Sean K un subconjunto compacto y medible de $\mathbb{R}^p$ y $f\colon K \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es *integrable en el sentido de Riemann* o simplemente *integrable* en K si la función f^* es integrable en cualquier intervalo compacto I que contenga a K. En este caso se define la *integral de f en K* como el número real

$$\int_I f^*(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,,$$

que se denota por

$$\int_K f \qquad \text{ó} \qquad \int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad \text{ó} \qquad \int_K f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_p\,.$$

En los casos $p = 2$ y $p = 3$ se usan también notaciones similares a las introducidas en la observación 2.3.

Observación 3.8.- Las propiedades de la integral de Riemann en intervalos se trasladan a este contexto y así son igualmente válidos los siguientes resultados, cuyos enunciados omitimos pues consisten, en todos los casos, en sustituir el intervalo I por el conjunto compacto y medible K: 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 y 2.13.

A continuación se presentan otras propiedades relativas a la integración en conjuntos medibles que se deducen de las análogas en intervalos o que son generalizaciones de aquéllas.

Teorema 3.9.- Sean f y g dos funciones reales definidas y acotadas en un mismo conjunto compacto y medible K de $\mathbb{R}^p$. Se supone que f y g coinciden en todos los puntos de K excepto quizá en los de un cerrado de medida nula, es decir, que existe un subconjunto cerrado y de medida nula $N \subset K$ tal que

$$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in K \setminus N\,.$$

Entonces, las funciones f y g son simultáneamente integrables o no integrables en K; además, en caso de serlo se verifica que

$$\int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_K g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Observación 3.10.- Una versión ya conocida del resultado anterior es la que se refiere, en el caso $p = 1$, a conjuntos finitos N. En esta situación general la conclusión es la misma: es posible redefinir una función de forma arbitraria, siempre que esto se haga en un compacto de medida nula, puesto que no se altera su carácter integrable ni el valor de la integral.

En lo que se refiere a la aditividad de la integral respecto de los conjuntos se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.11.- Sean f una función real definida y acotada en un subconjunto compacto y medible K de $\mathbb{R}^p$. Se supone que $\{K_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$ es una familia de compactos medibles de $\mathbb{R}^p$ tales que:

i) $K = \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j\,.$

ii) Si $j \neq l$, entonces $K_j \cap K_l$ es de medida nula.

Entonces, f es integrable en K si, y sólo si, es integrable en cada K_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Además, si es integrable se verifica que

$$\int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Observación 3.12.- En la suma que aparece en la fórmula anterior las integrales relativas a las partes comunes a dos subconjuntos, $K_j \cap K_l$, $j \neq l$, se consideran dos veces: una en la integral extendida a K_j y otra en la integral extendida a K_l. Esto es lícito pues, en virtud de la propiedad que generaliza 2.4.3 (ver 3.8) se tiene que

$$\left| \int_{K_j \,\cap\, K_l} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \right| \leq \sup\{|f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in K\}\, m(K_j \cap K_l) = 0\,.$$

Observación 3.13.- En cuanto a la integración iterada, para funciones integrables f en compactos medibles K el teorema de Fubini se aplica a la función f^* en un intervalo

I que contenga a K, pero en ciertas situaciones es posible dar expresiones más operativas en la práctica. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos:

1. Sean $[a,b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y φ_1, φ_2 funciones continuas en $[a,b]$ tales que

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad \text{para cada } x \in [a,b]\,.$$

El conjunto A de $\mathbb{R}^2$ definido por

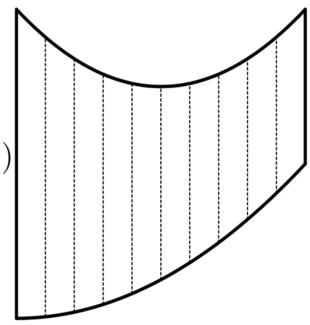
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a,b]\,,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

es compacto y medible. Si f es una función integrable en A se tiene que

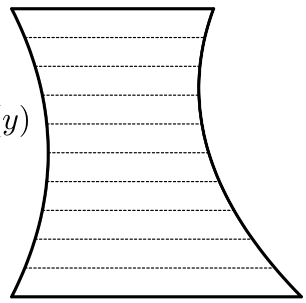
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Un resultado análogo se tiene intercambiando los papeles de las variables x e y.

$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$



$$a \leq y \leq b$$
$$\varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)$$



Nota: Puede ocurrir que, siendo f integrable en A, la integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ no tenga sentido para algún $x \in [a,b]$; no obstante, el resultado es cierto para funciones del tipo mencionado en 2.16. Lo mismo se puede decir en los siguientes ejemplos y ya no volveremos a hacer más comentarios al respecto.

2. Sean A un conjunto compacto y medible de $\mathbb{R}^2$ y ψ_1, ψ_2 funciones continuas en A tales que $\psi_1(x,y) \leq \psi_2(x,y)$ para cada $(x,y) \in A$.

El conjunto E de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in A\,,\ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\}$$

es compacto y medible. Si f es una función integrable en E se tiene que

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy\,. \tag{1}$$

3. Si el conjunto A considerado en el caso anterior es a su vez del tipo considerado en el ejemplo 1, es decir,

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \in [a,b]\,,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\,,\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}\,,$$

con φ_1, φ_2 continuas en $[a,b]$ y ψ_1, ψ_2 continuas en A, la integral doble que aparece en (1) se calcula de nuevo iteradamente, resultando

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx\,.$$

Como ejemplo de aplicación obtendremos la fórmula que proporciona el volumen de una bola de $\mathbb{R}^3$ en función de su radio, aunque este resultado se obtiene también, de una forma más simple, aplicando un cambio a coordenadas esféricas, que se expone en el último epígrafe.

Si B denota la bola centrada en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$, este conjunto es del tipo considerado; en este caso A es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le r^2\}$, es decir,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -r \le x \le r\,,\ -\sqrt{r^2 - x^2} \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\,\right\},$$

y las funciones ψ_1 y ψ_2 vienen dadas en A por

$$\psi_1(x,y) = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \qquad \text{y} \qquad \psi_2(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,.$$

El volumen de B es entonces

$$\begin{aligned} m(B) &= \iiint_B 1\,d\boldsymbol{x} = \iint_A \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\,dz \right) dx\,dy \\ &= \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\,dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\,\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\ dy \right) dx = \int_{-r}^{r} \pi\,(r^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \end{aligned}$$

(la integral respecto de y se calcula fácilmente aplicando, por ejemplo, el cambio de variable $y = \sqrt{r^2 - x^2}\,\cos(t)\,,\ t \in (0,\pi)$).

4. Si el conjunto compacto y medible E de $\mathbb{R}^3$ está contenido en el intervalo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ y $f\colon E \to \mathbb{R}$ es integrable se tiene que

$$\iiint_E f = \iiint_I f^* = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_{[a_1,\,b_1] \times [a_2,\,b_2]} f^*(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz\,,$$

la primera igualdad por definición y la segunda en virtud del teorema de Fubini, supuesto que todas las integrales dobles tienen sentido. Por otra parte, fijado $z \in [a_3, b_3]$, si el conjunto $E_z \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ definido por

$$E_z = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in E\big\}$$

es medible, la integral doble de f_z^* en el intervalo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ es igual a la integral de f_z en E_z, puesto que $f_z^*(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin E_z$ y $f_z^*(x, y) = f_z(x, y)$ si $(x, y) \in E_z$. De aquí se deduce que

$$\iiint_E f = \int_{a_3}^{b_3} \Big(\iint_{E_z} f(x, y, z)\, dx\, dy \Big) dz\,.$$

Este método se conoce con el nombre de *integración por secciones* y al aplicarlo a la función constantemente igual a 1 se obtiene el denominado *principio de Cavalieri*,

$$m_3(E) = \iiint_E 1 = \int_{a_3}^{b_3} \Big(\iint_{E_z} 1\, dx\, dy \Big) dz = \int_{a_3}^{b_3} m_2(E_z)\, dz\,,$$

que no es otra cosa que un caso particular del teorema de Fubini.

Ilustraremos el procedimiento expuesto con un ejemplo: Si E es la mitad superior de la bola de centro $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ y de radio r,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\,,\ z \geq 0\} \subset [-r, r] \times [-r, r] \times [0, r]\,,$$

para cada $z \in [0, 1]$, E_z es el disco cerrado centrado en $(0, 0)$ y de radio $\sqrt{r^2 - z^2}$

$$E_z = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2\big\}\,;$$

así pues, la integral en E de la función $f(x, y, z) = z$ es igual a

$$\begin{aligned} \iiint_E z\, dx\, dy\, dz &= \int_0^r \Big(\iint_{E_z} z\, dx\, dy \Big) dz = \int_0^r z \Big(\iint_{E_z} 1\, dx\, dy \Big) dz \\ &= \int_0^r z\, m_2(E_z)\, dz = \int_0^r z\, \pi\, (r^2 - z^2)\, dz = \frac{\pi}{4}\, r^4\,, \end{aligned}$$

ya que el área de un disco de radio ϱ es $\pi\, \varrho^2$.

En particular, si el sólido E es homogéneo, su centro de masa viene dado por

$$\frac{1}{m_3(E)} \Big(\iiint_E x\,, \iiint_E y\,, \iiint_E z \Big)$$

y, teniendo en cuenta que el volumen de E es $2\pi\, r^3/3$ (véase el ejemplo anterior), resulta que el centro de masas de E esta situado a altura $3\, r/8$, de hecho es el punto

$$\Big(0, 0, \frac{3}{8}\, r\Big)\,.$$

§ 4 INTEGRALES IMPROPIAS.

Nos proponemos ahora extender el concepto de integral a una clase más amplia de funciones. A diferencia del caso unidimensional, en el que la convergencia de una integral impropia se define por la convergencia de las integrales en subintervalos compactos, la ausencia de una relación de orden en $\mathbb{R}^p$, para $p \geq 2$, impide considerar de forma natural para un abierto de $\mathbb{R}^p$ una familia de compactos tan sencilla como en aquel caso.

Definición 4.1.- Sea V un conjunto abierto de $\mathbb{R}^p$. Se llama *sucesión expansiva de compactos medibles para* V a toda familia numerable $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos compactos medibles de V tales que:

i) $K_1 \subset \overset{\circ}{K_2} \subset K_2 \subset \overset{\circ}{K_3} \subset \ldots \subset K_{n-1} \subset \overset{\circ}{K_n} \subset \ldots$

ii) $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

Observación 4.2.- Dado cualquier conjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$ siempre existe una sucesión expansiva de compactos medibles para V.

Ejemplos:

i) Las familias de compactos $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ dadas por

$$K_n = [-n, n] \times [-n, n] \times \overset{p\, veces}{\cdots} \times [-n, n] \,, \qquad H_n = \overline{B}(\mathbf{0}, n)$$

son sucesiones expansivas de compactos medibles para $V = \mathbb{R}^p$.

ii) La familia $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ definida por

$$K_n = \overline{B}(\mathbf{0}, n) \setminus B\big(\mathbf{0}, {}^1\!/_n\big)$$

es una sucesión expansiva de compactos medibles para $V = \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Definición 4.3.- Sea f una función real definida en un abierto V de $\mathbb{R}^p$. Se dice que f es *localmente integrable* en V si al ser restringida a cada subconjunto compacto y medible K de V resulta ser acotada e integrable (en el sentido de Riemann) en K.

Definición 4.4.- Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$. Si f es localmente integrable en V se dice que tiene sentido la *integral impropia de f en V*, que tradicionalmente se denota por

$$\int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{2}$$

o con cualquier otra de las notaciones usadas para la integral de Riemann.

Observación 4.5.- Es sencillo determinar en cada caso concreto, a partir de la naturaleza del conjunto V y la de la función f, si la integral considerada es impropia o de Riemann. Por ejemplo, las integrales

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \quad \text{y} \quad \iint_{(0,\infty)\times(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(y)}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx\,dy$$

son impropias por no ser acotado el conjunto de integración o la función.

Definición 4.6.- Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$ y localmente integrable en V. Se dice que la integral impropia de f en V es *convergente* si para cada sucesión expansiva de compactos medibles para V, $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe y es finito el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,. \tag{3}$$

Lema 4.7.- Con las mismas hipótesis de la definición precedente. Si la integral impropia de f en V es convergente, el límite anterior es independiente de la sucesión expansiva de compactos medibles $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ elegida para V.

Definición 4.8.- Si la integral impropia de la función f en el abierto V de $\mathbb{R}^p$ tiene sentido y es convergente se define la *integral de f en V* como el límite (3) siendo $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ cualquier sucesión expansiva de compactos medibles para V. Este número real se designa igualmente, abusando de la notación, por la expresión (2).

La integral de una función en el sentido impropio coincide, cuando se manejan funciones acotadas e integrables en conjuntos acotados y medibles, con la que se definió anteriormente:

Proposición 4.9.- Si f es una función real definida e integrable en un compacto medible K, entonces la integral impropia de f en $\overset{\circ}{K}$ converge y además su valor es

$$\int_{\overset{\circ}{K}} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Observación 4.10.- La fórmula anterior tiene también una lectura muy interesante: la diferencia entre los conjuntos K y $\overset{\circ}{K}$ es la frontera de K, un conjunto de medida nula. Esa igualdad significa que la integración en ese conjunto no aporta nada (ver 3.12). En general, a la hora de integrar una función en un conjunto, tanto en el sentido de Riemann como en el impropio, se pueden ignorar conjuntos compactos de medida nula (p.e. curvas en $\mathbb{R}^2$, superficies en $\mathbb{R}^3$). El lector comprenderá por qué a estos conjuntos se les denomina también *conjuntos despreciables*.

Las siguientes propiedades son consecuencia de las análogas para la integral de Riemann y se obtienen pasando al límite.

Propiedades 4.11.- Sean f y g dos funciones reales definidas en un mismo abierto V de $\mathbb{R}^p$. Se supone que las integrales impropias de f y g en V tienen sentido y son ambas convergentes. Entonces:

4.11.1.- Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la integral impropia de la función $\alpha\, f + \beta\, g$ en V tiene sentido, es convergente, y además

$$\int_V \big(\alpha\, f(\boldsymbol{x}) + \beta\, g(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{x} = \alpha \int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \beta \int_V g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

4.11.2.- Si $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in V$,

$$\int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \le \int_V g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

En lo que respecta a la integración del valor absoluto de una función, es evidente que, si la integral impropia de la función f en un abierto V de $\mathbb{R}^p$ tiene sentido, también lo tiene la integral impropia de $|f|$ en el mismo abierto (ver 2.4 y 3.8), así que, al igual que se hace en el caso unidimensional, podríamos hablar de *convergencia absoluta de integrales impropias*.

En la integración en intervalos de la recta (acotados o no, cerrados o no) la convergencia absoluta implica la convergencia de una integral impropia, pero el recíproco no es cierto en general. Recordemos que el concepto de convergencia en aquel caso se enuncia tradicionalmente en términos de sucesiones crecientes de subintervalos compactos; sin embargo, la construcción de la integral impropia realizada ahora (que abarca también el caso $p = 1$), considerando todos los posibles subconjuntos medibles y compactos del abierto V, es más exigente, resultando que el concepto de convergencia absoluta es redundante:

Teorema 4.12.- Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$ y localmente integrable en V. La integral impropia de f en V es convergente si, y sólo si, lo es la integral impropia de $|f|$ en V. En caso de que converjan se tiene que

$$\left| \int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \right| \le \int_V |f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Observación 4.13.- En base al resultado anterior, cuando la integral impropia de una función f en un abierto V de $\mathbb{R}^p$ tenga sentido y sea convergente diremos también que f *es integrable en* V.

La equivalencia entre la convergencia y la convergencia absoluta de una integral impropia permite obtener un importante criterio de integrabilidad que es el siguiente:

Teorema 4.14.- (*Criterio de comparación*)

Sean f y g dos funciones reales definidas y localmente integrables en un abierto V de $\mathbb{R}^p$, y tales que

$$|f(\boldsymbol{x})| \leq |g(\boldsymbol{x})| \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in V\,.$$

Entonces:

i) Si la integral impropia de g en V converge, también converge la integral impropia de f en V.

ii) Si la integral impropia de f en V no converge, tampoco converge la integral impropia de g en V.

Los resultados anteriores proporcionan ya algunos criterios prácticos para el estudio de la convergencia de integrales impropias que, al ser combinados con los que presentamos a continuación sobre integración iterada, permiten resolver una amplia gama de problemas.

Notación: Dada una función f definida en un abierto V de $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{m+q}$, denotaremos por f^*, al igual que en §3, a la función definida en todo $\mathbb{R}^p$ que se obtiene al extender f por 0 en los puntos que no pertenecen a V. Las *secciones* de la función f^*

$$f^*_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}\,, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \qquad \text{y} \qquad f^*_{\boldsymbol{y}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\,, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^q$$

se definen de forma análoga a como se hizo en 2.14 para cada punto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^p$.

Teorema 4.15.- (*Criterio de Tonelli-Hobson*)

Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{m+q}$ y localmente integrable en V. Si alguna de las dos integrales iteradas

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f^*_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})|\, d\boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x} \qquad \text{ó} \qquad \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f^*_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{y}$$

existe y es finita (es decir, todas las integrales impropias en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^q$ tienen sentido y son convergentes), entonces la integral impropia de f^* en $\mathbb{R}^p$, es decir, la integral impropia de f en V, es convergente.

Aplicando de nuevo el resultado anterior a las integrales en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^q$ se tiene:

Corolario 4.16.- Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$ y localmente integrable en V. Si la integral iterada

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\cdots\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f^*(x_1,x_2,\ldots,x_p)|\,dx_1\Big)\,dx_2\Big)\cdots\Big)dx_p\,,$$

existe y es finita, en el sentido de que todas las integrales en $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ tienen sentido como integrales impropias convergentes, entonces la integral impropia de f en V es convergente. Lo mismo se puede decir para cualquier permutación del orden de las variables.

Teorema 4.17.- (*Teorema de Fubini para integrales impropias*)

Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p=\mathbb{R}^{m+q}$ y tal que la integral impropia de f en V tiene sentido y es convergente. Entonces

$$\int_V f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^p} f^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{x}\,,$$

siempre que las integrales iteradas tengan sentido como integrales impropias absolutamente convergentes en $\mathbb{R}^q$ y $\mathbb{R}^m$. Análogamente

$$\int_V f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{y}\,,$$

cuando la integración iterada tenga sentido.

Corolario 4.18.- Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$ y tal que la integral impropia de f en V tiene sentido y es convergente. Entonces

$$\int_V f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\cdots\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x_1,x_2,\ldots,x_p)\,dx_1\Big)\,dx_2\Big)\cdots\Big)dx_p\,,$$

siempre que todas las integrales iteradas tengan sentido como integrales impropias absolutamente convergentes en $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$. Lo mismo se puede decir para cualquier permutación del orden de las variables.

Observaciones 4.19.-

i) El teorema de Fubini se puede generalizar relajando sus hipótesis en el sentido siguiente: con la misma notación que en 4.17, puede suceder que para una cantidad finita de puntos $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$, o incluso en todo punto $\boldsymbol{x}$ de un compacto K de $\mathbb{R}^m$ de medida nula, no tenga sentido o, teniéndolo, no sea convergente la integral

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\mathbb{R}^q} f^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,.$$

Dando en estos puntos un valor arbitrario a φ se sigue verificando que

$$\int_V f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^{m+q}} f^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Lo mismo se puede decir acerca del criterio de Tonelli .

ii) Para funciones positivas (en general de signo constante) y localmente integrables en un abierto V de $\mathbb{R}^p$ se puede reformular el teorema de Fubini incluyendo el caso de integrales impropias no convergentes, dando al mismo tiempo un recíproco del criterio de Tonelli: concretamente, si admitimos, como convenio de notación, que el valor de una integral impropia no convergente es ∞, entonces sigue siendo válida la igualdad

$$\int_V f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^p} f^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{x}\,,$$

entendiendo que, si $\varphi(\boldsymbol{x}) = \infty$ para todo $\boldsymbol{x}$ en un abierto no vacío de $\mathbb{R}^m$, o si la integral impropia de φ en $\mathbb{R}^m$ no converge, tampoco converge la primera.

iii) En la práctica, cuando el conjunto abierto V se puede describir de forma sencilla, el criterio de Tonelli y el teorema de Fubini se aplican directamente a las funciones $|f|$ y f, respectivamente, y no a $|f^*|$ y f^*. Dejamos que el lector adapte a esta situación los ejemplos expuestos en la observación 3.13, lo cual se reduce a considerar intervalos abiertos de la recta real (acotados o no) en lugar de intervalos compactos y funciones φ_j, ψ_j, $j = 1,2$, continuas en dichos intervalos pero no necesariamente acotadas. Con el ánimo de clarificar este aspecto desarrollaremos un ejemplo:

Sea V el abierto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$V = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<x<1\,,\ 0<y\,,\ 0<z<{}^1\!/_x\big\}\,,$$

y sea f la función definida en V por

$$f(x,y,z) = \frac{e^{-y(z+1)}\,\mathrm{sen}(y)}{1+z\,x^2}\,.$$

Puesto que f es continua en V es integrable en cada subconjunto compacto y medible de V, de manera que la integral impropia de f en V tiene sentido; probaremos que es convergente. Para ello haremos uso, en primer lugar, del criterio de comparación:

$$0 \le |f(x,y,z)| = \frac{e^{-y(z+1)}\,|\,\mathrm{sen}(y)|}{1+z\,x^2} \le \frac{e^{-y(z+1)}}{1+z\,x^2} = g(x,y,z)\,,\quad (x,y,z)\in V\,.$$

La función g es positiva, y por ser continua tiene sentido su integral impropia en V, que es convergente como veremos aplicando el criterio de Tonelli:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x, y, z)\, dy \Big)\, dz \Big) dx = \int_0^1 \Big(\int_0^{1/x} \Big(\int_0^{\infty} \frac{e^{-y(z+1)}}{1 + z\, x^2}\, dy \Big)\, dz \Big) dx\,,$$

igualdad que se obtiene observando que: si $y \le 0$ entonces $g^*(x, y, z) = 0$, después, si $z \notin (0, 1/x)$ también $g^*(x, y, z) = 0$ y la primera integral es nula, y por último si $x \notin (0, 1)$ es $g_x^*(y, z) \equiv 0$ y es nula la integral iterada respecto de (y, z). La primera integral se calcula fácilmente buscando una primitiva de $g(x, y, z)$ respecto de y, y aplicando la regla de Barrow

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1/x} \frac{1}{(z+1)}\, \frac{1}{(1 + z\, x^2)}\, dz \Big) dx\,. \tag{4}$$

Para x fijo la integral que aparece es la de una función racional de z y descomponiendo en fracciones simples se tiene

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1/x} \Big[\frac{1}{(1 - x^2)}\, \frac{1}{(z+1)} - \frac{x^2}{(1 - x^2)}\, \frac{1}{(1 + z\, x^2)} \Big] dz \Big) dx\,;$$

aplicando de nuevo la regla de Barrow tras calcular primitivas de ambos sumandos (respecto de z) resulta ser

$$I = \int_0^1 \Big(\frac{1}{(1 - x^2)} \log(1 + 1/x) - \frac{1}{(1 - x^2)} \log(1 + x) \Big)\, dx = \int_0^1 \frac{-\log(x)}{1 - x^2}\, dx\,.$$

La última integral es la integral impropia de una función positiva (al ir integrando funciones positivas los resultados deben ser positivos) en un intervalo de $\mathbb{R}$, que es convergente, como se deduce aplicando los criterios de integrabilidad usuales para este tipo de integrales; en este caso

$$\int_0^1 \frac{-\log(x)}{1 - x^2}\, dx = \int_{\to 0}^{1/2} \frac{-\log(x)}{1 - x^2}\, dx + \int_{1/2}^{\to 1} \frac{\log(1 + (x-1))}{(x-1)\,(x+1)}\, dx\,,$$

resulta que $-\log(x)$ es integrable en $(0, 1/2]$ y

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\log(1 + (x-1))}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{1}{2} \qquad (\log(1+t) \sim_0 t)\,.$$

Por tanto, la integral impropia de g en V es convergente y así lo es también la de f en virtud de 4.14, por ser $|f| \le g$.

iv) Para funciones f que no sean de signo constante (esto es, que no coincidan con $|f|$ ó $-|f|$) el recíproco del teorema de Fubini es en general falso, es decir, puede ser que, para una función f localmente integrable en un abierto V de $\mathbb{R}^p$, existan todas las integrales iteradas y sean convergentes hacia el mismo valor, y sin embargo no sea convergente la integral impropia de f en V; como ejemplo considérese la función f

definida en $V = (-1,1)\times(-1,1) \setminus \{(0,0)\}$ por

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{\big(x^2+y^2\big)^2}\,.$$

Resulta que es nula la integral iterada

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{-x}{2\,(x^2+y^2)}\right]_{y=-1}^{y=1} dx = \int_{-1}^{1} 0\ dx = 0\,,$$

y análogamente se comprueba que la otra integral iterada es nula. Sin embargo la integral impropia de f en V no es convergente pues no lo es la de $|f|$, ya que un cálculo elemental muestra que

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} |f(x,y)|\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{|x|}{x^2+1}\right)dx\,,$$

y por no ser convergente esta última integral no puede serlo la de $|f|$ en V según lo expuesto en el apartado 4.19.ii).

Por último, mencionaremos que la propiedad de aditividad finita respecto de los conjuntos se verifica igualmente para integrales impropias, explícitamente:

Proposición 4.20.- Sea V un abierto de $\mathbb{R}^p$. Se supone que existen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, abiertos de $\mathbb{R}^p$, disjuntos dos a dos, y un conjunto N de medida nula, tales que

$$V = \big(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k\big) \cup N\,.$$

Dada $f\colon V \to \mathbb{R}$ localmente integrable, la integral impropia de f en V converge si, y sólo si, convergen todas las integrales impropias de f en cada V_j. Además, si convergen,

$$\int_V f = \sum_{j=1}^{k} \int_{V_j} f\,.$$

§ 5 CAMBIOS DE VARIABLES.

Recordemos que si U, V son dos abiertos de $\mathbb{R}^p$, una aplicación $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to V$ se dice que es un *difeomorfismo* o *cambio de variables de clase* $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, si $\boldsymbol{\varphi}$ es biyectiva y $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ son de clase $\mathcal{C}^k$ en U y V, respectivamente. El determinante de la *matriz Jacobiana* de $\boldsymbol{\varphi}$

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq p}$$

se llama *determinante jacobiano* o, simplemente, *jacobiano* de $\boldsymbol{\varphi}$, y se denota por $\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}$. Como consecuencia del teorema de la función inversa, una aplicación $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to V$ de clase $\mathcal{C}^1$ en U es un difeomorfismo si, y sólo si, $\boldsymbol{\varphi}$ es biyectiva y $\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in U$.

En lo sucesivo, para abreviar, con la palabra 'difeomorfismo' designaremos cualquier difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$ al menos.

Teorema 5.1.- (*Teorema del Cambio de Variables*)

Sean U, V abiertos de $\mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\varphi}$ un difeomorfismo de U en V. Si $E \subset V$ es un subconjunto compacto y medible, o si E es abierto, y f es una función definida en E tal que la integral (de Riemann o impropia)

$$\int_E f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

tiene sentido, entonces también tiene sentido la integral (de Riemann o impropia)

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(E)} f\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)\, |\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Además, la primera es convergente si, y sólo si, lo es la segunda; en este caso,

$$\int_E f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(E)} f\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)\, |\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Corolario 5.2.- En las mismas condiciones del teorema precedente. Si $K \subset V$ es un compacto medible tambien lo es $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(K) \subset U$ y

$$m(K) = \int_K 1\, d\boldsymbol{y} = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(K)} |\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Observación 5.3.- El teorema del cambio de variables se ha enunciado de forma global para integrales de Riemann e impropias. Esto se debe, por una parte, a la posibilidad que ofrece el resultado 4.9 de sustituir la integral de Riemann de una función g integrable sobre un compacto medible K por la integral impropia (convergente) sobre $\overset{\circ}{K}$ de (la restricción de) g; o bien, la de sustituir la integral impropia convergente de una función acotada h sobre un abierto acotado y medible V por la integral sobre el compacto medible $\overline{V}$ de cualquier extensión acotada de h a $\overline{V}$. Por otra parte, puede suceder incluso que mediante un cambio de variables se transforme un conjunto acotado en otro que no lo es o una función integrando acotada en otra que no lo sea (esto último puede ocurrir si el jacobiano de la transformación no es acotado). A modo de ejemplo, estúdiese la integral impropia propuesta en el ejercicio 19.5 mediante un cambio a coordenadas polares (que son descritas en el apartado 5.4.2).

5.4.- Cambios de variables más comunes

Los resultados que se presentan a continuación se utilizan, en la mayoría de los casos, para transformar integrales en determinados conjuntos en integrales en intervalos de $\mathbb{R}^p$, a las que es fácilmente aplicable el teorema de Fubini.

1. *Cambios de referencia afín en* $\mathbb{R}^p$.

Sean $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p$, y $\boldsymbol{v}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip})$, $1 \leq i \leq p$, p vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^p$. La aplicación $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ definida por

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \boldsymbol{b} + \sum_{i=1}^{p} x_i\, \boldsymbol{v}_i$$

es un difeomorfismo cuyo jacobiano, constante, es $\mathcal{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \det \big(a_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq p}$.

2. *Coordenadas polares en* $\mathbb{R}^2$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y consideremos los abiertos

$$U_\alpha = (0,\infty)\times(\alpha, \alpha + 2\pi)\,, \qquad V_\alpha = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{\big(t\cos(\alpha), t\,\mathrm{sen}(\alpha)\big) \,:\, t \geq 0\big\}\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}\colon U_\alpha \to V_\alpha$ definida por

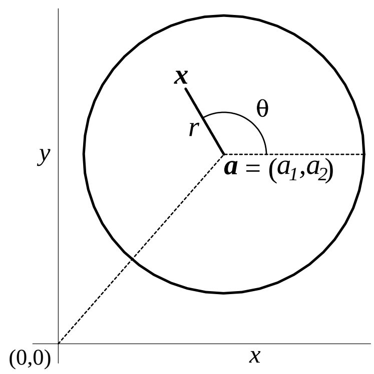
$$(x, y) = \boldsymbol{g}(r, \theta) = \big(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)\big)\,,$$

es un difeormorfismo; además, $|\mathcal{J}\boldsymbol{g}(r, \theta)| = r$.

• La coordenada r no es otra cosa que la norma euclídea del vector $(x, y) = \boldsymbol{g}(r, \theta)$, así que este cambio puede resultar útil en el cálculo de integrales en círculos, ya que

$$\boldsymbol{g}\big((0, R)\times(\alpha, \alpha + 2\pi)\big) \quad \text{y} \quad B(\boldsymbol{0}, R)$$

difieren en un conjunto de medida nula (un segmento); o de integrales en sectores circulares, que son imagen de conjuntos del tipo $(0, R)\times(\beta, \gamma)$.



Componiendo con traslaciones, esto es, considerando transformaciones del tipo

$$\boldsymbol{x} = (x, y) = \boldsymbol{g}(r, \theta) = \big(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\,\mathrm{sen}(\theta)\big)\,,$$

se parametrizan, excepto subconjuntos de medida nula, discos centrados en el punto $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$; en este caso se tiene que $r = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ (ver figura).

3. *Coordenadas cilíndricas en* $\mathbb{R}^3$.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y U_α, V_α los abiertos de $\mathbb{R}^3$

$$U_\alpha = (0,\infty)\times(\alpha, \alpha + 2\pi)\times\mathbb{R}\,, \qquad V_\alpha = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{\big(t\cos(\alpha), t\,\mathrm{sen}(\alpha), z\big) \,:\, z \in \mathbb{R}\,,\, t \geq 0\big\}\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}: U_\alpha \to V_\alpha$ definida por

$$(x, y, z) = \boldsymbol{g}(r, \theta, w) = \big(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), w\big),$$

es un difeomorfismo; además

$$|\mathcal{J}\boldsymbol{g}(r, \theta, z)| = r\,.$$

• Este tipo de cambios transforma los intervalos de la forma $(0, R)\times(\alpha, \alpha+2\pi)\times(a, b)$ en cilindros con eje de simetría el eje OZ, cuya base tiene radio R y comprendidos entre los planos $z = a$ y $z = b$, salvo una porción de un plano (que es de medida nula en $\mathbb{R}^3$).

El ejemplo presentado es adecuado para aquellos conjuntos que presenten una simetría respecto al eje OZ pero, por supuesto, una permutación adecuada de las coordenadas permite tratar volúmenes de revolución respecto de los otros ejes, y lo mismo se puede decir, al componer con traslaciones, cuando la base de estos cilindros está desplazada del origen.

4. *Coordenadas esféricas en* $\mathbb{R}^3$.

Cuando un punto $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ se determina por su norma r y dos ángulos θ, φ respecto a determinados subespacios lineales se obtienen las denominadas parametrizaciones esféricas. Presentamos seguidamente dos versiones.

4.1. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y U_α, V_α los abiertos de $\mathbb{R}^3$

$$U_\alpha = (0, \infty)\times(\alpha, \alpha+2\pi)\times(0, \pi)\,, \qquad V_\alpha = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{\big(t\cos(\alpha), t\operatorname{sen}(\alpha), z\big) \,:\, z \in \mathbb{R}\,,\, t \geq 0\big\}\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}: U_\alpha \to V_\alpha$ definida por

$$(x, y, z) = \boldsymbol{g}(r, \theta, \varphi) = \big(r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), r\cos(\varphi)\big),$$

es un difeomorfismo; además

$$|\mathcal{J}\boldsymbol{g}(r, \theta, \varphi)| = r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,.$$

4.2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y U_α, V_α los abiertos de $\mathbb{R}^3$

$$U_\alpha = (0, \infty)\times(\alpha, \alpha+2\pi)\times\big(-\pi/2, \pi/2\big)\,, \quad V_\alpha = \mathbb{R}^3\setminus\big\{\big(t\cos(\alpha), t\operatorname{sen}(\alpha), z\big) : z \in \mathbb{R}, t \geq 0\big\}\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}: U_\alpha \to V_\alpha$ definida por

$$(x, y, z) = \boldsymbol{g}(r, \theta, \varphi) = \big(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi)\big),$$

es un difeomorfismo; además

$$|\mathcal{J}\boldsymbol{g}(r, \theta, \varphi)| = r^2\cos(\varphi)\,.$$

• Este tipo de cambios transforma intervalos del tipo

$$(0,R)\times(\alpha,\alpha+2\pi)\times(\beta,\beta+\pi)\,,\quad (\beta=0,-\pi/2 \text{ resp.})$$

en bolas de radio R (excepto una porción de plano), y los del tipo

$$(0,R)\times(\alpha,\alpha+2\pi)\times(\beta,\gamma)\,,\quad 0<\gamma-\beta<\pi\,,$$

en sectores esféricos.

De nuevo, al componer con traslaciones,

$$(x,y,z)=\boldsymbol{g}(r,\theta,\varphi)=\big(a_1+r\cos(\theta)\cos(\varphi),a_2+r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi),a_3+r\operatorname{sen}(\varphi)\big),$$

se obtienen transformaciones que permiten parametrizar en intervalos bolas centradas en un punto $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ (en este caso $r=\|(x,y,z)-(a_1,a_2,a_3)\|$).

§ 6 EJERCICIOS.

1.- Sean $A=[0,1]\times[0,1]$ y $f\colon A\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} x & \text{si } x>y;\\ y^2 & \text{si } x\le y.\end{cases}$$

Comprobar que f es integrable en A y calcular su integral.

2.- En los siguientes casos demostrar que la función $f\colon A\to\mathbb{R}$ es integrable en A y calcular su integral.

2.1.- $A=[0,\pi]\times[0,1]\,,\ f(x,y)=|y-\operatorname{sen}(x)|\,.$

2.2.- $A=[0,1]\times[0,1]\,,\ f(x,y)=|y-e^{-x}|\,.$

3.- Calcular $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ en los siguientes casos:

3.1.- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,1\le y\le 2\,,\,0\le x\le\sqrt{y}\,\}\,,\ f(x,y)=x\,e^{-x^2/y}\,.$

3.2.- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x+y\ge 2\,,\,x^2+(y-1)^2\le 1\}\,,\ f(x,y)=x\,.$

3.3.- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,y\ge x^2\,,\,x\ge y^2\}\,,\ f(x,y)=x^2+4\,y^2\,.$

3.4.- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\le x\le 2\,,\,0\le y\le 2-x\}\,,\ f(x,y)=[x+y]\,.$

3.5.- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\ge 0\,,\,x^2+(y-1)^2\le 1\}\,,\ f(x,y)=|x+y-2|\,.$

3.6.- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\le y^2\,,\,y\le x\,,\,0\le y\le 2\}\,,\ f(x,y)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi\,x}{y}\right).$

3.7.- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$, siendo $a > 0$.

3.8.- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\,,\, y^3 \leq x \leq y^2\}$, $f(x, y) = e^{x/y}$.

4.- Sea D el recinto del primer cuadrante comprendido entre las curvas de ecuaciones

$$y = \sqrt{1 - x^2}\,, \qquad y = \sqrt{4 - x^2}\,.$$

Determinar el valor de

$$\iint_D x\, y\, dx\, dy\,.$$

5.- Sean a, b números reales con $0 < a < b$ y $D = [0, 1] \times [a, b]$. Calcular

$$\iint_D x^y\, dx\, dy\,.$$

Deducir que

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log(x)}\, dx \;=\; \log(b + 1) - \log(a + 1)\,.$$

6.- Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{dx\, dy}{(1 + y)\,(1 + x^2\, y)}$, y deducir que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 1}\, \log\Big(\frac{x^2 + 1}{2}\Big)\, dx \;=\; \frac{\pi^2}{16}\,.$$

7.- Sea V el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\,,\, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2\}\,.$$

Calcular

$$\iiint_V z^2\, dx\, dy\, dz\,.$$

8.- Calcular $\displaystyle\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ en los siguientes casos:

8.1.- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \leq x \leq 3\,,\, 1 \leq y \leq 3\,,\, 0 \leq z \leq \sqrt{x\, y}\}$,

$$f(x, y, z) = z - x\, y\,.$$

8.2.- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq \sqrt{x - x^2}\,,\, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$,

$$f(x, y, z) = z\, y \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

8.3.- $V = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]\,,\ f(x,y,z) = \dfrac{z\,(y\,z - x^2 - x^4)}{1+x^2}\,.$

8.4.- $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0\le z\,,\ z^2\le x^2+y^2\le 4\}\,,\ f(x,y,z) = \dfrac{1}{z+2}\,.$

9.- Sea P la pirámide (tetraedro) limitada por los tres planos coordenados y el plano de ecuación $x+2\,y+3\,z=6\,.$

i) Determinar el volumen de P.

ii) Calcular $\displaystyle\iiint_P x\,y\,z\,dx\,dy\,dz\,.$

iii) Calcular $\displaystyle\iiint_P |x+y-3|\,dx\,dy\,dz\,.$

10.- Sea V el sólido limitado por los planos de ecuaciones $x+y=2\,,\ x+2\,y=6\,,$ $x=0\,,\ y=0\,,\ z=0$ y el cilindro de ecuación $y^2+z^2=4\,.$ Calcular

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz\,.$$

11.- Calcular el volumen del subconjunto de $\mathbb{R}^3$ limitado por el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\quad \text{donde } a,b,c>0\,.$$

12.- Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1\,,\quad \text{donde } a,b,c>0\,,$$

y el plano de ecuación $z=0\,.$

13.- Sea $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\ge 0\,,\ x^2+y^2\le 1\}\,.$ Calcular

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy\,.$$

14.- Sea S el recinto plano limitado por la curva (*cardioide*) parametrizada en coordenadas polares por $\varrho = 1+\cos(\theta)$.

i) Calcular el área de S.

ii) Calcular $\displaystyle\iint_S (x+y)\,dx\,dy\,.$

15.- Sea S el recinto plano limitado por la curva parametrizada en coordenadas polares por $\varrho = \operatorname{sen}(2\,\theta)$.

i) Calcular el área de S.

ii) Calcular $\displaystyle\iint_S x\,y\,dx\,dy\,.$

16.- Calcular

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,,$$

donde D es la porción del recinto interior a la curva (*lemniscata*) dada en coordenadas polares por $\varrho^2 = a^2\,\cos(2\,\theta)$, contenido en el semiplano $\{x \geq 0\}$.

17.- Sean a, b números reales, con $0 < a < b$, y V el conjunto dado por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}\,.$$

Calcular

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,.$$

18.- Si V es el conjunto limitado por el plano $z=0$ y las superficies de ecuaciones $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=16-x^2-y^2$, calcular

$$\iiint_V x\,y\,e^z\,dx\,dy\,dz\,.$$

Integrales múltiples impropias

19.- Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ en los siguientes casos:

19.1.- $D = (1,\infty)\times(1,\infty)\,,\;\; f(x,y) = \dfrac{x^2}{1+y^2\,x^4}\,.$

19.2.- $D = (0,1)\times(0,1)\,,\;\; f(x,y) = (x\,y)^{-\alpha}\,,\quad \alpha > 0\,.$

19.3.- $D = B(\mathbf{0},1)\setminus\{\mathbf{0}\}\,,\;\; f(x,y) = \log(x^2+y^2)\,\log\left(1-(x^2+y^2)\right).$

19.4.- $D = (0,1)\times(0,1)\,,\;\; f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2\,y^2}}\,.$

19.5.- $D = B(\mathbf{0},1)\setminus\{\mathbf{0}\}\,,\;\; f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\,.$

20.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias, calculando su valor cuando proceda:

20.1.- $\displaystyle\iint_{(0,1)\times(0,1)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y}}\,.$ **20.2.-** $\displaystyle\iint_{B(\mathbf{0},2)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,.$

20.3.- $\displaystyle\iint_{(0,1)\times(0,1)} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\,dx\,dy\,.$ **20.4.-** $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)\,(1+y^2)}\,.$

21.- Se denota por S al interior del círculo de ecuación

$$x^2+y^2-2\,R\,x=0 \quad (R>0)\,.$$

Demostrar que

$$\iint_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{4\,R^2-x^2-y^2}} = 2\,R\,(\pi-2)\,.$$

22.- Sea $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\geq 1\,,\,\sqrt{x^2-1}<y\leq x\}$. Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x\,y}\,.$$

23.- Estudiar para qué valores de $p>0$ es convergente la integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{\left(p^2+x^2+y^2\right)^p}\,.$$

Calcular su valor cuando proceda.

24.- Determinar el valor de la integral impropia

$$\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} x\,e^{-xy}\,dx\,dy\,.$$

25.- Sea $U=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,:\,v>0\,,\,u>0\,,\,0<u<k\,v\}\,,\;\; k>0.$

i) Si $V=(0,\infty)\times(0,k)$ probar que la aplicación $\Phi\colon U\to V$ dada por

$$\Phi(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big)=\big(u\,v,{}^{u}\!/_{v}\big)$$

es un difeomorfismo.

ii) Demostrar que la integral impropia

$$\iint_U \frac{u^3\cos\left({}^{u}\!/_{v}\right)}{v\Big(u^2\,v^2+{}^{u^2}\!/_{v^2}\Big)^{3/2}}\,du\,dv$$

es convergente.

Indicación: Acotar el integrando por una función positiva de manera que la integral impropia de esta última sea convergente.

iii) Calcular el valor de la integral dada en el apartado anterior.

26.-

i) Demostrar que la integral impropia

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

es convergente y calcular su valor.

ii) Deducir de lo anterior el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\,.$$

27.- Se considera el subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 > 1\}\,.$$

i) Estudiar, en función del número real α, el carácter de la integral impropia

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha}}\,.$$

ii) Demuéstrese que la integral impropia

$$\iiint_V \frac{\cos(x)\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$$

es convergente.

28.- Se considera el conjunto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 0\,,\ x^2+y^2 < 1\}\,.$$

Estudiar, en función de los parámetros reales α y β, el carácter de la integral impropia

$$\iiint_C \frac{\left(1-x^2-y^2\right)^{\alpha}}{1+z^{\beta}}\,dx\,dy\,dz\,.$$

§ 7 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.- $\dfrac{7}{12}$.

2.1.- $\pi - 2$. **2.2.-** $\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2e^2}$.

3.1.- $\dfrac{3}{4}\Big(1 - \dfrac{1}{e}\Big)$. **3.2.-** $\dfrac{1}{6}$. **3.3.-** $\dfrac{3}{7}$ **3.4.-** $\dfrac{3}{2}$. **3.5.-** 1.

3.6.- $-\dfrac{3\pi^2 + 4}{2\pi^3}$. **3.7.-** $\dfrac{8}{3}a^3$. **3.8.-** $\dfrac{1}{2}(3 - e)$.

4.- $\dfrac{15}{8}$.

5.- Aplicar el teorema de Fubini para expresar la integral como iterada en los dos órdenes posibles, teniendo en cuenta que ambos valores coinciden.

6.- Igual que el anterior.

7.- Aplicar el teorema de Fubini fijando en primer lugar la z, para la que la sección es un círculo horizontal de área conocida. El resultado es $\dfrac{59\pi}{480}R^5$.

8.1.- $\dfrac{-776 + 72\sqrt{3}}{25}$. **8.2.-** $\dfrac{1}{144}$. **8.3.-** $\dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{\pi}{4} - 1\Big)$. **8.4.-** 2π.

9.- i) 6; ii) $\dfrac{9}{5}$; iii) $\dfrac{27}{4}$.

10.- $\dfrac{26}{3}$.

11.- Con un cambio a esféricas adecuadamente escaladas, $\dfrac{4}{3}\pi abc$.

12.- Con un cambio a cilíndricas adecuadamente escaladas, $\dfrac{\pi}{2}abc$.

13.- Con un cambio a polares, $\dfrac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.

14.- Realizar cambios a polares: i) $\dfrac{3\pi}{2}$; ii) $\dfrac{5\pi}{4}$.

15.- Realizar cambios a polares: i) $\dfrac{\pi}{4}$; ii) $\dfrac{2}{15}$.

16.- Con el cambio a polares, resulta la integral

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{|a|\sqrt{\cos(2\theta)}} \rho^3\, d\rho = \frac{a^4\,\pi}{16}.$$

17.- Pasando a esféricas, $4\pi \log(b/a)$.

18.- Pasando a cilíndricas, 0.

19.1.- Converge. **19.2.-** Converge si, y sólo si, $\alpha < 1$. **19.3.-** Pasando a polares, converge.

19.4.- Converge. **19.5.-** Converge.

20.1.- Converge y vale $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)$. **20.2.-** Con polares, converge y vale 4π.

20.3.- Converge y vale $\frac{4}{3}$. **20.4.-** Converge y vale π^2.

21.- Realizar un cambio a polares.

22.- Aplicar el criterio de Tonelli para ver que converge.

23.- Pasar a polares; converge si, y sólo si, $p > 1$, y en este caso vale $\frac{\pi}{(p-1)p^{2(p-1)}}$.

24.- Vale e^{-1}.

25.- ii) Acotar el integrando por la función $\frac{u^3}{v(u^2v^2 + u^2/v^2)^{3/2}}$, y aplicar a la integral de ésta el cambio de variables en i) para obtener la integral

$$\frac{1}{2}\iint_{(0,\infty)\times(0,k)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx\, dy,$$

que vale $k/2$.

iii) Aplicar el teorema de Fubini: $\operatorname{sen}(k/2)$.

26.- i) Pasando a polares, vale π. ii) Aplicando el teorema de Fubini, $\sqrt{\pi}$.

27.- Aplicar cambios a esféricas: i) Converge si, y sólo si, $\alpha > 3/2$; ii) acotar el integrando por

$$\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

28.- Cambiando a cilíndricas, converge si, y sólo si, $\alpha > -1$ y $\beta > 1$.

TEMA 11 CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

En términos abstractos un campo vectorial definido en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ no es otra cosa que una aplicación de U en $\mathbb{R}^m$. La teoría que exponemos aquí va dirigida a proporcionar un formalismo más adecuado a los modelos de la Física y de la Técnica, así como la interpretación en este contexto particular de los conceptos que se definen relacionados con la derivación, cuando esas aplicaciones representan magnitudes escalares o vectoriales.

Aunque algunas definiciones y propiedades se enuncian en espacios $\mathbb{R}^n$ de dimensión arbitraria, el lector que lo prefiera puede pensar en los casos de aplicación habitual, es decir, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

§ 1 CAMPOS. OPERADORES DIFERENCIALES.

Definición 1.1.- Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

i) Un *campo escalar de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* U es una función $f\colon U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$.

ii) Un *campo vectorial de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* U es una aplicación $\boldsymbol{F}\colon U \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$, de clase $\mathcal{C}^k$.

El índice k recorre el conjunto de los números enteros positivos, entendiéndose que las aplicaciones de clase $\mathcal{C}^0$ son las continuas.

Ejemplos:

1) Son campos escalares la 'temperatura' o la 'celeridad'.

2) Son campos vectoriales la 'velocidad' o cualquier campo de fuerzas (gravitatorio, eléctrico, magnético, etc.).

Notación: Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Al conjunto de las aplicaciones f de clase $\mathcal{C}^k$ definidas en U con valores en $\mathbb{R}^p$, $f\colon U \to \mathbb{R}^p$, lo denotaremos por $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$.

No es difícil comprobar que estos espacios, dotados de la suma habitual de funciones y el producto de números reales por funciones, son espacios vectoriales. La palabra "operador" se utiliza para designar las aplicaciones lineales entre este tipo de espacios vectoriales, en distinción con el caso de los espacios euclídeos. Cuando la imagen de un campo por un operador se define en términos de las derivadas parciales de sus componentes, se dice que el operador es *diferencial*.

Ejemplo: La aplicación que a cada función f de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ le asigna la función continua ${}^{\partial f}/_{\partial x_1}$ es un operador diferencial definido en $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$.

A continuación se presentan los operadores usuales que se manejan en la Física y sus propiedades básicas.

Gradiente de un campo escalar

Definición 1.2.- Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se denomina *gradiente* de f al campo vectorial definido por

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\Big), \quad \boldsymbol{x} \in U\,.$$

Propiedades 1.3.- Sean f, g campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y c un número real. Se verifica:

i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g\,.$

ii) $\nabla(c\,f) = c\,\nabla f\,.$

iii) $\nabla(f\,g) = f\,\nabla g + g\,\nabla f\,.$

iv) Si $g(\boldsymbol{x}) \neq 0\,,\ \boldsymbol{x} \in U\,,\ \nabla\big({}^{f}/_{g}\big) = {}^{(g\nabla f - f\nabla g)}/_{g^2}.$

Observación 1.4.- De las propiedades i) y ii) se deduce que el gradiente es un operador definido en el espacio de los campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U que toma valores en el espacio de los campos vectoriales continuos en U,

$$f\ \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \longmapsto \nabla f\ \in \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R}^n)\,.$$

Formalmente escribiremos

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)\,.$$

Definición 1.5.- Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{F}\colon U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Se dice que $\boldsymbol{F}$ es *conservativo* si existe un campo escalar f de clase $\mathcal{C}^1$ en U tal que

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in U\,.$$

En este caso, se dice que el campo f es una *función potencial* de $\boldsymbol{F}$.

Observaciones 1.6.-

i) En ciertos modelos físicos, si $\nabla f = \boldsymbol{F}$, se dice que $-f$ es una función potencial de $\boldsymbol{F}$. Esto no debe causar ningún trastorno o confusión, es simplemente otro convenio de notación.

ii) Veremos más adelante, al estudiar el concepto de integral curvilínea, que el adjetivo 'conservativo' tiene un significado físico preciso.

Observación 1.7.- Si $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar f de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, entonces se sigue del lema de Schwarz que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\,, \quad 1 \leq i, j \leq n\,, \quad \boldsymbol{x} \in U\,.$$

Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto, a no ser que se impongan condiciones adicionales sobre la geometría de U.

Definición 1.8.- Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

i) Se dice que U es *estrellado respecto de un punto* $\boldsymbol{a} \in U$ si para cualquier elemento $\boldsymbol{x}$ de U el segmento de extremos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{x}$, dado por

$$\{t\,\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{a} \,:\, t \in [0,1]\}\,,$$

está contenido en U. Se dice que U es *estrellado* si lo es respecto de alguno de sus puntos.

ii) Se dice que U es *convexo* si para cada par de elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de U el segmento de extremos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, dado por

$$\{t\,\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \,:\, t \in [0,1]\}\,,$$

está contenido en U.

Obviamente un abierto convexo es estrellado respecto de cualquiera de sus puntos.

Proposición 1.9.- (*Lema de Poincaré*)

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^n$.

Entonces $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar en U si, y sólo si,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U, \quad i,j = 1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Observaciones 1.10.-

i) La demostración teórica de la existencia de potenciales requiere de la noción de integral curvilínea que veremos más adelante, aunque la resolución práctica se reduce en la mayoría de los casos a un cálculo elemental de primitivas. Se puede mostrar que dos potenciales de un mismo campo conservativo (en general, en un abierto conexo) difieren en una constante.

ii) Aunque el resultado anterior sigue siendo válido para una familia más amplia de abiertos, los denominados *simplemente conexos*, no se verifica para abiertos arbitrarios.

Rotacional de un campo vectorial

Definición 1.11.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$. Se define el *rotacional* de $\boldsymbol{F}$ como el campo vectorial

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial F_1}{\partial z}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial F_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\boldsymbol{x})\Big), \quad \boldsymbol{x} \in U.$$

Observaciones 1.12.-

i) En la terminología anglosajona se denota $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \operatorname{curl} \boldsymbol{F}$.

ii) El siguiente determinante simbólico es útil para recordar la fórmula que define el rotacional:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Por esta razón el rotacional del campo $\boldsymbol{F}$ también se representa por $\nabla \times \boldsymbol{F}$.

Propiedades 1.13.- Sean $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$ dos campos vectoriales y f un campo escalar, todos ellos de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$.

i) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$.

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\operatorname{rot}(c\,\boldsymbol{F}) = c \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$.

iii) $\operatorname{rot}(f\,\boldsymbol{F}) = f \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \nabla f \times \boldsymbol{F}$.

Observación 1.14.- De lo anterior se deduce que rot es un operador diferencial de $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}^3)$ en $\mathcal{C}^{k-1}(U,\mathbb{R}^3)$.

Proposición 1.15.- Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}\,.$$

Definición 1.16.- Se dice que un campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ es *irrotacional* si su rotacional es idénticamente nulo en U, es decir,

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in U\,.$$

Un campo conservativo de clase $\mathcal{C}^1$ es, en virtud de la proposición anterior, irrotacional. El recíproco viene dado por el lema de Poincaré, que en este caso se escribe:

Proposición 1.17.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo si, y sólo si, es irrotacional.

Divergencia de un campo vectorial

Definición 1.18.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se define la *divergencia* de $\boldsymbol{F}$ como el campo escalar

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in U\,.$$

Formalmente,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = \nabla\cdot \boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)\cdot (F_1, F_2, \ldots, F_n)\,,$$

razón por la cuál también se denota $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = \nabla\cdot \boldsymbol{F}$.

Propiedades 1.19.- Sean $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}\colon U \to \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales y f un campo escalar, todos ellos de clase $\mathcal{C}^1$ en el abierto U de $\mathbb{R}^n$.

i) $\mathrm{div}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{F} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{G}$.

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathrm{div}(c\,\boldsymbol{F}) = c\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{F}$.

iii) $\mathrm{div}(f\,\boldsymbol{F}) = f\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{F} + \nabla f\cdot \boldsymbol{F}$.

Observación 1.20.- De lo anterior se deduce que div es un operador diferencial de $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{C}^{k-1}(U,\mathbb{R})$.

Proposición 1.21.- Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) = 0\,.$$

Definición 1.22.- Se dice que un campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ es *solenoidal* o *incompresible* si su divergencia es idénticamente nula en U,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in U\,.$$

Según 1.21 el rotacional de un campo vectorial es solenoidal. Recíprocamente:

Proposición 1.23.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es el rotacional de un campo vectorial $\boldsymbol{G}$ si, y sólo si, $\boldsymbol{F}$ es solenoidal.

Observaciones 1.24.-

i) Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$ son campos vectoriales en un abierto de $\mathbb{R}^3$ tales que $\operatorname{rot}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{G}$ al menos de clase $\mathcal{C}^1$) se dice que $\boldsymbol{G}$ es un *potencial vectorial* de $\boldsymbol{F}$. Nótese la analogía que existe entre los resultados 1.17 y 1.23.

ii) Al igual que sucede con los potenciales escalares, la búsqueda de potenciales vectoriales en el caso de que el abierto U sea conexo se reduce al cálculo de primitivas.

Si el campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y solenoidal en el intervalo U de $\mathbb{R}^3$, la ecuación $\operatorname{rot}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ es el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_3}{\partial y} - \dfrac{\partial G_2}{\partial z} \equiv F_1 \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial z} - \dfrac{\partial G_3}{\partial x} \equiv F_2 \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1}{\partial y} \equiv F_3 \end{cases}$$

Gracias al resultado 1.15, podemos suponer, por ejemplo, que $G_3 \equiv 0$; entonces, es posible dar unas primeras expresiones para G_1 y G_2 a partir de las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial G_2}{\partial z} \equiv F_1 \qquad \longrightarrow \qquad G_2 = -\displaystyle\int F_1\,dz + C_2(x,y)\,, \\ \quad\dfrac{\partial G_1}{\partial z} \equiv F_2 \qquad \longrightarrow \qquad G_1 = \displaystyle\int F_2\,dz + C_1(x,y)\,, \end{cases}$$

siendo C_1 y C_2 las correspondientes constantes (respecto de z) de integración. Podemos suponer a continuación, por la misma razón que antes, que $C_2 \equiv 0$, con lo que ya hemos determinado G_3 y G_2. Para concluir, basta determinar C_1 a partir de la tercera ecuación.

Así se ha encontrado un potencial vectorial de $\boldsymbol{F}$; los demás se obtienen sumando a éste gradientes.

§ 2 EJERCICIOS.

1.- Se consideran los campos definidos en $\mathbb{R}^3$ por

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2xz^2, 1, y^3zx\right), \quad \boldsymbol{G}(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right),$$
$$\text{y} \quad f(x,y,z) = x^2y\,.$$

Calcular:

a) ∇f **b)** $\nabla\times\boldsymbol{F}$ **c)** $(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{G}$ **d)** $\boldsymbol{F}\cdot(\nabla f)$ **e)** $\boldsymbol{F}\times\nabla f\,.$

2.- Demostrar que el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$$

es solenoidal y hallar un campo vectorial $\boldsymbol{G}$ tal que $\boldsymbol{F} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{G})$.

Estudiar la misma cuestión para el campo $\boldsymbol{H}(x,y,z) = (yz, zx, xy)$.

3.- Hallar el valor de las constantes a, b, c, tales que el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x + 2\,y + a\,z, b\,x - 3\,y - z, 4\,x + c\,y + 2\,z)$$

verifica $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Demostrar que para estos valores $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar que se determinará.

4.- Se consideran los campos

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz\cos(xy), xz\cos(xy), \mathrm{sen}(xy))\,,$$
$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \left(yz + xy^2, xz + x^2y, z + xy\right),$$
$$\boldsymbol{H}(x,y,z) = \left(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, zx^2 - 4xy, x^2y + 2xz - 2\right).$$

Demostrar que $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$ son conservativos y calcular su función potencial.

5.- Encontrar un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ tal que:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{F}) = 2x + y - 1 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}) = (0,0,1).$$

§ 3 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.- a) $(2xy, x^2, 0)$; b) $(3xy^2z, 4xz - y^3z, 0)$; c) $(2z^2 + xy^3)(x^2, y^2, z^2)$;

d) $4x^2yz^2 + x^2$; e) $(-x^3y^3z, 2x^2y^4z, 2x^3z^2 - 2xy)$.

2.- Para $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}(x, y, z) = (0, \frac{x^2}{2} - xy, \frac{x^2}{2} - xz + \frac{y^2}{2} - yz)$;
para $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{G}(x, y, z) = (0, \frac{1}{2}x^2y, \frac{z}{2}(y^2 - x^2))$.

3.- $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$. Una función potencial es

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + z^2.$$

4.- Potenciales de $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$ son, respectivamente,

$$z\,\mathrm{sen}(xy), \qquad xyz + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}z^2, \qquad x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z.$$

5.- Una solución (hay infinitas) es $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2, x + \frac{1}{2}y^2, -z)$.

TEMA 12 INTEGRALES CURVILÍNEAS

La materia que se trata en este tema está estrechamente relacionada con conceptos físicos tales como el de trabajo y otros similares en los que interviene la noción de transporte, que se formaliza definiendo la integral de un campo (por ejemplo, de fuerzas) a lo largo de una curva (la trayectoria recorrida por una partícula).

§ 1 INTEGRACIÓN DE CAMPOS ESCALARES.

Comenzaremos introduciendo el concepto de curva regular a trozos.

Definición 1.1.- Sean $I = [a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $(I, \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica continua. Se dice que la curva es *de clase $\mathcal{C}^k$ a trozos* si existe una partición del intervalo I,

$$P = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{m-1} < \xi_m = b\}\,,$$

tal que $\boldsymbol{\gamma}$ es de clase $\mathcal{C}^k$ en cada intervalo $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (recordemos que ser de clase $\mathcal{C}^k$ en un intervalo cerrado exige la existencia de las derivadas laterales correspondientes en los extremos del mismo).

Es sencillo comprobar que si una curva paramétrica es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, también lo es cualquier otra curva paramétrica equivalente a ella.

Aunque el concepto de longitud de una curva se puede introducir de forma más general, se presenta aquí una definición válida para curvas suficientemente regulares.

Definición 1.2.- Sea $(I, \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, parametrizada en el intervalo compacto $I = [a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ son sus componentes, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Entonces, se define la *longitud* de la curva $(I, \boldsymbol{\gamma})$ como

$$\operatorname{long}(\boldsymbol{\gamma}) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2}\; dt\,.$$

Observaciones 1.3.-

i) La integral que aparece arriba se debe entender como la suma

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt$$

cuando la aplicación $\boldsymbol{\gamma}$ no sea de clase $\mathcal{C}^1$ en todo el intervalo $[a, b]$, sino en cada uno de los subintervalos $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ asociados a la partición P.

ii) Como consecuencia del teorema del cambio de variable, la longitud de curvas paramétricas equivalentes es la misma. En consecuencia, tiene sentido asignar dicha cantidad al conjunto soporte, siempre que se suponga parametrizado de forma simple y regular. El mismo argumento se utiliza para demostrar el siguiente lema.

Lema 1.4.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f un campo escalar continuo definido en U, y $([a, b], \boldsymbol{\gamma})$ y $([c, d], \boldsymbol{\varphi})$ curvas paramétricas equivalentes de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y con soporte contenido en U. Entonces

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_c^d f\big(\boldsymbol{\varphi}(s)\big) \, \|\boldsymbol{\varphi}'(s)\| \, ds \, .$$

Definición 1.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f un campo escalar continuo definido en U y $([a, b], \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos con soporte contenido en U. Se define la *integral del campo f a lo largo de la curva* $\boldsymbol{\gamma}$ por

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt \, ,$$

y se representa por

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f \, dr \qquad \text{o simplemente} \qquad \int_{\boldsymbol{\gamma}} f \, .$$

Observación 1.6.- El lema previo permite considerar el valor que acabamos de definir como asociado al soporte Γ de la curva paramétrica, siempre que se suponga que su parametrización es regular y simple. Así, es usual denotar dicho valor por

$$\int_{\Gamma} f \, dr.$$

Observación 1.7.- Los siguientes ejemplos pueden ilustrar el significado y utilidad que tiene la integral curvilínea:

Supongamos que el soporte $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ de una curva $([a, b], \boldsymbol{\gamma})$ representa un alambre de material no homogéneo, y que para cada $t \in [a, b]$ el número $\varrho(t) = \varrho\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)$ representa la densidad de masa en el punto $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \Gamma$, es decir, ϱ es la función de densidad. Entonces

$$\int_\Gamma \varrho\, dr = \int_a^b \varrho\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

no es otra cosa que la masa total presente en el alambre.

Si se piensa en el caso de una curva cuyo soporte Γ es la base de una valla tal que en cada punto $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ tiene altura $h(t) = h\big(x(t), y(t)\big)$, la integral

$$\int_\Gamma h\, dr = \int_a^b h\big(x(t), y(t)\big)\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

es precisamente el área de la valla.

Propiedades 1.8.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f, g campos escalares continuos en U y $([a,b], \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos con soporte Γ contenido en U. Se verifican:

i) $\displaystyle\int_\Gamma (f+g)\, dr = \int_\Gamma f\, dr + \int_\Gamma g\, dr\,.$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\Gamma (c\, f)\, dr = c\int_\Gamma f\, dr\,.$

iii) $\displaystyle\Big|\int_\Gamma f\, dr\Big| \leq \int_\Gamma |f|\, dr \;\leq\; \sup\{|f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in \Gamma\}\ \mathrm{long}(\Gamma)\,.$

§ 2 INTEGRACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES.

A diferencia del estudio realizado anteriormente en lo que sigue será necesario considerar curvas paramétricas orientadas. Recordemos que, dadas dos curvas paramétricas equivalentes $(I, \boldsymbol{\gamma})$ y $(J, \boldsymbol{\varphi})$, ambas corresponden a una misma orientación si, y sólo si, el difeomorfismo θ que permite escribir $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varphi} \circ \theta$ es tal que

$$\theta'(t) > 0 \quad \text{para cada } t \in I\,.$$

Definición 2.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo en U, y $\Gamma \subset U$ (el soporte de) una curva orientada parametrizada por la curva paramétrica $([a,b], \boldsymbol{\gamma})$ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y compatible con la orientación de Γ. Se define la *integral del campo* $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de* $\boldsymbol{\gamma}$ (*o de* Γ) por

$$\int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(t)\, dt = \int_a^b \Big(F_1\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\gamma_1'(t) + F_2\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\gamma_2'(t) + \ldots + F_n\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\gamma_n'(t)\Big)\, dt\,,$$

y se representa por

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{o} \qquad \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{o} \qquad \int_{\boldsymbol{\gamma}} F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + \ldots + F_n\, dx_n\,.$$

Si la curva es cerrada, la integral anterior se denomina también *circulación del campo* $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de* $\boldsymbol{\gamma}$.

Observación 2.2.- Una vez más el teorema del cambio de variable para las integrales de Riemann garantiza la coherencia de la definición, es decir, la integral definida es independiente de la parametrización regular y simple que represente a la curva con la orientación prefijada.

Proposición 2.3.- Sean $(I, \boldsymbol{\gamma})$, $(J, \boldsymbol{\varphi})$ dos parametrizaciones equivalentes de una curva Γ que definen orientaciones opuestas en dicha curva. Entonces, si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial continuo en un abierto que contiene al soporte de la curva,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Observaciones 2.4.-

i) En la práctica, cuando una curva viene dada de forma paramétrica, si la parametrización $\boldsymbol{\gamma}$ no define la orientación deseada no es necesario determinar una nueva parametrización congruente con la orientación, basta calcular la integral del campo según la expresión dada en 2.1 y cambiar el resultado de signo.

ii) Cuando se manejan campos de fuerzas la integral a lo largo de una curva se denomina *trabajo del campo* a lo largo de la curva: Si $\boldsymbol{F}$ es un campo de fuerzas (gravitatorio, eléctrico, etc.) definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ y Γ es una curva orientada parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$, la integral de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ representa el trabajo necesario para desplazar una partícula de masa, carga, etc. unidad desde el punto $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\gamma}(a)$ hasta el punto $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{\gamma}(b)$ siguiendo la trayectoria Γ. Este trabajo puede ser positivo o negativo dependiendo de que el movimiento se realice en contra o a favor del campo de fuerzas y, por supuesto, cambia de signo cuando se recorre la curva en sentido contrario, es decir, cuando se considera la orientación opuesta.

Propiedades 2.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ dos campos vectoriales continuos en U y una curva orientada Γ en U y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se verifica:

i) $\displaystyle\int_\Gamma (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_\Gamma \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r}\,.$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\Gamma (c\,\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{r} = c\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,.$

iii) $\displaystyle \left|\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\right| \le \sup\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| : \boldsymbol{x}\in\Gamma\}\ \mathrm{long}(\Gamma)\,.$

Proposición 2.6.- (*Regla de Barrow*)

Sean f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\gamma}\colon[a,b]\to U$ una parametrización de una curva orientada de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces

$$\int_\gamma \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = f\big(\boldsymbol{\gamma}(b)\big) - f\big(\boldsymbol{\gamma}(a)\big)\,.$$

Corolario 2.7.- Sean $\boldsymbol{\gamma}_1\colon[a,b]\to U$ y $\boldsymbol{\gamma}_2\colon[c,d]\to U$ parametrizaciones de dos curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, con $\boldsymbol{\gamma}_1(a)=\boldsymbol{\gamma}_2(c)$ y $\boldsymbol{\gamma}_1(b)=\boldsymbol{\gamma}_2(d)$, entonces

$$\int_{\gamma_1} \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \nabla f\cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Corolario 2.8.- Si $\boldsymbol{\gamma}\colon[a,b]\to U$ es una parametrización de una curva orientada y cerrada ($\boldsymbol{\gamma}(a)=\boldsymbol{\gamma}(b)$) y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, entonces

$$\int_\gamma \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = 0\,.$$

Observación 2.9.- Cuando se consideran campos vectoriales que proceden de gradientes, $\boldsymbol{F}=\nabla f$, los tres resultados anteriores dan significado al adjetivo 'conservativos' que se les ha dado. De forma coloquial, para campos de fuerzas de este tipo, el trabajo necesario para desplazar una partícula desde una posición $\boldsymbol{x}_0$ hasta otra $\boldsymbol{x}_1$ no depende de la trayectoria seguida: la *energía potencial* está bien definida y depende únicamente de la posición.

§3 FÓRMULA DE RIEMANN-GREEN.

Cuando un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es tal que su frontera, $\mathrm{Fr}(U)$, puede ser parametrizada localmente como una curva, el conjunto $\mathrm{Fr}(U)$ se denomina también *borde* de U y se denota por ∂U. Las siguientes definiciones describen con más precisión este tipo de conjuntos, que son los que se contemplan en la teoría que trata este apartado.

Definición 3.1.- Un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ se dice que es un *abierto de Jordan* si es abierto, acotado y su frontera es una unión finita de soportes de curvas paramétricas cerradas, simples y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos.

En el caso de que ∂D sea el soporte de una sola curva del tipo anterior se dice que D es un *dominio de Jordan*.

Sobre una curva se pueden establecer dos orientaciones, ahora bien, cuando la curva es parte del borde de un conjunto es posible definir una orientación 'natural' relativa al conjunto, a ello va destinado el siguiente lema.

Lema 3.2.- Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto de Jordan y $\boldsymbol{x}_0$ un punto frontera de D que es regular para la curva correspondiente de ∂D. Sean $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1$ los dos vectores unitarios ortogonales a la recta tangente a ∂D en el punto $\boldsymbol{x}_0$. Entonces uno sólo de estos dos vectores, que denotaremos por $\boldsymbol{n}_e$, verifica la siguiente propiedad:

"Existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \varepsilon)$ se tiene que

$$\boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{n}_e \notin D\text{''}.$$

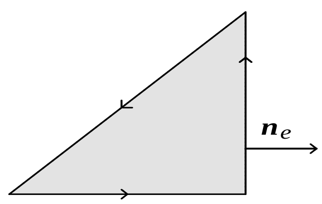
Definición 3.3.- En las condiciones del lema anterior, al vector $\boldsymbol{n}_e$ que verifica dicha propiedad lo denominaremos *normal exterior a D en el punto* $\boldsymbol{x}_0$.

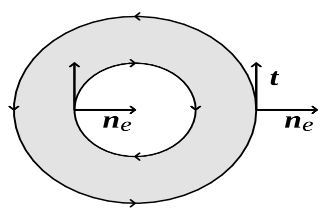
La *orientación natural* o *inducida en ∂D por D* es la que corresponde en los puntos regulares de ∂D al vector tangente unitario $\boldsymbol{t}$ que forma un ángulo de amplitud $\frac{\pi}{2}$ con la normal exterior $\boldsymbol{n}_e$, esto es:

$$(\widehat{\boldsymbol{n}_e, \boldsymbol{t}}) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{o bien} \qquad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{n}_e\,.$$

Ejemplos:

i) La orientación inducida en una circunferencia por el círculo que delimita es la que corresponde a parametrizaciones que la recorren en sentido antihorario (contrario al de las agujas del reloj). Lo mismo ocurre, en general, para los dominios de Jordan.





ii) Si se considera la corona circular

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4\},$$

la orientación inducida en $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 4\}$ corresponde al sentido antihorario, pero en $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$ la orientación inducida por C es la que corresponde al sentido contrario (el de las agujas del reloj).

Definición 3.4.- Sea D un abierto de Jordan de $\mathbb{R}^2$ tal que su borde ∂D se escribe

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m \,,$$

siendo cada Γ_j una curva cerrada simple y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en la que se considera la orientación inducida por D. Si $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial continuo en un abierto que contiene a ∂D, se define la *circulación* de $\boldsymbol{F}$ en el borde de D como

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} P\,dx + Q\,dy = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \,,$$

que se denota por

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \qquad \text{o} \qquad \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \,.$$

Teorema 3.5.- (*Fórmula de Riemann-Green*)

Sea D un abierto de Jordan de $\mathbb{R}^2$. Si $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $\overline{D} = D \cup \partial D$, entonces

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big)\, dx\,dy \,,$$

considerándose en ∂D la orientación inducida por D.

Corolario 3.6.- En las condiciones del teorema anterior, si además el campo $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1 \quad \text{para cada } (x, y) \in D \,,$$

entonces el área de D resulta ser

$$m(D) = \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \,.$$

§ 4 EJERCICIOS.

Longitud de curvas. Integración de campos escalares.

1.- Calcular la longitud de las curvas dadas por:

1.1.- $\begin{cases} x = a\cos^3(t); \\ y = a\,\mathrm{sen}^3(t). \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$

1.2.- $\begin{cases} x = a\big(t - \mathrm{sen}(t)\big); \\ y = a\big(1 - \cos(t)\big). \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad$ (*cicloide*)

1.3.- $\begin{cases} x = e^{at}\cos(p\,t); \\ y = e^{at}\,\mathrm{sen}(p\,t). \end{cases} \quad t \in [0, 1]. \quad$ (*espiral*)

1.4.- $\rho = m\,\theta$, $\theta \in [a,b]$, $a > 0$, $m > 0$.

1.5.- $\rho = e^{-\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

1.6.- $y^2 = 4\,x - x^2$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1, \sqrt{3})$.

1.7.- $x^2 = 2\,p\,y$, entre los puntos $(0,0)$ y $(2p, 2p)$, siendo $p > 0$.

2.- Calcular la integral del campo escalar $f(x,y) = x + \dfrac{y}{3}$ a lo largo de la curva parametrizada por

$$\big(x(t), y(t)\big) = \big(3\cos^3(t), 3\,\mathrm{sen}^3(t)\big)\,, \quad t \in [0, \pi]\,.$$

Integración de campos vectoriales a lo largo de curvas.

3.- Calcular la integral del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva plana Γ correspondiente en los siguientes casos:

3.1.- $\boldsymbol{F}(x,y) = (y - x, y)$; Γ es el segmento de extremos $(0,0)$ y $(1,2)$.

3.2.- $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(x\,e^y, x^2 y\big)$; Γ se parametriza por $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, 3)$, $t \in [0,2]$.

3.3.- $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(x\,e^y, x^2 y\big)$; Γ se parametriza por $\boldsymbol{\gamma}(t) = (3\,t, t^2)$, $t \in [0,1]$.

3.4.- $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(x^2 - 2\,x\,y, y^2 - 2\,x\,y\big)$; Γ es la gráfica de $y = x^2$, recorrida desde el punto $(-1,1)$ hasta $(1,1)$.

3.5.- $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(x^2 y, x\,y^2\big)$; Γ es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

3.6.- $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(x^2 + y^2, x^2 - y^2\big)$; Γ es la curva de ecuación $y = 1 - |1 - x|$, recorrida desde el punto $(0,0)$ hasta $(2,0)$.

3.7.- $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(\sqrt{x\,y}, x^2 y^2\big)$; Γ es el borde del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,0)$, recorrido en sentido horario.

3.8.- $\boldsymbol{F}(x,y) = (2\,x\,(x+y), 2\,y\,(x+y))$; Γ es la curva definida en polares por $\rho(\theta) = \theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$.

4.- Calcular la integral del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ a lo largo de la curva Γ correspondiente en los siguientes casos:

4.1.- $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \Big(0, 0, z/(x^2 + y^2)\Big)$; Γ es la curva $\begin{cases} x = a\cos(t); \\ y = a\,\mathrm{sen}(t); \\ z = t; \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$.

4.2.- $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(z,x,y)$; Γ es la curva intersección de las superficies

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad \text{y} \qquad x+z=1\,.$$

5.- Hallar todas las circunferencias del plano $\mathbb{R}^2$ tales que la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y)=\big(y^2,x^2\big)$ a lo largo de dichas circunferencias sea nula.

Integración de gradientes.

6.- Sea Γ la curva en $\mathbb{R}^2$ dada por $y=x^2$, $x\in[-1,1]$. Se considera el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\big(e^{xy}(1+xy),x^2e^{xy}\big)\ ,$$

probar que

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=e+\frac{1}{e}\,.$$

7.- Calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y)=\big(x^2,y^2\big)$ a lo largo de la curva Γ de ecuación implícita

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\,\frac{x}{a}=0\,,$$

recorrida en sentido positivo.

8.- Probar que, si Γ es una elipse, la circulación del campo

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(y\cos(x+y)-x\,y\operatorname{sen}(x+y),x\cos(x+y)-x\,y\operatorname{sen}(x+y))$$

a lo largo de Γ es nula.

9.- Calcular la integral del campo

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\Big(\frac{y}{x^2},\frac{-1}{x}\Big)$$

a lo largo de la curva parametrizada por

$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\big(\operatorname{sen}^2(t)+1,2\operatorname{sen}^2(t)\cos(t)\big)$$

entre los puntos $(1,0)$ y $(2,0)$.

Aplicaciones de la Fórmula de Green.

10.- Hallar el área de las regiones limitadas por las curvas siguientes:

10.1.- $\begin{cases} x(t)=a\cos^3(t); \\ y(t)=a\operatorname{sen}^3(t), \end{cases}\quad t\in[0,2\pi] \qquad (\textit{astroide}).$

10.2.- $\rho(\theta) = a\,(1+\cos(\theta)),\ \theta \in [0, 2\pi]$ (*cardioide*).

10.3.- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ (a, b > 0)$ (*elipse*).

11.- Calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva Γ en los siguientes casos:

11.1.- $\boldsymbol{F}(x, y) = (3\,x + y, 2\,x - 1)$; Γ es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

11.2.- $\boldsymbol{F}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y))$; Γ es el borde del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$, recorrido en sentido horario.

11.3.- $\boldsymbol{F}(x, y) = (3\,x + y, 2\,y - x)$; Γ es la elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$.

12.- Transformándola en una integral curvilínea, calcular la integral doble

$$\iint_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy\,,$$

siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2\}$, con $r > 0$.

13.- Calcular

$$\iint_D (x^4 + y^4)\,dx\,dy\,,$$

donde $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 \right\}$.

§ 5 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.1.- $6|a|$. **1.2.-** $8|a|$. **1.3.-** $\dfrac{\sqrt{a^2 + p^2}}{a}(e^a - 1)$.

1.4.- $\dfrac{m}{2}\Big(\operatorname{ArgSh}(b) - \operatorname{ArgSh}(a) + b\sqrt{1 + b^2} - a\sqrt{1 + a^2}\Big)$. **1.5.-** $\sqrt{2}\Big(1 - e^{-2\pi}\Big)$.

1.6.- $\dfrac{2\pi}{3}$. **1.7.-** $\dfrac{p}{2}\big(\operatorname{ArgSh}(2) + 2\sqrt{5}\big)$.

2.- $\dfrac{18}{5}$.

3.1.- $\dfrac{5}{2}$. **3.2.-** $2e^3$. **3.3.-** $\dfrac{9e}{2} - \dfrac{3}{2}$. **3.4.-** $-\dfrac{14}{15}$. **3.5.-** 0.

3.6.- $\dfrac{4}{3}$. **3.7.-** $\dfrac{11}{30}$. **3.8.-** $\dfrac{\pi^2}{2} + 2\pi - 8$.

4.1.- $\dfrac{2\pi^2}{a^2}$. **4.2.-** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

5.- La circulación es nula si, y sólo si, la circunferencia tiene su centro en la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

6.- Se tiene que $\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla(xe^{xy})$.

7.- Como Γ es cerrada y $\boldsymbol{F}$ conservativo, la integral es nula.

8.- Se tiene que $\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla\Big(xy\cos(x+y)\Big)$.

9.- Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla(-y/x)$ en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, se deduce que la integral es nula.

10.1.- $\dfrac{3a^2\pi}{8}$. **10.2.-** $\dfrac{3a^2\pi}{2}$. **10.3.-** πab.

11.1.- 4π. **11.2.-** $-2(e-1)(1-\cos(1))$. **11.3.-** -4π.

12.- 0.

13.- $\dfrac{\pi}{8} a\,b(a^4+b^4)$.

TEMA 13 INTEGRACIÓN EN SUPERFICIES

La materia que se trata en este tema, al igual que la relativa a integrales curvilíneas, es el marco abstracto en el que se sitúan numerosos conceptos de la Física, relacionados con modelos de diversa naturaleza, y donde el concepto de superficie aparece de forma natural al describir un conjunto de puntos del espacio (por ejemplo, una esfera metálica cargada eléctricamente), y también por idealización de otros conceptos (tal puede ser el caso de la medición del caudal de un río, es decir, del agua que fluye a través de una sección de su cauce por unidad de tiempo).

§ 1 ÁREA DE UNA SUPERFICIE.

En adelante, al igual que se hizo en el caso de las curvas, se identificará con frecuencia una superficie paramétrica simple y regular con su soporte, teniendo en cuenta que dos parametrizaciones de este tipo de un mismo conjunto son siempre equivalentes.

Recordemos que si $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ son parametrizaciones equivalentes de clase $\mathcal{C}^1$ y regulares de un mismo soporte $S \subset \mathbb{R}^3$, y si $\boldsymbol{\theta}\colon D_1 \to D_2$ es el difeomorfismo tal que

$$\boldsymbol{\varphi}_1(u,v) = \boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{\theta}(u,v)) = \boldsymbol{\varphi}_2(s(u,v), t(u,v)), \qquad (u,v) \in D_1,$$

entonces

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial v}\Big)(u,v) = \mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(u,v) \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}\Big)(\boldsymbol{\theta}(u,v)). \tag{1}$$

Así, el teorema del cambio de variable garantiza la consistencia de la siguiente definición.

Definición 1.1.- Sea $(D, \boldsymbol{\varphi})$ una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$ y regular de una superficie S en $\mathbb{R}^3$. Se define el *área* de S por

$$A(S) = \iint_D \left\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\Big)(u,v) \right\| du\, dv.$$

Observaciones 1.2.-

i) La integral anterior tiene perfecto sentido como integral impropia ya que el integrando es una función continua y positiva; en el caso de que esta integral no sea convergente se asignará al área el valor $+\infty$.

ii) La definición anterior es válida únicamente para superficies elementales (dadas por una sola parametrización), pero puede ser generalizada a entes más generales.

§ 2 INTEGRACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES.

Recordemos que sobre una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ es posible dar dos orientaciones que corresponden, dada una parametrización $(D, \boldsymbol{\varphi})$ de S, a considerar el campo de vectores normales unitarios

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u,v) = \frac{\Big(\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\Big)(u,v)}{\Big\|\Big(\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\Big)(u,v)\Big\|}$$

o su opuesto $-\boldsymbol{n}(u,v)$. Estos vectores unitarios son independientes de la parametrización, así que se puede hablar sin ambigüedad de los vectores normales unitarios, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ y $-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$, en cada punto $\boldsymbol{x}$ del soporte de la superficie.

Definición 2.1.- Sean S (el soporte de) una superficie regular y orientada en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $(D, \boldsymbol{\varphi})$ (coherentemente con su orientación), y $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial definido y continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se define la *integral de* $\boldsymbol{F}$ *en* S o el *flujo de* $\boldsymbol{F}$ *a través de* S por

$$\iint_D \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\varphi}(u,v)\big) \cdot \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\Big)(u,v)\, du\, dv,$$

en el caso de que esta integral sea convergente, y se representa por

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\; d\sigma \qquad \text{ó} \qquad \int_S F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy\,.$$

Observación 2.2.- La integral que aparece en la definición anterior tiene sentido como integral impropia ya que el integrando es continuo. Además, a la vista de (1) y por el teorema del cambio de variables, su carácter es independiente respecto de parametrizaciones equivalentes, y en el caso de que converja su valor no cambia si se respeta la orientación. Ahora bien, se tiene la siguiente

Proposición 2.3.- Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y denotemos por S^+ y S^- a las dos superficies orientadas asociadas a S. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial definido y continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S, entonces

$$\int_{S^-} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\; d\sigma = -\int_{S^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\; d\sigma\,.$$

Propiedades 2.4.- Sean S una superficie regular orientada en $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ dos campos vectoriales continuos en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se verifica:

i) $\displaystyle\int_S (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_S \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_S (c\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = c \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$.

iii) $\displaystyle\left|\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\right| \leq \sup\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| : \boldsymbol{x} \in S^*\}\ A(S)$.

§ 3 SUPERFICIES CON BORDE. TEOREMA DE STOKES.

Consideremos una superficie regular M en $\mathbb{R}^3$, representada por la parametrización $(V, \boldsymbol{\varphi})$ (donde V es un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$), y dotada de la orientación dada en ella por esta parametrización.

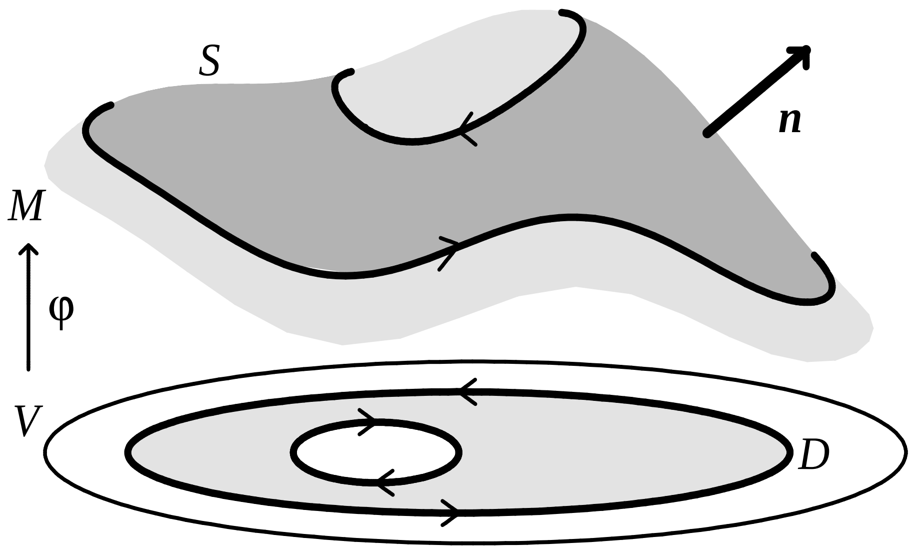
Si D es un abierto conexo y de Jordan en $\mathbb{R}^2$ con $\overline{D} = D \cup \partial D \subset V$, la restricción de $\boldsymbol{\varphi}$ a D, que seguiremos denotando igual por comodidad, proporciona una nueva superficie S representada paramétricamente por $(D, \boldsymbol{\varphi})$ y contenida en M; además, la orientación fijada en M se traslada a S de forma inmediata (el vector normal unitario considerado es el mismo). Si el borde de D se escribe

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m\,,$$

siendo cada Γ_j una curva cerrada, simple y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, su imagen

$$\boldsymbol{\varphi}(\partial D) = \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_1) \cup \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_2) \cup \ldots \cup \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_m)\,,$$

es la unión de m curvas del mismo tipo en $\mathbb{R}^3$, concretamente, si $\boldsymbol{\gamma}_j : [a_j, b_j] \to V$ es una parametrización de Γ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, que da la orientación inducida en Γ_j por D, entonces $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^3$ proporciona una parametrización de $\boldsymbol{\varphi}(\Gamma_j)$.



Definición 3.1.- En las condiciones anteriores se dice que S es una *superficie*

orientada (*elemental*) *con borde*. El conjunto $\boldsymbol{\varphi}(\partial D)$ se denomina *borde de* S y se denota por ∂S. Por último, la orientación dada en cada una de las curvas $\boldsymbol{\varphi}(\Gamma_j)$ por $([a_j, b_j], \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}_j)$ se denomina *orientación inducida* en el borde por la orientación de S.

Observación 3.2.- El concepto de borde tiene un significado similar al dado para abiertos de Jordan en el plano: el borde de S es lo que separa a $S \cup \partial S$ de su complementario en M, esto es, su frontera en la superficie M.

La orientación inducida por S en su borde corresponde a la familiar *regla del sacacorchos*, es decir, sobre los puntos de ∂S (que son puntos regulares de M) el producto vectorial de la "normal exterior" con el vector tangente asociado a esta orientación es un vector en la misma dirección y sentido que el vector normal unitario a M en estos puntos para la orientación original.

Observación 3.3.- Aunque la definición anterior se ha dado en términos de una parametrización fija, el borde de una superficie es un concepto geométrico que no depende de parametrizaciones de dicha superficie. Por ejemplo, si el hemisferio

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z > 0\}$$

se parametriza por la aplicación

$$(x, y) \mapsto \big(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\big)\,, \qquad (x, y) \in D = B(\mathbf{0}, 1)\,,$$

esta parametrización no puede ser extendida de forma diferenciable a un abierto más grande que D; sin embargo, S es una superficie con borde cuyo borde ∂S es el ecuador, es decir, la circunferencia

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$$

(imagínese que S es el cuenco de una copa, su borde es lo que está en contacto con la mesa al colocarla boca abajo).

Teorema 3.4.- (*Teorema de Stokes para superficies elementales*).

Sea S una superficie elemental con borde. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $S \cup \partial S$, entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,,$$

cuando en ∂S se considera la orientación inducida por la de S.

Observaciones 3.5.-

i) En la igualdad anterior, que se conoce con el nombre de *fórmula de Stokes* o *del rotacional*, el término de la derecha se entiende como la suma de las circulaciones a lo largo de cada una de las curvas que componen el borde de S, y que se calculan como integrales de Riemann ordinarias (usando cualquier parametrización equivalente de ellas, no necesariamente $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}_j$), por ser el campo $\boldsymbol{F}$ continuo y dichas curvas compactas.

El término de la izquierda, si se calcula según la parametrización $(D, \boldsymbol{\varphi})$ mediante la cual hemos definido la superficie con borde, resulta ser una integral de Riemann de una función continua en el compacto medible $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, por tanto, la integral impropia relativa a cualquier otra parametrización equivalente de S ha de ser convergente y con el mismo valor, en virtud del teorema del cambio de variables.

ii) Cuando se considera una superficie contenida en el plano $\{z = 0\}$ dada por $\boldsymbol{\varphi}(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in D$, y un campo plano $\boldsymbol{F} = (P, Q, 0)$, la fórmula de Stokes no es otra cosa que la fórmula de Green.

La siguiente definición permite generalizar la fórmula de Stokes a otros objetos más complicados.

Definición 3.6.- Sean S_1 y S_2 dos superficies elementales, regulares y con borde, dadas, según 3.1, por las parametrizaciones $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, respectivamente, y con soportes disjuntos, es decir, tales que

$$\boldsymbol{\varphi}_1(D_1) \cap \boldsymbol{\varphi}_2(D_2) = \emptyset\,.$$

Supongamos además que $\partial S_1 \cap \partial S_2$ es unión finita (posiblemente vacía) de curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y que el conjunto

$$C = \overline{\partial S_1 \cup \partial S_2 \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)}$$

es unión finita de curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. En estas condiciones, se dice que

$$S = \boldsymbol{\varphi}_1(\overline{D}_1) \cup \boldsymbol{\varphi}_2(\overline{D}_2) \setminus C$$

es la *superficie suma* de las superficies S_1 y S_2, o que es la *cadena* compuesta por las superficies S_1 y S_2, y se la denota por $S = S_1 + S_2$ ó $S = S_1 \uplus S_2$. También se dice que C es el *borde* de S, denotado por $C = \partial S$.

De forma similar se define recurrentemente la *suma* o *cadena* de k superficies elementales con borde $S_1 \uplus S_2 \uplus \ldots \uplus S_k$.

Definición 3.7.- Sea $S = S_1 \uplus S_2 \uplus \cdots \uplus S_k$ la superficie suma de k superficies elementales con borde, considerando en cada una de ellas una de las dos orientaciones posibles. Si para cada par de índices $1 \leq i, j \leq k$, con $i \neq j$ y tales que $\partial S_i \cap \partial S_j \neq \emptyset$, se tiene que las orientaciones inducidas en $\partial S_i \cap \partial S_j$ por S_i y S_j son opuestas una de la otra, se dice que S es *orientable*, y la orientación resultante en ∂S, el borde de la cadena S, se denomina *orientación inducida* por S.

Para ilustrar el significado de las dos definiciones anteriores desarrollaremos un par de ejemplos.

Ejemplos 3.8.-

3.8.1.- Denotemos por S_1 y S_2 a los dos hemisferios de la esfera unidad

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

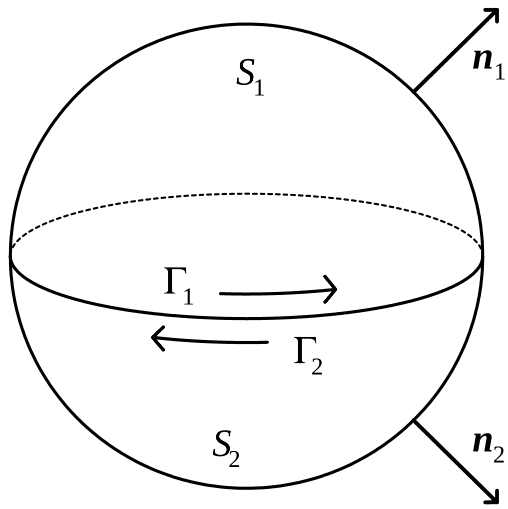
dados por $S_1 = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ y $S_2 = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$. Resulta que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $\partial S_1 = \partial S_2$ (ver 3.3), así que

$$\overline{\partial S_1 \cup \partial S_2 \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)} = \emptyset\,,$$

resultando que $S_1 \uplus S_2 = S$. Si S_1 y S_2 se orientan según los vectores normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$, respectivamente, dados ambos por

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}(x, y, z) = (x, y, z)\,, \qquad \boldsymbol{x} \in S_1 \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{x} \in S_2\,,$$

la orientación que induce S_1 en su borde, Γ_1, es la que corresponde a recorrer la circunferencia $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$ en sentido antihorario, y la que induce S_2 en el suyo, Γ_2, es la opuesta (véase la gráfica siguiente).



Hemos obtenido así S como suma de superficies elementales que resulta ser una cadena orientable sin borde; a este tipo de cadenas se las denomina *cerradas* y, de una manera puramente coloquial, podemos decir que son frontera de abiertos de $\mathbb{R}^3$.

3.8.2.- Consideremos las superficies S_1 y S_2 dadas por

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ 0 < z < 1\}\,,$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\,,\ z = 0\}$$

(una porción de cilindro y un disco abierto en el plano $\{z = 0\}$). Resulta evidente que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$; el borde de S_1 es la unión de dos circunferencias Γ_0 y Γ_1, de radio 1 y situadas en los planos $\{z = 0\}$ y $\{z = 1\}$, respectivamente, y el borde de S_2 es $\Gamma_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$. Entonces

$$\overline{\partial S_1 \cup \partial S_2 \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)} = \Gamma_1\,.$$

La suma $S = S_1 + S_2$ es una cadena de superficies cuyo aspecto es el de un vaso; si S_1 se orienta según el vector normal $\boldsymbol{n}_1(x, y, z) = (x, y, 0)$ y S_2 según el vector normal $\boldsymbol{n}_2(x, y, z) = (0, 0, -1)$, entonces, la orientación que induce S_1 en Γ_0 es la que corresponde a recorrer esta circunferencia en sentido antihorario, y la que induce S_2 es la opuesta, resultando que S es orientable, y que la orientación inducida en su borde $\partial S = \Gamma_1$ es la que se obtiene al recorrer esta circunferencia en sentido horario.

Definición 3.9.- Sean $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_k$ una cadena orientable de superficies y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se define la *integral* de $\boldsymbol{F}$ en S o el *flujo* de $\boldsymbol{F}$ a través de S por

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_j\, d\sigma\,,$$

donde para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, $\boldsymbol{n}_j$ es el vector normal unitario asociado a la orientación correspondiente en cada S_j.

Teorema 3.10.- (*Teorema de Stokes*).

Sean S una cadena orientable de superficies y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,,$$

cuando en ∂S, el borde de S, se considera la orientación inducida por S.

Corolario 3.11.- En las condiciones del teorema anterior, si S es una superficie cerrada (es decir, $\partial S = \emptyset$), entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0\,.$$

§ 4 ABIERTOS CON FRONTERA REGULAR A TROZOS. TEOREMA DE LA DIVERGENCIA.

Definición 4.1.- Sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Se dice que su frontera es *regular a trozos* si el conjunto $\mathrm{Fr}(V)$ es el soporte de una cadena orientable de superficies. En estas condiciones $\mathrm{Fr}(V)$ se denomina también *borde* de V y se denota por ∂V.

Sobre la frontera de un abierto V del tipo anterior se puede establecer una orientación de forma natural relativa al conjunto V, en base al siguiente resultado.

Lema 4.2.- Sean V un abierto de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos y $\boldsymbol{x}_0$ un punto de la frontera de V que es regular para la superficie a la que pertenece. Sean $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1$ los dos vectores unitarios normales a ∂V en el punto $\boldsymbol{x}_0$. Entonces, uno sólo de estos dos vectores, que denotaremos por $\boldsymbol{n}_e$, verifica la siguiente propiedad:

"Existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \varepsilon)$ se tiene que

$$\boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{n}_e \notin V\text{''}.$$

Definición 4.3.- En las condiciones del lema anterior, al vector $\boldsymbol{n}_e$ que verifica dicha propiedad se le denomina *normal exterior* a V en el punto $\boldsymbol{x}_0$. La *orientación natural* o *inducida en ∂V por V* es la que corresponde a este vector normal en cada uno de los puntos regulares.

Observación 4.4.- No es difícil probar que, en esta situación, la cadena de superficies ∂V es orientable y sin borde (los bordes de las superfices que constituyen dicha cadena se orientan en sentidos opuestos respecto de superficies adyacentes).

Teorema 4.5.- (*Teorema de la divergencia o de Gauss-Ostrogradsky*)

Sean V un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $\overline{V}$, entonces

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\;\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,,$$

cuando en ∂V se considera la orientación dada por la normal exterior.

§ 5 EJERCICIOS.

Área de una superficie.

1.- Hallar el área de las siguientes superficies:

1.1.- Una esfera de radio r.

1.2.- La imagen de $\boldsymbol{\varphi}(u,v) = (u\cos(v), u\,\text{sen}(v), u^2)$, $u \in (0,4)$, $v \in (0,2\pi)$.

1.3.- La superficie dada por $z^2 = 2\,x\,y$, $0 < x < 2$, $0 < y < 1$, $z > 0$.

1.4.- El toro de radios a y b $(0 < b < a)$.
Indicación: La aplicación

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \Big(\big(a + b\cos(u)\big)\cos(v), \big(a + b\cos(u)\big)\,\text{sen}(v), b\,\text{sen}(u)\Big)\,, \quad u,v \in (0,2\pi)\,,$$

parametriza el toro excepto dos circunferencias.

1.5.- La región del plano $x + y + z = a$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

2.- Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función positiva y de clase $\mathcal{C}^1$. Se considera la superficie de revolución generada al girar la gráfica de la función f alrededor del eje OX. Probar que el área de esta superficie viene dada por

$$2\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

Flujo de un campo a través de una superficie.

3.- Calcular el flujo del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,-2z)$ a través de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ comprendido entre los planos $z = 1$ y $z = 2$, dotado de la orientación dada por la normal $\boldsymbol{n}(x,y,z) = (x,y,0)$.

4.- Sea $S = \{(u+v, u^2+v^2, u-v) \in \mathbb{R}^3 : -1 < u < 1, -1 < v < 1\}$. Calcular el flujo de $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (0,0,z)$ a través de S cuando en ésta se considera la orientación dada por la normal que tiene la segunda componente positiva.

5.- Se considera el casquete esférico S dado por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,, \quad z > 1\,,$$

con la orientación de la normal exterior a la esfera. Calcular

$$\int_S (1,0,1)\cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma\,.$$

6.- Sea S la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$. Calcular

$$\int_S (x,y,0)\cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma\,,$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector normal exterior a la esfera, parametrizando de dos formas diferentes.

7.- Sea S el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, y sea $\boldsymbol{n}$ la normal a S cuya tercera componente es negativa. Calcular

$$\int_S (x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

8.- Sea S la superficie de revolución generada al girar la gráfica de la función $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ (f positiva y de clase $\mathcal{C}^1$) alrededor del eje OX. Sea $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ y $\boldsymbol{n}$ la normal exterior. Expresar como una integral doble

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Aplicaciones de los teoremas de Stokes y de la Divergencia.

9.- Comprobar la fórmula de Stokes para el campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z,0,0)$ y la curva parametrizada por la aplicación

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(\cos(t)\,,\, \operatorname{sen}(t)\,,\, \cos(t)\operatorname{sen}(t)\big)\,, \quad t\in[0,2\pi]\,,$$

observada como borde de la superficie dada por

$$z = x\,y\,; \quad x^2+y^2 \le 1\,.$$

10.- Calcular, mediante dos procedimientos distintos, la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ a lo largo del borde de la superficie dada por

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \ge -3.$$

11.- Calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(-y^3, x^3, -z^3\big)$ a lo largo de la curva intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $x+y+z=1$.

12.- Calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$ a lo largo de la curva Γ dada por

$$x^2+y^2 = 2\,y; \quad y = z.$$

13.- Se considera la integral de superficie

$$I = \int_S \big(x\,(z^2-y^2)\,,\, y\,(x^2-z^2)\,,\, z\,(y^2-x^2)\big)\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal a S, que es una superficie orientada limitada por una curva cerrada Γ. Transformar I en una integral curvilínea.

i) Calcular I cuando S es la semiesfera $x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2$, $z \ge R$ $(R>0)$.

ii) Utilizando el teorema de la divergencia, calcular I en la semiesfera inferior.

14.- Se consideran el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(x^2,x-2xy,0\big)$, y la superficie rectangular S que resulta de la intersección del plano $2y+z-6=0$ y el cubo $[0,4]\times[0,4]\times[0,4]$.

i) Calcular $\displaystyle\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$, donde $\boldsymbol{n}$ es el vector normal a S cuya tercera coordenada es positiva.

ii) Demostrar que el campo $\boldsymbol{F}$ es solenoidal y encontrar un campo vectorial $\boldsymbol{G}$ tal que $\boldsymbol{F}=\operatorname{rot}(\boldsymbol{G})$.

iii) Si Γ es el borde de la superficie S, dotada de la orientación que induce la normal $\boldsymbol{n}$, calcular $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r}$.

15.- Sea S la esfera de centro $\mathbf{0}$ y radio $r>0$, orientada según la normal exterior.

i) Calcular $\displaystyle\int_S (z,x,y)\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$.

ii) Calcular $\displaystyle\int_S (x^2,0,0)\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$.

16.- Sea S la superficie cerrada formada por el plano $z=0$, los cuatro planos verticales que cortan en este plano el cuadrado inscrito en la circunferencia unidad de lados paralelos a los ejes, y el casquete superior de la esfera unidad. Hallar la integral del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(y,-x,z^2\big)$ extendida a S.

17.- Calcular el flujo de los siguientes campos a través de las superficies que se indican, directamente y utilizando el teorema de la divergencia:

17.1.- $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(x^2,y^2,z^2\big)$ a través de la frontera del cubo unidad.

17.2.- $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x\,z,y\,z,1)$ a través de la superficie dada por

$$x^2+y^2+z^2=25\,,\quad z\leq 3\,.$$

17.3.- $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x\,z,y\,z,0)$ a través de la superficie que limita al sólido

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2\leq 4\,,\;x^2+y^2\geq 1\}\,.$$

§ 6 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

1.1.- $4\pi r^2$. **1.2.-** $\frac{\pi}{6}(\sqrt{65^3}-1)$. **1.3.-** 4. **1.4.-** $4\pi^2 ab$. **1.5.-** $\sqrt{3}\pi a^2$.

2.- Una parametrización de la superficie es $\varphi\colon (a,b)\times(0,2\pi)$ dada por

$$\varphi(x,\theta) = (x, f(x)\cos(\theta), f(x)\operatorname{sen}(\theta)).$$

3.- 2π. **4.-** $-\frac{16}{3}$. **5.-** π. **6.-** $\frac{4\pi}{3}$. **7.-** $-\frac{1}{2}$.

8.- Con la parametrización dada en el problema 2, resulta

$$-\iint_{(a,b)\times(0,2\pi)} \Big(xf(x)f'(x) - (f(x))^2\Big)\,dx\,d\theta.$$

9.- 0. **10.-** -4π. **11.-** Aplicando el teorema de Stokes, $-\frac{3\pi}{2}$.

12.- Aplicando el teorema de Stokes, 0.

13.- $\int_S \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_\Gamma \boldsymbol{G}\,d\boldsymbol{r}$, donde, por ejemplo,

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = (x^2yz - \frac{1}{3}yz^3, xy^2z - \frac{1}{3}xz^3, 0).$$

i) 0; ii) Aplicando el teorema de la divergencia para el cálculo del flujo a través de la esfera completa, se deduce que también esta integral es nula.

14.- i) -96; ii) $\boldsymbol{G}(x,y,z) = (0,0,x^2y - \frac{1}{2}x^2)$; iii) Usar el teorema de Stokes.

15.- Por el teorema de la divergencia, ambas integrales son nulas.

16.- Con el teorema de la divergencia, $\frac{4}{3}$.

17.1.- 3. **17.2.-** -144π. **17.3.-** 0.