MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Modelo de examen del primer parcial – 17 de enero de 2003
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:30

1.- Resolver la ecuación $x^2 - |2x-1| = 0$.

2.- Expresar en forma binómica el complejo $\dfrac{(1+i)^{20}}{(3+i)(1-i)^{20}}$.

3.- Probar que existe un único $x_0 \in \left(\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right)$ tal que $x_0 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x_0}\right) = \dfrac{1}{\pi}$.

4.- Calcular $\lim_{x\to\infty} (x^2+x)\log\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$.

5.- Hallar el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{1+x}.$$

6.- Demostrar que para cualquier par de números reales a, b se tiene que

$$|\operatorname{arctg}(a) - \operatorname{arctg}(b)| \leq |a-b|.$$

7.- Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

8.- Justificar la existencia del plano tangente a la gráfica de la función

$$z = f(x,y) = x^2 + 3y + 2$$

en el punto $(x_0, y_0) = (0,0)$. Determinar la ecuación de dicho plano.

9.- Determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2xy$.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los Apellidos y Nombre, en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Modelo de examen del primer parcial – 17 de enero de 2003
2ª Parte – Duración: de 11:00 a 13:00

1. Estudiar, en función del parámetro real α, el valor de

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x-\log(1+x)}{x^2}\right)^{1/x^\alpha}.$$

12 puntos

2.- De entre todos los trapecios que se pueden inscribir en la circunferencia centrada en el origen y de radio $R>0$, uno de cuyos lados paralelos es el diámetro de la circunferencia que está en el eje de abscisas, determinar el que posee área máxima.

15 puntos

3.- Estudiar la continuidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2+xy}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0;\\ 0 & \text{si } x+y=0.\end{cases}$$

14 puntos

4.- Se considera la ecuación

$$z^3-a(x^2+xy-z)+e^{bx+cy}=1.$$

a) Probar que si $a\neq 0$ la ecuación define a z como función implícita $z=z(x,y)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$, en un entorno del punto $(0,0)$, con $z(0,0)=0$. *4 puntos*
b) Encontrar valores de b y c para los que la función $z=z(x,y)$ presenta en el punto $(0,0)$ un punto crítico, y determinar si es un extremo relativo. *10 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en hojas separadas, debiendo figurar en cada una los Apellidos y Nombre, en este orden, del alumno.*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen parcial – 28 de enero de 2003
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:30

Instrucciones: *Las soluciones de las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- Resolver la ecuación $x^2 - |x| = 2 - |3 - x|$.

2.- Expresar en forma binómica el complejo $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{20}}{(1-i\sqrt{3})^{10}}$.

3.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \big(\cos(x)\big)^{\operatorname{cotg}(x)}$.

4.- Hallar los valores de las constantes reales a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 0, \\ x + b(e^x - 1) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

es derivable en $\mathbb{R}$.

5.- Probar que la cuerda que une los puntos de abscisa a y b en la parábola

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

es paralela a la recta tangente a dicha parábola en el punto de abscisa $\dfrac{a+b}{2}$.

6.- Determinar el número de soluciones reales de la ecuación

$$2x + e^x = 0.$$

7.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + xy}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Probar que f admite todas las derivadas direccionales en $(0,0)$. ¿Es f continua en $(0,0)$?

8.- Justificando su existencia, determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función

$$z = f(x,y) = \log(x^2 - y + 1)$$

en el punto $(x_0, y_0) = (0,0)$.

9.- Determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen parcial – 28 de enero de 2003
2ª Parte – Duración: de 11:00 a 13:00

Instrucciones: *Las soluciones deben entregarse escritas con tinta,* **cada problema en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = ae^x + bx^2 + x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

donde a y b son constantes reales.
i) Determinar a y b para que f presente extremos relativos en $x = 0$ y en $x = 1$, indicando si cada uno de ellos es máximo o mínimo. *6 puntos*
En lo que sigue, se da a los parámetros a y b los valores determinados en i).
ii) Determinar los puntos de inflexión de f. *3 puntos*
iii) Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. *2 puntos*
iv) Realizar un esbozo de la gráfica de f. *3 puntos*

2.- Hallar las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R y cuyo eje de revolución pasa por el centro de la esfera. *12 puntos*

3.- Estudiar la continuidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

14 puntos

4.- Sea $a \in \mathbb{R}$ y considérese la ecuación

$$e^{(1-a)xz} + axy + (y^3+1)z = 2.$$

a) Probar que la ecuación define z como función implícita $z = z(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $(0,0)$, con $z(0,0) = 1$. *4 puntos*
b) Hallar el valor de a para el que la función $z = z(x,y)$ presenta en $(0,0)$ un punto crítico. *6 puntos*
c) Obtener, para el valor anterior de a, la expresión explícita de $z(x,y)$, y determinar si dicha función posee un extremo relativo en $(0,0)$. *5 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Soluciones del examen parcial de 28 de enero de 2003

CUESTIONES

1.- Se deben distinguir los casos siguientes:

a) Si $x < 0$, la ecuación se escribe:

$$x^2 + x = 2 - (3 - x), \qquad \text{de donde} \qquad x^2 = -1,$$

que no tiene soluciones reales.

b) Si $0 \le x \le 3$, queda

$$x^2 - x = 2 - (3 - x), \qquad \text{es decir,} \qquad x^2 - 2x + 1 = 0,$$

cuya única solución es $x = 1$, que efectivamente pertenece al intervalo en el que trabajamos.

c) Si $x > 3$, la ecuación se reduce a

$$x^2 - x = 2 - (x - 3), \qquad \text{y ha de ser} \qquad x^2 = 5,$$

cuyas soluciones, $\pm\sqrt{5}$, no verifican la condición de ser mayores que 3.

Por lo tanto, la única solución de la ecuación es el punto 1.

2.- Si $z = 1 + i\sqrt{3}$, es inmediato que $z = 2e^{i\pi/3}$, con lo que

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^{20}}{(1-i\sqrt{3})^{10}} = \frac{z^{20}}{\overline{z}^{10}} = \frac{z^{20}z^{10}}{\overline{z}^{10}z^{10}} = \frac{z^{30}}{|z|^{20}} = \frac{(2e^{i\pi/3})^{30}}{2^{20}} = \frac{2^{30}e^{i10\pi}}{2^{20}} = 2^{10}.$$

3.- La indeterminación es del tipo 1^∞. Si llamamos L al límite,

$$\log(L) = \lim_{x\to 0} \operatorname{cotg}(x)\log(\cos(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2/2}{x} = 0,$$

con lo que $L = 1$.

4.- La función dada es derivable en $(0,\infty)$ por resultar de sumas o productos de funciones derivables (polinomios y exponencial). Análogamente, es derivable en $(-\infty, 0)$. En cuanto al punto $x_0 = 0$, estudiemos en primer lugar la continuidad: $f(0) = a = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, mientras que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Por lo tanto, ha de ser $a = 0$ para que f sea continua en 0. Por último,

$$f'(0^-) = 2 \qquad \text{y} \qquad f'(0^+) = 1 + b,$$

por lo que f es derivable en 0 sólo si $2 = 1 + b$, es decir, $b = 1$.

5.- La cuerda que une los puntos

$$(a, Aa^2 + Ba + C) \qquad \text{y} \qquad (b, Ab^2 + Bb + C)$$

tiene pendiente

$$\frac{Ab^2 + Bb + C - (Aa^2 + Ba + C)}{b - a} = A(a + b) + B.$$

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(a + b)/2$ es

$$y'(\frac{a+b}{2}) = 2A\frac{a+b}{2} + B = A(a + b) + B.$$

Puesto que ambas pendientes coinciden, la cuerda y la tangente son paralelas.

6.- La función $f(x) = 2x + e^x$ es continua en $\mathbb{R}$, $f(-1) < 0$ y $f(0) > 0$, con lo que el teorema de Bolzano garantiza que f se anula al menos en un punto (del intervalo $(-1, 0)$). Como

$$f'(x) = 2 + e^x > 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

f es estrictamente creciente, y por lo tanto inyectiva, en $\mathbb{R}$, con lo que toma sus valores una única vez y la ecuación dada tiene exactamente una solución.

7.- Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ un vector no nulo. Si $v_2 \neq 0$,

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^2v_1^2 + t^2v_1v_2}{tv_2} - 0}{t} = \frac{v_1^2}{v_2} + v_1.$$

Si $v_2 = 0$,

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, 0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

La función no es continua en $(0, 0)$, pues los límites direccionales en $(0, 0)$ son todos nulos, mientras que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2} = 1.$$

8.- La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$, y por tanto diferenciable, en el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2 + 1\},$$

al que pertenece el punto $(0, 0)$. En consecuencia, la existencia del plano tangente en dicho punto está garantizada, y su ecuación es

$$z - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0).$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left.\frac{2x}{x^2 - y + 1}\right|_{(0,0)} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left.\frac{-1}{x^2 - y + 1}\right|_{(0,0)} = -1,$$

con lo que la ecuación del plano es $z = -y$.

9.- Las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2x + 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

son los puntos críticos de f, que resultan ser $(0, 0)$ y $(2/3, 2/3)$. La matriz hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

En $(0, 0)$,

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

que es indefinida por ser de tamaño 2×2 y tener determinante negativo. Así, este punto no es extremo. En cuanto al otro,

$$Hf(2/3, 2/3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva, y el punto es un mínimo.

PROBLEMAS

1.- **i)** Es inmediato que $f'(0) = 0$ si, y sólo si, $a = -1$, y ahora se deduce que $f'(1) = 0$ si, y sólo si, $b = \dfrac{e-1}{2}$. Para esos valores de a y b se tiene que $f''(0) = e-2 > 0$, con lo que f presenta en $x = 0$ un mínimo, y que $f''(1) = -1 < 0$, con lo que en $x = 1$ se tiene un máximo.

ii) La derivada segunda de f se anula si $e^x = e - 1$, con lo que ha de ser $x = \log(e-1)$. Como $f'''(x) = -e^x \neq 0$, dicho punto es de inflexión.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2.- Consideremos el corte de la esfera por un plano que contenga el eje de revolución del cilindro. Llamamos r y h al radio y altura, respectivamente, del cilindro. Tracemos el radio de la esfera, de longitud R, que va a uno de los puntos de contacto de esfera y cilindro. El teorema de Pitágoras establece que

$$R^2 = r^2 + \big(\frac{h}{2}\big)^2.$$

Puesto que se trata de maximizar el volumen $V = \pi r^2 h$, podemos escribir

$$V = V(h) = \pi\big(R^2 - \frac{h^2}{4}\big)h = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4}h^3.$$

Es sencillo comprobar que

$$V'(h) = 0 \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad h = h_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}R,$$

y que $V''(h_0) < 0$, con lo que el volumen máximo se alcanza para el cilindro de dimensiones

$$h_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}R \qquad \text{y} \qquad r_0 = \frac{\sqrt{6}}{3}R.$$

3.- Es evidente que la función admite derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, por lo que la diferenciabilidad (y en consecuencia la continuidad) están garantizadas en todos los puntos de ese conjunto. En cuanto al $(0,0)$, observamos que

$$f(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)) = \rho\big(\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) - \mathrm{sen}^3(\theta)\big),$$

con lo que

$$|f(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))| \leq 2\rho.$$

Puesto que $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho = 0$ (uniformemente con respecto de θ), se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

y f es continua en $(0,0)$.

Calculemos las derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h} = -1.$$

Por lo tanto,

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - 0\cdot h - (-1)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{2h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Es sencillo ver (estudiando los límites direccionales de esta función en $(0,0)$ o mediante un cambio a coordenadas polares) que no existe

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k),$$

con lo que f no es diferenciable en $(0,0)$.

4.- Definamos $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y,z) = e^{(1-a)xz} + axy + (y^3+1)z - 2.$$

a) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $f(0,0,1) = 0$, y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 1 \neq 0$, con lo que basta aplicar el teorema de las funciones implícitas.

b) La función z obtenida en un entorno U de $(0,0)$ es tal que

$$e^{(1-a)xz(x,y)} + axy + (y^3+1)z(x,y) = 2, \qquad (x,y) \in U. \qquad (*)$$

Derivando en $(*)$ respecto de x:

$$e^{(1-a)xz(x,y)}\Big((1-a)\big(z(x,y) + x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\big)\Big) + ay + (y^3+1)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in U.$$

Evaluando en $(0,0)$, con $z(0,0) = 1$,

$$1 - a + \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = a - 1.$$

Si derivamos en $(*)$ respecto de y:

$$e^{(1-a)xz(x,y)}(1-a)x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + ax + 3y^2 z(x,y) + (y^3+1)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in U.$$

Evaluando en $(0,0)$, con $z(0,0) = 1$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Por lo tanto, $(0,0)$ es punto crítico sólo cuando $a = 1$.

c) Si $a = 1$, la ecuación original es

$$1 + xy + (y^3+1)z(x,y) = 2, \qquad \text{de donde} \qquad z(x,y) = \frac{1-xy}{y^3+1}.$$

Es fácil ver que no se presenta en $(0,0)$ un extremo relativo de z, pues $z(0,0) = 1$, mientras que para h arbitrariamente pequeño,

$$z(0,h) = \frac{1}{h^3+1} \begin{cases} < 1 & \text{si } h > 0, \\ > 1 & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Modelo de examen del segundo parcial (sólo cuestiones) – 6 de junio de 2003
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

1.- Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{tg}(x)}\,dx$.

2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \log(t)\,dt}{\sqrt[3]{x}}$.

3.- Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{x+1}{x^3+8}\,dx$.

4.- Hallar el área de la superficie encerrada por las gráficas de las funciones

$$y = \mathrm{sen}(x) \qquad \text{e} \qquad y = \frac{2x}{\pi}.$$

5.- Dar una parametrización de la curva plana de ecuación implícita

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0.$$

6.- Sea Γ la curva geométrica orientada parametrizada por

$$\Gamma(t) = (t^2 + \mathrm{sen}(t-1)\log(1+t^2), t^3 - 5t\cos(\pi t))), \qquad t \in [0,1].$$

Si $F(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$, calcular $\displaystyle\int_\Gamma F\,dr$.

7.- Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ x > 0\}$, calcular el valor de

$$\int_D \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$$

8.- Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} (1+x)e^{-(x+y)}\cos(x-y)\,dx\,dy.$$

9.- Sea V un cubo de lado ℓ situado en el espacio, y sea ∂V la superficie que lo limita. Calcular $\displaystyle\int_{\partial V} (xy, z, (2-y)z)\boldsymbol{n}d\sigma$.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los Apellidos y Nombre, en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen parcial – 12 de junio de 2003
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}$ es $\dfrac{x_0+1}{4+x_0^2}$. Sabiendo que $f(0) = 1 + \log(2)$, determinar la expresión de f.

2.- Demostrar que para toda función f continua en $\mathbb{R}$ se tiene que
$$\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen}(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos(x))\,dx.$$

3.- Hallar los puntos críticos de la función
$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t}\operatorname{sen}(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4.- Estudiar la convergencia de la integral
$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)},$$
y calcularla si converge.

5.- Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq 2,\ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2\}$. Calcular
$$\iint_D x\,y\,dx\,dy.$$

6.- Calcular el área de la superficie plana encerrada por la curva de ecuación polar $\rho^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$, con $\theta \in [0, \pi/2]$.

7.- Estudiar la convergencia de la integral
$$\iint_{(0,\infty)\times(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{1+x^2}\,dx\,dy.$$

8.- Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una representación paramétrica de una curva geométrica orientada tal que $\gamma(a) = (2,1)$ y $\gamma(b) = (3,4)$. Calcular
$$\int_\gamma (y^2 e^{xy^2}, 2xye^{xy^2})\,d\boldsymbol{r}.$$

9.- Si S es una esfera de radio r, calcular $\displaystyle\int_S (x,y,z)\boldsymbol{n}d\sigma$.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen parcial – 12 de junio de 2003
2ª Parte – Duración: de 11:15 a 13:15

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

1. **a)** Determinar el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = x - \operatorname{sen}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$ *3 puntos*

b) Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{(x^3+x^4)\sqrt{x}}\,dx.$ *12 puntos*

2.- Sea $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ z \leq 3 - x^2 - y^2\}$. Calcular

$$\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz.$$ *15 puntos*

3.- Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$, y consideremos su borde ∂D dotado de la orientación inducida por D. Calcular

$$\int_{\partial D} (e^{\cos(x)} + 4y, \cos(e^y) + x)d\boldsymbol{r}.$$ *10 puntos*

4.- Sea V el subconjunto acotado de $(0,\infty)^3$ limitado por las superficies de ecuaciones

$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad x = 2, \qquad z = 3 \qquad \text{y} \qquad z = y^2.$$

Si S es la superficie frontera de V orientada según la normal interior, calcular

$$\int_S (x^2, y, yz)\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$ *15 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen final – 26 de junio de 2003
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL PRIMER PARCIAL

1.- Determinar los extremos superior e inferior, si existen, del conjunto
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x+2} < |x-3|\}.$$

2.- Resolver la ecuación
$$z^4 - 2z^2 + 2 = 0.$$

3.- Estudiar la derivabilidad en $\mathbb{R}$ de la función f dada por $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$.

4.- Obtener el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función
$$f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{\operatorname{arctg}(x^4)}$.

6.- Probar que para todo $x > 0$ se tiene que $x^2 e^{2-x} \leq 4$.

7.- Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de la función f dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

8.- Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

9.- Determinar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen final – 26 de junio de 2003
2ª Parte – Duración: de 11:15 a 13:15

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL PRIMER PARCIAL

1. **a)** Probar que la ecuación

$$3x = e^x$$

tiene exactamente dos soluciones reales. *8 puntos*

b) Estudiar y representar gráficamente la función

$$f(x) = 3x - e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$ *7 puntos*

2.- La distancia de un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a la recta de ecuación $x + y = 0$ viene dada por

$$d(a, b) = \frac{|a + b|}{\sqrt{2}}.$$

Determinar el punto o los puntos de la curva $xy = 1$ que se hallan a distancia mínima de dicha recta. *12 puntos*

3.- **a)** Probar que $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{-1/t^2}}{t} = 0.$ *5 puntos*

b) Estudiar la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función f dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\big(-1/(x^2 + y^2)\big) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$ *8 puntos*

4.- **a)** Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^3 - z^3 + 3x = 3 \\ y^2 + z^2 + 2x = 4 \end{cases}$$

define funciones implícitas $y = y(x)$ y $z = z(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $x_0 = 1$, con $y(1) = 1$ y $z(1) = 1$. *5 puntos*

b) Hallar el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$. *5 puntos*

c) ¿Presenta la función $z(x)$ un extremo relativo en $x_0 = 1$? *5 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen final – 26 de junio de 2003
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Calcular $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\int_1^x \sqrt{t^3}\,dt}{\sqrt{x^5}}$.

2.- Hallar el área de la superficie acotada comprendida entre las gráficas de las funciones

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad y = x^3.$$

3.- Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}}\,dx$.

4.- Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}\,\}$. Calcular

$$\iint_D y\,dx\,dy.$$

5.- Estudiar la convergencia de la integral

$$\iint_{(0,1)\times(1,\infty)} \frac{(1+\cos(x))e^{-y}}{\sqrt{x\,y}}\,dx\,dy.$$

6.- Dar una expresión paramétrica de la curva de ecuación polar

$$\rho^2 = \cos(2\theta), \qquad \theta \in [-\pi/4, \pi/4].$$

7.- Si la curva geométrica orientada γ tiene la representación paramétrica

$$\gamma(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t), t), \qquad t \in [0, 4\pi],$$

calcular $\displaystyle\int_\gamma (yz, xz, xy)\,d\boldsymbol{r}$.

8.- Calcular la integral del campo $\boldsymbol{F}(x,y) = (e^x(y-x), e^x + y^2)$ a lo largo de la curva de ecuación $x^2 + 2y^2 = 2$.

9.- Si S es la superficie frontera de un cilindro de radio 3 y altura 2, calcular

$$\int_S (y, x, z) \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen final – 26 de junio de 2003
2ª Parte – Duración: de 11:15 a 13:15

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas***, debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre***, en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\big(1-\cos(x)\big)\big(1-e^{-x}\big)}{x^{7/2}}\,dx.$$ *13 puntos*

2.- Sea V el sólido acotado limitado por los planos coordenados y por los planos de ecuaciones respectivas $x = 2$ y $2y + z = 1$. Calcular

$$\iiint_V (x+y)\,dx\,dy\,dz.$$ *12 puntos*

3.- Sea

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ 2z \leq 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 1 - x^2 - y^2\}.$$

Calcular

$$\iiint_V x\,y\,dx\,dy\,dz.$$ *15 puntos*

4.- Sea S la porción del plano de ecuación $x + y + z = 1$ que es interior al cilindro de ecuación $x^2 + z^2 = 1$, y sea

$$I = \int_S (0,z,0)\cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

a) Tranformar I en una integral curvilínea. *8 puntos*
b) Calcular I. *7 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen final – 26 de junio de 2003
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre***, en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Estudiar la derivabilidad en $\mathbb{R}$ de la función f dada por $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$.

2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{\operatorname{arctg}(x^4)}$.

3.- Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de la función f dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4.- Determinar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5.- Hallar el área de la superficie acotada comprendida entre las gráficas de las funciones

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad y = x^3.$$

6.- Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}}\,dx$.

7.- Dar una expresión paramétrica de la curva de ecuación polar

$$\rho^2 = \cos(2\theta), \qquad \theta \in [-\pi/4, \pi/4].$$

8.- Si la curva geométrica orientada γ tiene la representación paramétrica

$$\gamma(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t), t), \qquad t \in [0, 4\pi],$$

calcular $\displaystyle\int_\gamma (yz, xz, xy)\,d\boldsymbol{r}$.

9.- Calcular la integral del campo $\boldsymbol{F}(x,y) = (e^x(y-x), e^x + y^2)$ a lo largo de la curva de ecuación $x^2 + 2y^2 = 2$.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen final – 26 de junio de 2003
2ª Parte – Duración: de 11:15 a 13:15

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. **a)** Probar que la ecuación

$$3x = e^x$$

tiene exactamente dos soluciones reales. *8 puntos*

b) Estudiar y representar gráficamente la función

$$f(x) = 3x - e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$ *7 puntos*

2.- **a)** Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^3 - z^3 + 3x = 3 \\ y^2 + z^2 + 2x = 4 \end{cases}$$

define funciones implícitas $y = y(x)$ y $z = z(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $x_0 = 1$, con $y(1) = 1$ y $z(1) = 1$. *5 puntos*

b) Hallar el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$. *5 puntos*

3.- Sea

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ 2z \leq 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 1 - x^2 - y^2\}.$$

Calcular

$$\iiint_V x\, y\, dx\, dy\, dz.$$ *15 puntos*

4.- Sea S la porción del plano de ecuación $x + y + z = 1$ que es interior al cilindro de ecuación $x^2 + z^2 = 1$, y sea

$$I = \int_S (0, z, 0) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

a) Tranformar I en una integral curvilínea. *8 puntos*

b) Calcular I. *7 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen extraordinario – 3 de septiembre de 2003
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- Determinar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, se tiene que

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| \leq 1.$$

2.- Obtener el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{1+\cos(x)}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

3.- Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función f dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,y\ \mathrm{sen}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4.- Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5.- Demostrar que la ecuación

$$xyz - z = \mathrm{sen}(xz)$$

define una función implícita $z = z(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$.

6.- Hallar la expresión de la función $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, continua en $[1,\infty)$ y tal que

$$\int_1^{x^2} f(t)\,dt = \mathrm{sen}(x), \qquad x \geq 1.$$

7.- Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{tg}(x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

8.- Sea γ el borde del triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(2,0)$. Calcular

$$\int_\gamma (2xy + \cos(x), x^2 + 2x - \mathrm{sen}(y))d\boldsymbol{r}.$$

9.- Sabiendo que el área de la superficie que encierra una elipse de semiejes a y b es πab, hallar el volumen del cono elíptico recto cuya base es la elipse de semiejes 2 y 1, y cuya altura es 3.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
Examen extraordinario – 3 de septiembre de 2003
2ª Parte – Duración: de 11:15 a 13:30

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas***, debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre***, en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

1. Sea $f\colon(-\infty,\dfrac{3\pi}{2})\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} a+bx+cx^2 & \text{si } x\le 0;\\ \cos(x) & \text{si } x\in(0,\dfrac{3\pi}{2}).\end{cases}$$

i) Determinar condiciones sobre a, b y c que aseguren que f es derivable en su dominio. *4 puntos*

ii) Bajo las condiciones determinadas en i), discutir si f presenta un extremo relativo en el punto $x_0=0$. *5 puntos*

iii) Supongamos en lo sucesivo que $a=1$, $b=0$ y $c=-1$. Hágase un esbozo de la gráfica de f. *3 puntos*

iv) Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$ prefijado, determinar razonadamente el número de soluciones de la ecuación $f(x)=\alpha$. *6 puntos*

2.- Hallar el punto P, situado en el primer cuadrante y perteneciente a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$, tal que la recta tangente a la circunferencia en P forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. *12 puntos*

3.- Hallar el área de los dos recintos en que la parábola de ecuación $y^2=2x$ divide el círculo limitado por la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=8$. *12 puntos*

4.- Sea

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\ge 1,\ z\le 4,\ z\ge x^2+y^2\}.$$

Si S es la superficie frontera de V orientada según la normal exterior, calcular

$$\int_S (xy^2,x^2y,z)\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$ *13 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Examen parcial – 26 de enero de 2004
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones de las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. Cada cuestión vale* **5 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- Hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x-1| < |x-3|$.

2.- Resolver la ecuación $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$.

3.- Hallar los valores de las constantes reales α y β para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha + \operatorname{sen}(x)}{2 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ \beta & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

4.- Calcular $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\big(\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(x)\big)^3}{x \log(1+x) - x^2}$.

5.- Hallar en qué puntos de la curva $y = x^3 + 3x^2 - x$ la recta tangente a la misma es paralela a la recta $4x + y = 0$.

6.- Sean $a, b > 0$. Demostrar que $\log(a+b) - \log(a) < \dfrac{b}{a}$.

7.- Si $f(x,y) = x^3 + 2y^2 + xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, hallar la derivada direccional de f en el punto $(1,0)$ según el vector $(2,1)$.

8.- Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ para la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{y} \operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0. \end{cases}$$

9.- Probar que la ecuación $x^3 + x^2y - 2y^3 + 2 = 0$ define y como función implícita de x de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $x = 0$, con $y(0) = 1$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto $x = 0$.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Examen parcial – 26 de enero de 2004
2ª Parte — Duración: de 11:15 a 13:15

Instrucciones: *Las soluciones deben entregarse escritas con tinta,* **cada problema en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*

1. Sea $f(x) = x^5 + 3x + a$, donde a es un parámetro real.
i) Hallar el número de soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. *8 puntos*
ii) Determinar para qué valores de a la ecuación anterior tiene alguna solución en el intervalo $[0, 1]$. *5 puntos*

2.- Hallar un punto (x, y), situado sobre el arco de la parábola $y = 6x - x^2$ contenido en el semiplano superior, de forma que el triángulo de vértices $(0, 0)$, (x, y) y $(x, 0)$ tenga área máxima. *14 puntos*

3.- Estudiar, en función de $p \in \mathbb{R}$, la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{(x^2+y^2)^p} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$ *14 puntos*

4.- Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudiar los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$ *14 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Soluciones del examen parcial de 26 de enero de 2004

CUESTIONES

1.- Se deben distinguir los casos siguientes:

a) Si $x < 1$, la ecuación se escribe:

$$1 - x < 3 - x, \qquad \text{es decir,} \qquad 1 < 3,$$

desigualdad obviamente cierta.

b) Si $1 \leq x \leq 3$, queda

$$x - 1 < 3 - x, \qquad \text{es decir,} \qquad x < 2.$$

c) Si $x > 3$, la ecuación se reduce a

$$x - 1 < x - 3, \qquad \text{y ha de ser} \qquad -1 < -3,$$

lo que no es cierto.

Por lo tanto, la solución de la inecuación es el conjunto $(-\infty, 2)$. Obsérvese que esto se deduce inmediatamente si se cae en la cuenta de que la inecuación pide hallar los puntos que distan del punto 1 menos de lo que distan del punto 3.

2.- La fórmula clásica da la solución:

$$z = \frac{-(1-3i) \pm \sqrt{(1-3i)^2 - 4(-4-3i)}}{2} = \frac{-1+3i \pm \sqrt{8+6i}}{2}.$$

Si se pone $(a+bi)^2 = 8 + 6i$, es fácil obtener que $a + bi = \pm(3+i)$, con lo que las soluciones son

$$z_1 = \frac{-1+3i+3+i}{2} = 1 + 2i \qquad \text{y} \qquad z_2 = \frac{-1+3i-(3+i)}{2} = -2 + i.$$

3.- Para cualquier valor de los parámetros, la continuidad de f en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se deduce de las propiedades elementales relativas a las operaciones con funciones continuas. Teniendo en cuenta que $\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$ y que $\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$, es inmediato que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{\alpha}{2},$$

por lo que f es continua en 0 sólo si $\alpha = \beta = 0$.

4.- A partir de la tabla de desarrollos de Taylor es inmediato que

$$\operatorname{sen}(2x) = 2x + x\varepsilon_1(x), \qquad \operatorname{sen}(x) = x + x\varepsilon_2(x), \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x),$$

con $\lim_{x \to 0} \varepsilon_j(x) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\big(\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(x)\big)^3}{x\log(1+x) - x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\big(2x + x\varepsilon_1(x) - (x + x\varepsilon_2(x))\big)^3}{x\big(x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)\big) - x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^3\varepsilon_4(x)}{-x^3/2 + x^3\varepsilon_3(x)} = -2,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\lim_{x \to 0} \varepsilon_4(x) = 0$.

5.- La pendiente de la recta dada es -4, por lo que, en virtud de la interpretación geométrica de la derivada, ha de ser $y'(x) = -4$, de donde $3x^2 + 6x - 1 = -4$, y resulta que $x = -1$.

6.- Basta aplicar el teorema de los incrementos finitos a la función $f(x) = \log(x)$ en el intervalo $[a, a+b]$, en el que f es continua y derivable, para deducir que existe $c \in (a, a+b)$ tal que

$$\log(a+b) - \log(a) = b\frac{1}{c};$$

como $c > a$, la conclusión es inmediata.

7.- La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica. En ese caso,

$$D_{(2,1)}f(1,0) = f'(1,0)(2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7.$$

8.- La expresión que define f sugiere calcular el límite siguiendo las curvas de ecuación $y = kx^3$, con $k \neq 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=kx^3}} f(x,y) = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(k).$$

Puesto que el valor obtenido varía con la curva escogida, no existe el límite pedido.

9.- La función $F(x,y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, $F(0,1) = 0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,1) = -6 \neq 0$. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita, que asegura la existencia de una función $y = y(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno U de 0, con $y(0) = 1$, tal que

$$x^3 + x^2y(x) - 2\big(y(x)\big)^3 + 2 = 0, \qquad x \in U.$$

Si derivamos respecto de x, se tiene que

$$3x^2 + 2xy(x) + x^2y'(x) - 6\big(y(x)\big)^2y'(x) = 0, \qquad x \in U,$$

y evaluando en $x = 0$, se deduce que $y'(0) = 0$. Así, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = y(x)$ en el punto $x = 0$ es

$$y - 1 = y'(0)(x - 0) = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad y = 1.$$

PROBLEMAS

1.- i) Puesto que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, en virtud de las correspondientes definiciones de límite podemos garantizar que existen $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ tales que $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) > 0$. Siendo f continua en $[x_1, x_2]$, el teorema de Bolzano asegura que existe un punto $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = 0$, con lo que la ecuación dada admite al menos una solución real.

Observemos que $f'(x) = 5x^4 + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que asegura el crecimiento estricto de f y su inyectividad. Se puede afirmar entonces que la ecuación tiene exactamente una solución.

ii) Dado el crecimiento de f, la función se anulará en $[0,1]$ si, y sólo si, $f(0) \leq 0$ y $f(1) \geq 0$, es decir,

$$a \leq 0 \qquad \text{y} \qquad 4 + a \geq 0.$$

Por lo tanto, ha de ser $a \in [-4, 0]$.

2.- Es sencillo comprobar que los puntos de la parábola situados en el semiplano superior corresponden a valores de x comprendidos entre 0 y 6. Como el lado de extremos $(0,0)$ y $(x,0)$, horizontal, es perpendicular al de extremos $(x,0)$ y (x,y), vertical, el triángulo dado es rectángulo, su base mide x y su altura y, de modo que su área es $A = \dfrac{xy}{2}$. Ahora bien, como el punto (x,y) está situado sobre la parábola, se puede poner $y = 6x - x^2$, con lo que

$$A = \frac{x(6x - x^2)}{2} = 3x^2 - \frac{1}{2}x^3, \qquad x \in [0,6].$$

La función A es de clase $\mathcal{C}^\infty$, y sus puntos críticos son las soluciones de la ecuación $A'(x) = 0$, es decir,

$$6x - \frac{3}{2}x^2 = 0, \qquad \text{de donde} \qquad x = 0 \ \text{ o } \ x = 4.$$

Es inmediato ver que el punto 0 no es la solución, pues el área se anula, mientras que en $x = 4$ sí se alcanza el máximo buscado, pues $A''(4) = -6 < 0$. El punto de la parábola es el $(4, y(4)) = (4,8)$.

3.- En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la función dada es operación de funciones diferenciables que conserva dicho carácter (los cocientes o potencias que aparecen no ofrecen problemas en dicho conjunto). Para el estudio del punto $(0,0)$, se puede (aunque no es necesario) comenzar por la continuidad. Pasando a coordenadas polares, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{\rho^2} - 1}{\rho^{2p}}.$$

Teniendo en cuenta la equivalencia $e^h - 1 \sim h$ cuando $h \to 0$, el límite queda

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho^{2p}} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1; \\ 1 & \text{si } p = 1; \\ +\infty & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, como $f(0,0) = 0$, la función sólo es continua en $(0,0)$ si $p < 1$, y para el resto de valores de p la función no es diferenciable en $(0,0)$.

Pasamos al cálculo de las derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2} - 1}{h^{2p+1}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h^{2p+1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1/2; \\ 1 & \text{si } p = 1/2; \\ +\infty & \text{si } p > 1/2. \end{cases}$$

Dada la simetría con respecto a x e y en la definición de f, el resultado para la derivada parcial primera respecto de y es idéntico. Por lo tanto, f no será diferenciable si $p > 1/2$. Estudiemos los casos pendientes:

a) $p = 1/2$: si ponemos

$$f(0+h, 0+k) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\cdot \varepsilon(h,k), \qquad (1)$$

se obtiene que

$$\varepsilon(h,k) = \frac{\dfrac{e^{h^2+k^2} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}} - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Estudiamos su límite pasando a coordenadas polares:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\dfrac{e^{\rho^2} - 1}{\rho} - \rho\cos(\theta) - \rho\,\mathrm{sen}(\theta)}{\rho} = 1 - \cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta).$$

Puesto que el límite depende de la dirección según la cual el punto se aproxime al origen, f no es diferenciable en $(0,0)$.

b) $p < 1/2$: poniendo también (1), en este caso

$$\varepsilon(h,k) = \frac{\dfrac{e^{h^2+k^2}-1}{(h^2+k^2)^p}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{e^{h^2+k^2}-1}{(h^2+k^2)^{p+1/2}},$$

y pasando a coordenadas polares:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{\rho^2}-1}{\rho^{2p+1}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho^{2p+1}} = 0.$$

Así, f es diferenciable en $(0,0)$ en este caso.

4.- La función es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}^2$, por lo que comenzamos determinando sus puntos críticos, es decir, aquellos en los que la diferencial de f es nula:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3ay = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3ax = 0. \end{cases}$$

Distinguimos dos casos:
Caso 1: Si $a \neq 0$, por la segunda ecuación ha de ser $x = y^2/a$, lo que llevado a la primera obliga a que

$$\left(\frac{y^2}{a}\right)^2 - ay = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad y(y^3 - a^3) = 0.$$

Entonces, puede ser $y = 0$, en cuyo caso $x = 0$, o $y = a$, y entonces $x = a$. Los puntos críticos son $(0,0)$ y (a,a).
Caso 2: Si $a = 0$, el único punto crítico es $(0,0)$.

La matriz hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{pmatrix}.$$

Caso 1, punto $(0,0)$: la hessiana es

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{pmatrix},$$

de determinante $-9a^2 < 0$, con lo que la forma cuadrática asociada es indefinida y el punto es de silla.
Caso 1, punto (a,a): la hessiana es

$$Hf(a,a) = \begin{pmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{pmatrix},$$

para la que $\Delta_1 = 6a$ y $\Delta_2 = 27a^2 > 0$. Por lo tanto, si $a > 0$ la forma es definida positiva y el punto un mínimo relativo; si $a < 0$ la forma es definida negativa y el punto es un máximo relativo.
Caso 2, punto $(0,0)$: la hessiana es nula, y es necesario un estudio de la función, que en este caso es $f(x,y) = x^3 + y^3$. Basta observar que, si $h > 0$, se tiene que

$$f(-h,0) = -h^3 < 0 = f(0,0) < h^3 = f(h,0),$$

con lo que $(0,0)$ es un punto de silla.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen final – 10 de junio de 2004
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **6 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Probar que la función f dada por

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

es impar.

2.- Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^{5/2}}\,dx.$

3.- Cambiar el orden de integración en la integral iterada

$$\int_0^1 dy \int_y^{2y} dx.$$

4.- Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x^2+y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. Estudiar la convergencia de

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$$

5.- Dar una expresión paramétrica de la superficie formada por los puntos (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$z^2 = x^2+y^2, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad 1 < z < 2.$$

6.- Calcular la longitud del arco de la curva de ecuación $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ comprendido entre $x = 1$ y $x = 3$.

7.- Sea $\boldsymbol{\gamma}$ la elipse de ecuación $4x^2+y^2-8x-4y+4 = 0$. Calcular $\displaystyle\int_\gamma (4xy, 2x^2)\,d\boldsymbol{r}$.

8.- Sea $\boldsymbol{\gamma}$ el borde del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(2,2)$, con la orientación inducida por el triángulo. Calcular

$$\int_\gamma (e^x+y, y^3)\,d\boldsymbol{r}.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen final – 10 de junio de 2004
2ª Parte – Duración: de 11:10 a 13:00

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 1,\ x > y > x - e^{-x}\}$.
a) Probar que

$$\iint_A y\, e^{x/2}\, dx\, dy$$

converge. *10 puntos*

b) Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in A,\ 0 < z < e^{x/4}\}$. Estudiar la convergencia de

$$\iiint_V \frac{yz \operatorname{sen}(x)}{x}\, dx\, dy\, dz.$$

7 puntos

2.- Calcular el volumen de

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq z \leq 2,\ z \geq x^2 + y^2\}.$$

15 puntos

3.- Sea $\boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo dado por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + y, x + 2y, x - 3z).$$

a) Comprobar que existe un campo $\boldsymbol{G}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$. Hallar un campo $\boldsymbol{G}$ con esa propiedad y de la forma

$$\boldsymbol{G}(x, y, z) = (0, G_2(x, y, z), G_3(x, y, z)).$$

8 puntos

b) Consideremos la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z > 1\},$$

orientada según la normal con tercera componente positiva. Calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S. *12 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen final – 10 de junio de 2004
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **6 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Dada la ecuación

$$z^3 - (3-i)z^2 + 3z - (3+i) = 0,$$

comprobar que tiene una raíz que es imaginaria pura y determinarla.

2.- Hallar el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \frac{\log(1+2x)}{1+x}, \qquad x \in (-1/2, \infty).$$

3.- Estudiar la existencia de límite en $(0,0)$ para la función f dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+y} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x+y}\right) & \text{si } x+y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

4.- Probar que la ecuación

$$x^3 + y^3 + y + \cos(xy) = 1$$

define una función implícita $y = y(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de $x = 0$, con $y(0) = 0$.

5.- Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^{5/2}}\,dx.$

6.- Cambiar el orden de integración en la integral iterada

$$\int_0^1 dy \int_y^{2y} dx.$$

7.- Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x^2+y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. Estudiar la convergencia de

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$$

8.- Sea $\boldsymbol{\gamma}$ el borde del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(2,2)$, con la orientación inducida por el triángulo. Calcular

$$\int_\gamma (e^x + y, y^3)\,d\boldsymbol{r}.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen final – 10 de junio de 2004
2ª Parte – Duración: de 11:10 a 13:00

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas***, debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre***, en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. **a)** Sea $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x)=\frac{1}{x}+\log(x).$$

Estudiar su monotonía, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica. *9 puntos*

b) Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$, determinar el número de soluciones positivas de la ecuación

$$(x+1)\log(x)=\alpha.$$ *8 puntos*

2.- Estudiar, en función del parámetro real a, los extremos relativos de

$$f(x,y)=ax^2+12y^2+ax^3y,\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$ *15 puntos*

Indicación: Se ha de tener en cuenta si $a>0$, $a<0$ o $a=0$.

3.- Sea $\boldsymbol{F}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el campo dado por

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x+y,x+2y,x-3z).$$

a) Comprobar que existe un campo $\boldsymbol{G}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}$. Hallar un campo $\boldsymbol{G}$ con esa propiedad y de la forma

$$\boldsymbol{G}(x,y,z)=(0,G_2(x,y,z),G_3(x,y,z)).$$ *8 puntos*

b) Consideremos la superficie

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2=4,\ z>1\},$$

orientada según la normal con tercera componente positiva. Calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S. *12 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen final – 10 de junio de 2004

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

CUESTIONES

1.- Se tiene que $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^4}$. Haciendo el cambio de variable $t = -u$ resulta que

$$f(-x) = \int_0^x \frac{-du}{1+(-u)^4} = -\int_0^x \frac{du}{1+u^4} = -f(x),$$

como se quería demostrar.

2.- La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^{5/2}}$ es continua en $(0,\infty)$, luego localmente integrable, y la integral impropia tiene sentido. Dado que el integrando no está acotado en ningún entorno de 0, y que el intervalo de integración no es acotado, descomponemos la integral así:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

El integrando del primer sumando mantiene signo constante en (0,1), así que pueden aplicarse los teoremas de comparación. Como $\operatorname{sen}(x^2)$ es equivalente a x^2 cuando x tiende a cero, $f(x)$ es equivalente a $1/x^{1/2}$, y como $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ converge, también lo hace el primer sumando.

Para el segundo, notar que no hay conservación del signo, pero que la integral es absolutamente convergente, luego convergente. En definitiva, la propuesta converge.

3.- Basta poner

$$\int_0^1 dy \int_y^{2y} dx = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{\varphi(x)} dy,$$

donde

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

4.- La función $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en el abierto D, luego localmente integrable en D, por lo que tiene sentido la integral impropia. El teorema del cambio de variable, pasando a polares, y la aplicación del criterio de Tonelli nos dan que la integral es convergente, ya que la integración iterada tras el cambio de variable se reduce a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 d\rho = \frac{\pi}{2}$.

5.- Una parametrización es la dada por $\boldsymbol{\varphi}\colon (1,2) \times \big(0,\pi/2\big)$ definida mediante

$$\boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta), \rho\big).$$

6.- La longitud pedida viene dada por

$$\int_1^3 \sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_{x=1}^{x=3} = \frac{4}{3}(4-\sqrt{2}\,).$$

7.- Se comprueba inmediatamente que el campo dado es conservativo, por lo que la circulación a lo largo de una curva cerrada como es la elipse vale 0.

8.- La fórmula de Riemann-Green nos dice que la integral propuesta es igual a la siguiente integral doble:

$$\iint_D \Big(\frac{\partial(y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x + y)}{\partial y}\Big)\, dx\, dy = -\iint_D dx\, dy,$$

donde D es el interior del triángulo. Como la última integral doble representa el área del triángulo, que vale 1 dado que tiene base igual a 2 y altura 1, la integral propuesta vale -1.

PROBLEMAS

1.a) La función $f(x,y) = y\, e^{x/2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, es continua en A, y por lo tanto integrable en cada compacto medible contenido en A (es decir, f es localmente integrable en A). Así, la integral impropia tiene sentido. Para probar su convergencia aplicaremos el criterio de Tonelli, tras comprobar que una integral iterada de $|f|$ (que coincide con f, por ser ésta positiva) converge. En concreto,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty dx \int_{x-e^{-x}}^{x} y\, e^{x/2}\, dy =& \int_1^\infty \frac{1}{2} e^{x/2}\, y^2 \Big|_{x-e^{-x}}^{x} dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{x/2}\big(2xe^{-x} - e^{-2x}\big)\, dx \\ =& \int_1^\infty xe^{-x/2}\, dx - \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-3x/2}\, dx,\end{aligned}$$

siendo las dos últimas integrales convergentes (la segunda es inmediata, y la primera está tabulada o se puede calcular integrando por partes), con lo que se concluye.

b) La función $g(x,y,z) = \dfrac{yz \operatorname{sen}(x)}{x}$, $(x,y,z) \in V$, es continua en V, y por lo tanto localmente integrable en V, y la integral considerada tiene sentido. Puesto que g no mantiene signo constante en V, conviene acotar su valor absoluto por

$$|g(x,y,z)| = \frac{yz|\operatorname{sen}(x)|}{x} \le yz = h(x,y,z),$$

donde se ha tenido en cuenta que en los puntos de V se tiene que $x > 1$, $y > 0$ y $z > 0$, junto con la acotación $|\operatorname{sen}(x)| \le 1$. De acuerdo con el criterio de comparación, si la integral impropia de h en V converge, lo hará la de g. Para estudiar la primera de ellas, escribimos una integral iterada de h como

$$\iint_A dx\, dy \int_0^{e^{x/4}} yz\, dz = \frac{1}{2}\iint_A y\, e^{x/2}\, dx\, dy,$$

cuya convergencia ha sido obtenida en el primer apartado. Por lo tanto, el criterio de Tonelli garantiza que la integral impropia de h converge.

2.- Es sencillo comprobar que el conjunto V es compacto (cerrado y acotado) y medible (por ser su frontera unión de un número finito de superficies, de medida nula en $\mathbb{R}^3$). Así, tiene sentido calcular su volumen como

$$\text{Volumen}(V) = \iiint_V 1\, dx\, dy\, dz.$$

Ahora bien, el cálculo de esta intergal será más sencillo si realizamos un cambio a coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho\cos(\theta), \qquad y = \rho\operatorname{sen}(\theta), \qquad z = z,$$

para el que el determinante jacobiano es ρ, positivo en todo punto. Las desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$ se traducen en $\cos(\theta) \geq 0$, $\operatorname{sen}(\theta) \geq 0$, lo que se verifica cuando $\theta \in [0, \pi/2]$. Por otra parte, $z \geq x^2 + y^2$ se escribe ahora como $z \geq \rho^2$, con lo que el conjunto transformado de V por el cambio de variables será (salvo conjuntos de medida nula)

$$U = \{ (\rho, \theta, z) : \theta \in [0, \pi/2],\ 1 \leq z \leq 2,\ 0 < \rho \leq \sqrt{z} \}.$$

Entonces, el teorema del cambio de variables garantiza que

$$\iiint_V 1\, dx\, dy\, dz = \iiint_U \rho\, d\rho\, d\theta\, dz.$$

Aplicando el teorema de Fubini a la última integral, se tiene que

$$\begin{aligned}
\iiint_U \rho\, d\rho\, d\theta\, dz &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{z}} \rho\, d\rho \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 z\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{z^2}{2}\Big|_1^2 d\theta = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Otra forma de resolver el problema consiste en aplicar el método de secciones (caso particular del teorema de Fubini), pues los cortes de V a z fija, es decir, por planos horizontales, son sectores circulares de ángulo central $\pi/2$ y de radio $\sqrt{z}$.

3.a) El campo $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3})$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, abierto convexo, y es inmediato que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 2 - 3 = 0, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

por lo que existe un campo $\boldsymbol{G}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$. Si $\boldsymbol{G}$ es de la forma $\boldsymbol{G}(x, y, z) = (0, G_2(x, y, z), G_3(x, y, z))$, la igualdad anterior se traduce en el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= x + y, \\
-\frac{\partial G_3}{\partial x} &= x + 2y, \\
\frac{\partial G_2}{\partial x} &= x - 3z.
\end{aligned}$$

De la segunda y tercera ecuaciones se obtiene, respectivamente, que

$$G_3(x, y, z) = -\frac{x^2}{2} - 2xy + C_3(y, z), \qquad G_2(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - 3xz + C_2(y, z);$$

podemos tomar, por ejemplo, $C_2 \equiv 0$, y hallar C_3 imponiendo la primera ecuación:

$$-2x + \frac{\partial C_3}{\partial y} - (-3x) = x + y \Rightarrow C_3(y, z) = \frac{y^2}{2} + D_3(z).$$

Eligiendo de nuevo $D_3(z) \equiv 0$, se obtiene el campo

$$G(x, y, z) = (0, \frac{x^2}{2} - 3xz, -\frac{x^2}{2} - 2xy + \frac{y^2}{2}).$$

También se podía haber tomado $C_3 \equiv 0$, en cuyo caso una solución sería

$$G(x, y, z) = (0, \frac{x^2}{2} - 3xz - yz, -\frac{x^2}{2} - 2xy).$$

b) La superficie S es un casquete esférico, y su borde $\boldsymbol{\gamma}$ viene dado por la curva de ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad z = 1,$$

que, tras sustituir z por 1 en la primera de ellas, es la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 3$ a altura 1. Por lo tanto, es sencillo parametrizar $\boldsymbol{\gamma}$ como

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\sqrt{3}\cos(t), \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(t), 1), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

parametrización que define en $\boldsymbol{\gamma}$ precisamente la orientación inducida por S cuando en S se toma la normal con tercera componente positiva. Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Stokes para escribir, de acuerdo con la primera solución del apartado anterior,

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_\gamma G\,d\boldsymbol{r}\\ =\int_0^{2\pi}(0, \frac{3}{2}\cos^2(t) - 3\sqrt{3}\cos(t), G_3(\boldsymbol{\gamma}(t)))\cdot(-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(t), \sqrt{3}\cos(t), 0)\,dt\\ = \int_0^{2\pi}\big(\frac{3}{2}\sqrt{3}\cos^3(t) - 9\cos^2(t)\big)\,dt,\end{aligned}$$

integral trigonométrica estándar cuyo valor es -9π.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

CUESTIONES

1.- 1.- Si la ecuación $z^3 - (3-i)z^2 + 3z - (3+i) = 0$ tiene una raíz imaginaria pura, será de la forma $z = ai$, con a real. Sustituyendo z por ai en la ecuación resulta

$$-a^3 i + 3a^2 - a^2 i + 3ai - 3 - i = 0.$$

Igualando a cero la parte real y la imaginaria del primer miembro de la relación anterior nos quedan las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 3a^2 - 3 = 0,\\ a^3 + a^2 - 3a + 1 = 0.\end{aligned}$$

De la primera se deduce que $a = \pm 1$, pero de los dos valores obtenidos el único que verifica la segunda ecuación es $a = 1$. Por tanto la solución es $z = i$.

2.- El desarrollo de $\log(1+2x)$ es

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3),$$

y el de $1/(1+x)$ es

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

Multiplicando ambos y despreciando los términos de grado superior a tres resulta el desarrollo pedido:

$$2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 + o(x^3).$$

3.- Si tendemos a $(0,0)$ según la recta de ecuación $y = mx$, con m distinto de -1, el límite resulta ser $\mathrm{arctg}\big(m/(1+m)\big)/(1+m)$. Al depender de m, no existe límite en el punto.

4.- La función $F(x,y) = x^3 + y^3 + y + \cos(xy) - 1$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, y $F(0,0) = 0$. Además, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$, por lo que se puede aplicar el teorema de la función implícita y concluir que existe $y = y(x)$ con las propiedades indicadas en el enunciado.

5, 6, 7, 8.- Coinciden con las del examen del segundo parcial.

PROBLEMAS

1.a) La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0,\infty)$, y

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

que se anula sólo si $x = 1$, mientras que $f'(x) > 0$ si $x > 1$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (0,1)$. Así, f crece en $(1,\infty)$, decrece en $(0,1)$ y presenta un mínimo relativo (y absoluto) en $x = 1$, donde $f(1) = 1$. Por otra parte,

$$f''(x) = \frac{2-x}{x^3},$$

y se deduce inmediatamente que f es convexa en $(2,\infty)$, cóncava en $(0,2)$ y presenta un punto de inflexión en $x = 2$. Por último, puesto que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

se concluye, respectivamente, que la gráfica de f presenta una asíntota vertical en la recta $x = 0$, y que no presenta asíntotas horizontales ni oblicuas.

b) La función g dada por $g(x) = (x+1)\log(x)$, $x > 0$, es continua en su dominio y tal que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Por lo tanto, se puede asegurar, aplicando la definición de límite adecuadamente, que g toma todos los valores reales al menos una vez. Pero, además,

$$g'(x) = \log(x) + \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + \log(x) + 1 = f(x) + 1, \qquad x > 0,$$

de modo que, de acuerdo con el estudio realizado en el apartado anterior, para todo $x > 0$ se tiene que $g'(x) \geq 1 + 1 = 2 > 0$, y por lo tanto g es inyectiva y toma cada valor una sola vez. En conclusión, la ecuación tiene exactamente una solución en $(0,\infty)$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.- Derivando la función respecto de x y de y, e igualando las derivadas parciales a cero, se obtiene el sistema:

$$2ax + 3ax^2y = 0, \qquad 24y + ax^3 = 0.$$

Despejando y en la segunda ecuación y llevando su valor a la primera resulta

$$2ax + 3ax^2\left(\frac{-ax^3}{24}\right) = 2ax - \frac{a^2}{8}x^5 = 0.$$

Una solución es $x = 0$, y, dependiendo del valor de a, pueden darse estos casos:

i) $a > 0$: Existen otras dos soluciones, y las soluciones del sistema resultan ser $(0,0)$, $\left(\frac{2}{\sqrt[4]{a}}, -\frac{\sqrt[4]{a}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{a}}, \frac{\sqrt[4]{a}}{3}\right)$.

ii) $a < 0$: La única solución es $(0,0)$.

iii) $a = 0$: Entonces todos los puntos de la forma $(x,0)$ son soluciones del sistema, y corresponden a mínimos de la función, ya que ésta se reduce a $f(x,y) = 12y^2$.

Hallando la matriz hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2a + 6axy & 3ax^2 \\ 3ax^2 & 24 \end{pmatrix},$$

y estudiando la misma en cada uno de los puntos obtenidos como soluciones del sistema anterior para $a > 0$ y para $a < 0$ resulta que:

i) Si $a > 0$, en el punto $(0,0)$ la matriz hessiana es definida positiva, y se tiene un mínimo relativo. En los otros dos puntos la matriz hessiana tiene determinante negativo, luego estamos ante puntos de silla.

ii) Si $a < 0$, en el punto $(0,0)$ el determinante de la hessiana es igual a $48a < 0$, luego es un punto de silla.

3.- Es el mismo que para el examen del segundo parcial.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen extraordinario – 3 de septiembre de 2004
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:50

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre***, en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **6 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- Expresar en forma binómica el número complejo

$$z = \big(\cos(\pi/10) + i\ \mathrm{sen}(\pi/10)\big)^{15}.$$

2.- Probar que para todo $x \geq 0$ se tiene que $e^x - 1 \leq x\, e^x$.

3.- Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$. ¿Existe el polinomio de Taylor de f de orden 3 en $x = 0$?

4.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log(1+2^x)\, \log\big(1+\frac{3}{x}\big)$.

5.- Sea f una función real de clase $\mathcal{C}^1$ en $(0,\infty)$ y tal que

$$f'(x) + \big(f(x)\big)^2 = 0, \qquad x > 0.$$

Se define la función $F\colon (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = f(x\cdot y)$. Calcular $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ en función de f.

6.- Si $D = (0,1)\times(0,1)$, calcular $\displaystyle\iint_D \max(x,y)\, dx\, dy$.

7.- Dada la curva paramétrica $\boldsymbol{\gamma}$ mediante

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, e^t, \cos(\pi\, t)), \qquad t \in [0,1],$$

y dado el campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, calcular $\displaystyle\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$.

8.- Sea S la superficie cuyo soporte es el conjunto

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1,\ -1 < y < 1,\ z = x^2 + y^2\},$$

orientada según la normal con tercera componente positiva. Calcular

$$\int_{\partial S} (x, y, xy)\cdot d\boldsymbol{r},$$

indicando la orientación que se ha dado al borde de S.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen extraordinario – 3 de septiembre de 2004
2ª Parte – Duración: de 11:20 a 13:20

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

1. **a)** Demostrar que la ecuación

$$x\,\mathrm{sen}(x) = 5\cos(x)$$

tiene en el intervalo $[0, \pi/2]$ una única solución, que denominamos x_0. *6 puntos*
b) Probar que la función $g\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^5\cos(x)$, alcanza su máximo absoluto en el intervalo de definición, e indicar (no calcular) en qué punto lo hace. *7 puntos*

2.- Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = x\,y\,e^{-(x^2+y^2)/2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$ *12 puntos*

3.- Sea α un parámetro real, y consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \mathrm{sen}(\alpha\,x) - \alpha\,x\,\cos(x).$$

a) Obtener el desarrollo de Taylor de orden 5 de f en $x = 0$. *5 puntos*
b) Estudiar, en función del valor de α, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^4}\,dx.$$ *9 puntos*

4.- Calcular el volumen de la región V de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ z \geq 0,\ y^2 + z^2 \leq 4,\ x + z \leq 3\}.$$ *13 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Examen parcial – 8 de febrero de 2005
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:50

Instrucciones: *Las soluciones de las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. Cada cuestión vale* **6 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- Hallar los $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, tales que $\dfrac{2x-3}{x-2} < x$.

2.- Determinar, en función de $a \in \mathbb{R}$, el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\big(\operatorname{tg}(x)\big)^{a}}{\big(1-\cos(2x)\big)^{2a+1}}$.

3.- Hallar los valores de las constantes reales a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x + a & \text{si } x \leq 0, \\ 6\,b\,\mathrm{sen}(x) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$.

4.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \big(\log^2(x+1) - \log^2(x)\big)$.

5.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \log\big(1 + \mathrm{sen}(x)\big), \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

6.- Estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

7.- Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, y definamos la función $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$F(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $u(x,y) = g(x \cdot y)$ y $v(x,y) = x + y$. Calcular $\dfrac{\partial F}{\partial x}$.

8.- Demostrar que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = (x + y, x^2 + 2y + 1), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

admite inversa g de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $(0,0)$. Calcular el jacobiano de g en $(0,1)$.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Examen parcial – 8 de febrero de 2005
2ª Parte — Duración: de 11:15 a 13:15

Instrucciones: *Las soluciones deben entregarse escritas con tinta,* **cada problema en hojas separadas***, debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden***, del alumno.*

1. Sea $f(x) = \dfrac{3+4x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Se pide:

i) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y asíntotas de f. *8 puntos*
ii) Demostrar que f está acotada en $\mathbb{R}$ y que alcanza un máximo β y un mínimo α absolutos, cuyos valores se han de determinar. *5 puntos*
iii) Probar que fijado un valor $y_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \neq 0$, existen exactamente dos puntos x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. *6 puntos*

2.- Se considera la función f dada por

$$f(x,y) = x^4 - 3xy + 2y^2 + 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, hallar la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ según el vector $\big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)\big)$. *4 puntos*
ii) Obtener los valores de θ para los cuáles dicha derivada direccional toma el valor máximo. *7 puntos*
iii) Hallar los extremos relativos de la función f. *8 puntos*

3.- Para números x e y reales, se consideran los complejos

$$z = (x^3 - y) + yi, \qquad w = xy^2 + 2yi.$$

i) Hallar qué relación debe existir entre x e y para que el cociente $z/_w$ sea real. *5 puntos*
ii) Probar que la relación obtenida anteriormente define a y como función implícita de x en un entorno de $x = 1$, con $y(1) = 0$. *2 puntos*
iii) Obtener el polinomio de Taylor de orden 2 de la función anterior, $y = y(x)$, en $x = 1$. *7 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)

SOLUCIONES DEL EXAMEN PARCIAL DEL 8 DE FEBRERO DE 2005

CUESTIONES

1.- La inecuación dada es equivalente a las dos siguientes:

$$\begin{cases} 2x - 3 < x(x-2) & \text{si } x > 2; \\ 2x - 3 > x(x-2) & \text{si } x < 2, \end{cases}$$

esto es,

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \quad \text{si } x > 2; \qquad x^2 - 4x + 3 < 0 \quad \text{si } x < 2.$$

Las soluciones de la primera son todos los números reales $x > 3$, mientras que las de la segunda son todos los x que verifican $1 < x < 2$. Por tanto las soluciones de la inecuación propuesta son los números reales que están en el conjunto $(1,2) \cup (3,\infty)$.

2.- Usando infinitésimos equivalentes se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\big(\operatorname{tg}(x)\big)^a}{\big(1-\cos(2x)\big)^{2a+1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{\big((2x)^2/2\big)^{2a+1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^{2a+1}x^{3a+2}}.$$

Si $3a+2 > 0$ el límite anterior es infinito, mientras que es cero si $3a+2 < 0$. Cuando $3a+2 = 0$, es decir, $a = -2/3$, el límite vale $\sqrt[3]{2}$.

3.- La función es derivable en los dos conjuntos abiertos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. El único punto a estudiar es $x = 0$. Para que f sea derivable en dicho punto, es necesario que sea continua en él. Se tiene que

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

luego si $a = 0$ la función es continua en el punto $x = 0$. La derivada por la derecha en $x = 0$ vale $6b$, y por la izquierda 1, por lo que si $6b = 1$ la función resulta derivable en $x = 0$.

4.- Aplicando el teorema de los incrementos finitos a la función $f(t) = \log^2(t)$ en el intervalo $[x, x+1]$ (lo que es posible siempre que $x > 0$) llegamos a que

$$\log^2(x+1) - \log^2(x) = (x+1-x)\frac{2\log(c_x)}{c_x} = \frac{2\log(c_x)}{c_x},$$

donde el punto c_x verifica que $x < c_x < x+1$. Cuando x tiende a infinito, c_x también tiende a infinito, y como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2\log(t)}{t} = 0,$$

se concluye que el límite propuesto es 0.

5.- El polinomio de Taylor de orden 4 para la función f en el punto 0 puede obtenerse calculando las derivadas sucesivas hasta el orden 4 y evaluándolas en 0, o bien sustituyendo la x en el polinomio de Taylor de orden 4 de $g(x) = \log(1+x)$ en 0 por el polinomio de Taylor de orden 4 de $h(x) = \operatorname{sen}(x)$ en 0, y desechando los términos de grado superior a 4. Si se opta por el primer método conviene darse cuenta de que, al llegar a la derivada segunda,

$$f''(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\big(1+\operatorname{sen}(x)\big) - \cos^2(x)}{\big(1+\operatorname{sen}(x)\big)^2} = -\frac{\operatorname{sen}(x)+1}{\big(1+\operatorname{sen}(x)\big)^2},$$

se puede simplificar dividiendo numerador y denominador por $\big(1+\operatorname{sen}(x)\big)$, lo que facilitará el cálculo de las derivadas tercera y cuarta. El polinomio pedido resulta ser

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}.$$

6.- No es continua en $(0,0)$, ya que si se tiende a dicho punto a lo largo de las parábolas $y=mx^2$ (con $m\neq 0$) el valor del límite resulta ser $\dfrac{m}{1+m^2}$, dependiente de m, luego no hay límite en $(0,0)$. De otro modo, basta observar que el límite siguiendo una cualquiera de estas parábolas no coincide con $f(0,0)=0$.

7.- De acuerdo con la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\&=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))g'(xy)y+\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)).\end{aligned}$$

8.- El jacobiano de f en (x,y) es

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2x & 2\end{vmatrix}=2-2x,$$

que es distinto de cero en $(0,0)$, donde vale 2. Se puede aplicar por tanto el teorema de la función inversa y concluir que existen un entorno U de $(0,0)$ y un entorno V de $(0,1)=f(0,0)$ tales que f aplica biyectivamente U en V, y por tanto existe la aplicación inversa f^{-1}, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en V por serlo f. El valor del jacobiano de la inversa en $(0,1)$ es el inverso del jacobiano de f en $(0,0)$, es decir, $1/2$.

PROBLEMAS

1.i) La función dada es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, por lo que procedemos al estudio de su derivada:

$$f'(x)=\frac{4-6x-4x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{4(x+2)(x-1/2)}{(1+x^2)^2}.$$

De esta expresión es inmediato que f decrece en $(-\infty,-2)$, crece en $(-2,1/2)$ y decrece en $(1/2,\infty)$, de modo que la función presenta un mínimo relativo en $x=-2$, de valor $f(-2)=-1$, y un máximo relativo en $x=1/2$, de valor $f(1/2)=4$.
Nota: No es necesario recurrir a la segunda derivada para estudiar los puntos críticos, pues se dispone del signo de la derivada primera.

En cuanto a las asíntotas, no habrá verticales por ser f continua en $\mathbb{R}$. Por otra parte,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,$$

con lo que la recta $y=0$ es asíntota horizontal, y no habrá oblicuas.

ii) De la continuidad de f, del estudio de su monotonía y de sus límites en $+\infty$ y $-\infty$, se deduce que f toma en $(-\infty,-2)$ valores entre -1 y 0, en $(-2,1/2)$ valores entre -1 y 4, y en $(1/2,\infty)$ valores entre 0 y 4. De este modo, f está acotada y los extremos relativos determinados anteriormente son de hecho absolutos, siendo el máximo $\beta=4$ y el mínimo $\alpha=-1$.

iii) Sea $y_0\in(-1,4)$, y supongamos que $y_0>0$. Es inmediato que $f(-3/4)=0$, y sabemos ya que $f(1/2)=4$, de modo que la propiedad de Darboux garantiza que existe un punto $x_1\in(-3/4,1/2)$ tal que $f(x_1)=y_0$. La unicidad de x_1 en este intervalo se debe a la monotonía estricta de f en el mismo. Por otra parte, puesto que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, existirá $x_0 > 1/2$ tal que $f(x_0) < y_0$, y de nuevo la propiedad de Darboux y la monotonía estricta garantizan que en el intervalo $(1/2, x_0)$, y de hecho en $(1/2, \infty)$, existe un único x_2 tal que $f(x_2) = y_0$.

Un razonamiento similar permite estudiar el caso $y_0 < 0$.

Nota: Se escribe estricto, no extricto*; este ha sido un error demasiado común.*

2.i) Por ser polinómica, la función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, y en particular diferenciable. Así, se sabe que

$$\begin{aligned} D_{(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta))}f(1,1) &= f'(1,1)\big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)\big)^t = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Big)\big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)\big)^t \\ &= \big(4x^3 - 3y \quad -3x + 4y\big)_{|(1,1)}\big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)\big)^t \\ &= (1\ 1)\big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)\big)^t = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$

ii) Se trata de maximizar la función $g(\theta) = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Para ello, calculamos los puntos críticos:

$$g'(\theta) = -\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta) = 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora, estudiamos la segunda derivada en ellos:

$$g''\big(\frac{\pi}{4} + k\,\pi\big) = -\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)|_{\pi/4+k\,\pi} = (-1)^{k+1}\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, $g''\big(\frac{\pi}{4} + k\,\pi\big) < 0$ para k par, y en los puntos correspondientes g alcanza máximos relativos de valor $\sqrt{2}$.

Por supuesto, se puede advertir la periodicidad de g y razonar en un intervalo de amplitud igual al periodo, 2π.

Nota: La dirección de máximo crecimiento de una función en un punto viene efectivamente dada por la del vector gradiente en ese punto, como se ha indicado en bastantes respuestas; lo que no se ha hecho en general es relacionar este vector con los valores de θ correspondientes, que eran los pedidos en el enunciado.

iii) Los puntos críticos de f, soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 4y = 0, \end{cases}$$

son $P_1(0,0)$, $P_2(3/4, 9/16)$ y $P_3(-3/4, -9/16)$. La matriz hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

por lo que se tiene que:

a) $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, de determinante $\Delta_2 = -9$, lo que garantiza que los autovalores son de signo opuesto y la forma cuadrática asociada es indefinida. En conclusión, P_1 es punto de silla.

b) $Hf(3/4, 9/16) = \begin{pmatrix} 27/4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, para la que Δ_1 y Δ_2 son positivos, de modo que la forma asociada es definida positiva y f presenta en P_2 un mínimo relativo.

c) $Hf(-3/4, -9/16) = Hf(3/4, 9/16)$, con lo que f presenta en P_3 un mínimo relativo.

Nota: En el caso a), el hecho de que Δ_1 sea nulo ha llevado en numerosas respuestas a afirmar que el método de los menores principales no da información, pasando a calcular *los autovalores de la matriz hessiana. Este cálculo no es en absoluto necesario, como se ha indicado en la solución.*

3.i) Basta calcular

$$\frac{z}{w} = \frac{\big((x^3-y)+yi\big)\big(xy^2-2yi\big)}{\big(xy^2+2yi\big)\big(xy^2-2yi\big)} = \frac{x^4y^2-xy^3+2y^2+i(-2x^3y+2y^2+xy^3)}{x^2y^4+4y^2},$$

e imponer que la parte imaginaria sea nula, es decir, que

$$-2x^3y+2y^2+xy^3=0.$$

ii) Sea $F(x,y)=-2x^3y+2y^2+xy^3$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Es obvio que F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, y se tiene que $F(1,0)=0$ y

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -2x^3+4y+3xy^2|_{(1,0)} = -2 \neq 0.$$

El teorema de la función implícita asegura la existencia de un entorno U de $x=1$, un entorno V de $y=0$ y una función $y:U\to V$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U, tal que $y(1)=0$ y

$$F\big(x,y(x)\big) = -2x^3y(x)+2y(x)^2+xy(x)^3=0 \quad \text{para todo } x\in U. \tag{1}$$

iii) Derivando en (1) se obtiene que

$$-6x^2y(x)-2x^3y'(x)+4y(x)y'(x)+y(x)^3+3xy(x)^2y'(x)=0, \quad x\in U, \tag{2}$$

y particularizando para $x=1$, con $y(1)=0$, se deduce que $-2y'(1)=0$, de donde $y'(1)=0$. Derivando ahora en (2),

$$\begin{aligned}&-12xy(x)-6x^2y'(x)-6x^2y'(x)-2x^3y''(x)+4y'(x)^2+4y(x)y''(x)\\&+3y(x)^2y'(x)+3y^2(x)y'(x)+6xy(x)y'(x)^2+3xy(x)^2y''(x)=0, \quad x\in U,\end{aligned}$$

y en $x=1$, con $y(1)=y'(1)=0$, se obtiene que $y''(1)=0$. En conclusión, el polinomio de Taylor pedido es el nulo.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen final – 4 de julio de 2005
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **6 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- ¿Cuáles son los posibles extremos de la función f dada por

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1-t}{1+t^3}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}?$$

2.- Se hace girar alrededor del eje OX la región plana limitada por el arco de curva $y = \mathrm{Ch}(x)$ y las rectas $x = 0$, $x = a$, engendrando un sólido V. Comprobar que el valor de la superficie lateral de V (la generada por la rotación del arco de curva) es el doble del valor de su volumen.

3.- Dar una expresión paramétrica de la curva intersección de las superficies

$$z = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

4.- Sea D el recinto acotado del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ limitado por las curvas de ecuaciones $x = 2y$, $y^2 = x$ y $x = 1$. Calcular

$$\iint_D x\, dx\, dy.$$

5.- Determinar el área limitada por la curva de ecuación polar

$$\rho = \sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}, \qquad \theta \in [0, \pi].$$

6.- Si f es un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$, hallar qué condición se debe cumplir para que ∇f sea igual al rotacional de un campo vectorial $\boldsymbol{G}$.

7.- Dado el conjunto D, interior del paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ y $(1,1)$, calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(xy, x^2 + y\big)$ a lo largo del borde de D, cuando se considera la orientación inducida por D.

8.- Sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva plana con origen en el punto $(1,0)$ y extremo en $(2,1)$. ¿Se puede calcular el valor de

$$\int_\gamma \big(2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}\big) \cdot d\boldsymbol{r}$$

con los datos aportados? Justificar la respuesta y, si es posible, calcular dicho valor.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen final – 4 de julio de 2005
2ª Parte – Duración: de 11:10 a 13:00

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Estudiar, en función del parámetro real p, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)\big(1-\cos(x)\big)}{x^p}\,dx.$$

16 puntos

2.- Sea

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < z < 1,\ x^2+y^2 > 1\}.$$

Estudiar, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia de la integral

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{z^\alpha (x^2+y^2)^{3/2}},$$

y calcular su valor cuando proceda. *18 puntos*

3.- **a)** Hallar el volumen del recinto acotado V limitado por las superficies

$$z=-1, \qquad x^2+y^2=1, \qquad z=x^2+y^2.$$

8 puntos

b) Sean $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo dado por

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2x, y-x+z, z+1),$$

y S la parte de la frontera de V no contenida en $z=-1$, orientada según la restricción de la normal exterior a V. Calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S.

10 puntos

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen final – 4 de julio de 2005
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **6 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Calcular, expresándolo en forma binómica, el valor de $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

2.- Probar que, para cada $x > 0$, se verifica que

$$\operatorname{arctg}(2x) - \operatorname{arctg}(x) < \frac{x}{1+x^2}.$$

3.- Estudiar si la función f dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

4.- Hallar el desarrollo de Taylor de orden 3 en el punto $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = (x-y)\Big(e^{x+y} - 1\Big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

5.- Comprobar que la ecuación $xz^3 - yz = \operatorname{sen}(z)$ define z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

6.- Si f es un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$, hallar qué condición se debe cumplir para que ∇f sea igual al rotacional de un campo vectorial $\boldsymbol{G}$.

7.- Dado el conjunto D, interior del paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ y $(1,1)$, calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(xy, x^2+y\right)$ a lo largo del borde de D, cuando se considera la orientación inducida por D.

8.- Sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva plana con origen en el punto $(1,0)$ y extremo en $(2,1)$. ¿Se puede calcular el valor de

$$\int_{\gamma} \left(2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}\right) \cdot d\boldsymbol{r}$$

con los datos aportados? Justificar la respuesta y, si es posible, calcular dicho valor.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen final – 4 de julio de 2005
2ª Parte – Duración: de 11:10 a 13:00

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Para cada $\alpha > 0$ se considera la función f_α dada por

$$f_\alpha(x) = \alpha\, x\, e^{-\alpha^2 x^2}, \qquad x > 0.$$

a) Hallar los extremos relativos de f_α y deducir que existe un número real $M > 0$, independiente de α, tal que para todos $\alpha > 0$ y $x > 0$ se verifica que $f_\alpha(x) \leq M$. *7 puntos*

b) Calcular $\displaystyle\int f_\alpha(x)\, dx$. *3 puntos*

c) Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_D \alpha\, x\, e^{-\alpha^2 x^2} dx\, d\alpha$, donde D es el abierto del plano (x, α) limitado por las rectas de ecuaciones $x = 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$, y por la hipérbola $\alpha = \dfrac{1}{x}$. *8 puntos*

2.- Estudiar, en función del parámetro real p, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)\big(1 - \cos(x)\big)}{x^p}\, dx.$$ *16 puntos*

3.- **a)** Hallar el volumen del recinto acotado V limitado por las superficies

$$z = -1, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad z = x^2 + y^2.$$ *8 puntos*

b) Sean $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo dado por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (2x, y - x + z, z + 1),$$

y S la parte de la frontera de V no contenida en $z = -1$, orientada según la restricción de la normal exterior a V. Calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S. *10 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen final (4 de julio de 2005)

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1ª Parte — CUESTIONES

1.- La función $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$ es continua en $[0, \infty)$, por lo que el teorema fundamental del cálculo integral garantiza que la función

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt, \qquad x \in [0, \infty),$$

es derivable en $[0, \infty)$ y $G'(x) = g(x)$, $x \geq 0$. Puesto que $h(x) = x^2$ es derivable en $\mathbb{R}$ y $h(\mathbb{R}) \subset [0, \infty)$, tiene sentido considerar la función

$$G \circ h(x) = G\big(h(x)\big) = G(x^2) = \int_0^{x^2} \frac{1-t}{1+t^3}\,dt = f(x),$$

que, en virtud de la regla de la cadena, será derivable y con derivada

$$f'(x) = G'(x^2)h'(x) = g(x^2)2x = 2x\,\frac{1-x^2}{1+x^6}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Los posibles extremos son los puntos en los que se anula la derivada, es decir, $x = 0, 1, -1$.

2.- El valor del volumen viene dado por

$$\pi \int_0^a \mathrm{Ch}^2(x)\,dx,$$

mientras que el de la superficie lateral es

$$2\pi \int_0^a \mathrm{Ch}(x)\sqrt{1 + \big(\mathrm{Ch}'(x)\big)^2}\,dx = 2\pi \int_0^a \mathrm{Ch}(x)\sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2(x)}\,dx = 2\pi \int_0^a \mathrm{Ch}^2(x)\,dx,$$

y la conclusión es obvia. No es necesario el cálculo de la última integral.

3.- Llevando la primera ecuación a la segunda, se deduce que los puntos de la intersección verifican la ecuación $z^2 + z = 2$, de donde $z = 1$ o $z = -2$. La segunda opción no es posible, pues $z = x^2 + y^2 \geq 0$, y ha de ser $x^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto, la curva de corte es la circunferencia unidad en el plano $z = 1$, que se puede parametrizar mediante $\boldsymbol{\gamma}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(\cos(t), \mathrm{sen}(t), 1\big), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

4.- Se pueden considerar dos dominios D bajo las condiciones dadas, ambos válidos para dar la solución. Si se elige

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x}\,\},$$

es claro que D es cerrado y acotado, es decir, compacto, y su frontera es unión de tres curvas (un arco de parábola y dos segmentos) y, por lo tanto, de medida nula. Puesto que la función integrando es continua (polinómica) en D, la integral pedida es de Riemann, y su cálculo se puede hacer mediante el teorema de Fubini:

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_{x/2}^{\sqrt{x}} x\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 \Big(x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\Big)\,dx = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{30}.$$

5.- La curva parte de y llega al origen de coordenadas, pues $\rho(0) = \rho(\pi) = 0$. Por ser la expresión de ρ continua en el compacto $[0, \pi]$, es inmediato que D es compacto medible, y su área es la dada por

$$A(D) = \iint_D 1\, dx\, dy.$$

Si

$$\boldsymbol{\varphi}(\rho, \theta) = \big(\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta)\big)$$

es el cambio a coordenadas polares, el transformado del recinto D encerrado por la curva se expresa fácilmente (salvo conjuntos de medida nula) como

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(D) = \{(\rho, \theta) : 0 < \theta < \pi,\ 0 < \rho < \sqrt{\operatorname{sen}(\theta)}\,\}.$$

En virtud del teorema del cambio de variables y, a continuación, por el teorema de Fubini, se tiene que

$$A(D) = \iint_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(D)} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{\operatorname{sen}(\theta)}} \rho\, d\rho \Big)\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta = 1.$$

Otra solución se basa en el teorema de Riemann-Green, considerando un campo adecuado para transformar la integral doble en una curvilínea a lo largo de la curva borde de D.

6.- El campo ∇f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$, abierto estrellado; en virtud de una de las versiones del lema de Poincaré, dicho campo es el rotacional de otro campo si, y sólo si, $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$ en $\mathbb{R}^3$. Esta condición significa que

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

7.- El conjunto D es un dominio de Jordan cuyo borde está formado por cuatro segmentos, y el campo a integrar es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$. Aunque no es difícil parametrizar los segmentos y realizar el cálculo directo de la circulación, sin duda es más rápido aplicar el teorema de Green, cuyas hipótesis se cumplen. Es sencillo comprobar que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1,\ y < x < y + 1\,\},$$

con lo que, aplicando también el teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (xy, x^2 + y) \cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \Big)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \Big(\int_y^{y+1} x\, dx \Big)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (2y + 1)\, dy = 1. \end{aligned}$$

8.- Denotemos el campo que se pretende integrar por $\boldsymbol{F} = (P, Q)$. La integral del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de una curva depende sólo de los extremos de la misma cuando dicho campo es el gradiente de un campo escalar en un abierto que contiene a la curva. En este caso, es inmediato comprobar que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en el abierto estrellado $\mathbb{R}^2$, condición que asegura que efectivamente el campo es un gradiente en $\mathbb{R}^2$. Además, la regla de Barrow establece que, si $\boldsymbol{F} = \nabla f$, entonces

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\gamma \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = f(2, 1) - f(1, 0).$$

Es sencillo obtener que un potencial puede ser $f(x, y) = e^{x^2 y}$, con lo que la integral vale $e^4 - e^0 = e^4 - 1$.

2ª Parte –PROBLEMAS

1.- La función integrando, que llamamos f, es continua, y por tanto localmente integrable, en $(0,\infty)$. Dado el posible carácter impropio de la integral en 0, estudiamos por separado las integrales en $(0,1]$ y en $[1,\infty)$. Para la primera, recordamos que $\operatorname{sen}(x) \sim_0 x$ y $1-\cos(x) \sim_0 x^2/2$; por otra parte, f es positiva en $(0,\pi)$, con lo que procede aplicar el criterio de comparación calculando

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{1/x^{p-3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x x^2/2x^p}{1/x^{p-3}} = \frac{1}{2}.$$

El hecho de que el valor del límite sea finito y no nulo asegura que el carácter de la integral $\int_0^1 f$ es el de $\int_0^1 dx/x^{p-3}$, que converge si, y sólo si, $p-3<1$, es decir, $p<4$.

En cuanto a la segunda integral, observamos que

$$|f(x)| \le \frac{2}{x^p}, \qquad x>0,$$

con lo que es claro que, si $p>1$, la integral $\int_1^\infty f$ converge (de hecho absolutamente) por estar mayorada la integral de $|f|$ por la integral convergente $\int_1^\infty 2\,dx/x^p$. Esto no quiere decir que la integral bajo estudio no sea convergente si $p\le 1$. De hecho, para $p>0$ se tiene, mediante una integración por partes haciendo $u=x^{-p}$, que

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \frac{\frac14\cos(2x)-\cos(x)}{x^p}\Big|_1^\infty + p\int_1^\infty \frac{\frac14\cos(2x)-\cos(x)}{x^{p+1}}\,dx.$$

Es claro que los dos términos a la derecha de la igualdad son convergentes, el primero por ser $p>0$ y el segundo por ser $p+1>1$, con lo que la integral a la izquierda converge también si $p\in(0,1]$. Sin embargo, la situación cambia si $p\le 0$, pues en ese caso la oscilación del numerador de f no es amortiguada por el denominador, y esto resulta, sin entrar en detalles, en la no convergencia de la integral.

En conclusión, la integral dada inicialmente converge si $p\in(0,4)$.

2.- El integrando es continuo en el abierto no acotado V, con lo que la integral impropia tiene sentido. La definición del conjunto V y de la función integrando aconsejan realizar un cambio de variables a coordenadas cilíndricas, $(x,y,z)=\boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta,z)$, dado por

$$x=\rho\cos(\theta), \qquad y=\rho\operatorname{sen}(\theta), \qquad z=z.$$

Salvo conjuntos de medida nula,

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V)=\{(\rho,\theta,z): 0<\theta<2\pi,\ \rho>1,\ 0<z<1\},$$

con lo que, en virtud del teorema del cambio de variables, podemos estudiar equivalentemente la integral

$$\iiint_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V)} \frac{\rho\,d\rho\,d\theta\,dz}{z^\alpha\rho^3}.$$

El integrando es positivo, y el criterio de Tonelli pide estudiar la convergencia de una integral iterada, por ejemplo

$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1\Big(\int_1^\infty \frac{d\rho}{z^\alpha\rho^2}\Big)\,dz\Big)\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^2}\int_0^1 \frac{dz}{z^\alpha}.$$

Las dos primeras integrales convergen, mientras que la integral respecto de z converge si, y sólo si, $\alpha<1$, y de acuerdo con el criterio de Tonelli, esa es la condición de convergencia de la integral propuesta. En cuanto a su valor en caso de convergencia, el teorema de Fubini asegura que coincide con el de una de sus iteradas, que de acuerdo con el cálculo anterior es

$$2\pi\Big(\frac{-1}{\rho}\Big)\Big|_1^{\infty}\Big(\frac{z^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big)\Big|_0^1=\frac{2\pi}{1-\alpha}.$$

3.- a) Se puede describir el compacto medible V como

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1,\ -1\leq z\leq x^2+y^2\},$$

lo que hace evidente la conveniencia de trabajar en coordenadas cilíndricas. Si $\boldsymbol{\varphi}$ es el cambio estándar a dichas coordenadas, salvo conjuntos de medida nula se tiene que

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V)=\{(\rho,\theta,z) : 0<\theta<2\pi,\ 0<\rho<1,\ -1<z<\rho^2\},$$

y los teoremas del cambio de variables y de Fubini permiten escribir

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V)&=\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V)}\rho\,d\theta\,d\rho\,dz=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1\Big(\int_{-1}^{\rho^2}\rho\,dz\Big)\,d\rho\Big)\,d\theta\\&=2\pi\int_0^1\rho(\rho^2+1)\,d\rho=2\pi\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)=\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

b) Sea S_1 la parte de la frontera de V contenida en el plano $z=-1$, orientada según la restricción de la normal exterior a V. Es claro que $\partial V=S+S_1$. Siendo el campo $\boldsymbol{F}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, el teorema de la divergencia permite escribir

$$\int_{S+S_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dx\,dy\,dz=\iiint_V 4\,dx\,dy\,dz=4\mathrm{Vol}(V)=6\pi.$$

Ahora bien, la normal a S_1 es vertical (por ser S_1 parte del plano horizontal $z=-1$) y $\boldsymbol{F}(x,y,-1)=(2x,y-x-1,0)$, lo que asegura que en los puntos de S_1 el producto escalar del campo por la normal es nulo, y lo será el flujo a través de S_1. Por lo tanto,

$$\int_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=6\pi-\int_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=6\pi-0=6\pi.$$

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1ª Parte — CUESTIONES

1.- El complejo $1+i$ tiene módulo igual a $\sqrt{2}$ y argumento igual a $\pi/4$. Por lo tanto,

$$\Big(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)^{100}=\Big(e^{i\pi/4}\Big)^{100}=e^{25\pi i}=e^{\pi i}=-1.$$

2.- Aplicamos el teorema de Lagrange de los incrementos finitos a la función $f(t)=\operatorname{arctg}(t)$ en el intervalo $[x,2x]$, donde la función es claramente derivable: existirá un punto $c\in(x,2x)$ tal que

$$f(2x)-f(x)=(2x-x)f'(c),\qquad \text{es decir,}\qquad \operatorname{arctg}(2x)-\operatorname{arctg}(x)=\frac{x}{1+c^2}.$$

Basta observar que $c>x$, luego $1/(1+c^2)<1/(1+x^2)$, para concluir.

3.- Para que sea continua en $(0,0)$ ha de ser

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

El cálculo de límites reiterados o direccionales proporciona el valor 0, pero esto no es suficiente. Razonamos en coordenadas polares, estimando la distancia entre el posible valor del límite, 0, y $f\big(\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big)$:

$$\begin{aligned}\big|f\big(\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big)-0\big| &= \Big|\frac{\big(\rho\cos(\theta)-\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big)^2\,\mathrm{sen}(\rho)}{\rho^2}\Big| \\ &= \big|\big(\cos(\theta)-\mathrm{sen}(\theta)\big)^2\,\mathrm{sen}(\rho)\big| \le 4|\,\mathrm{sen}(\rho)|.\end{aligned}$$

Puesto que esta última expresión tiende a cero uniformemente respecto de $\theta\in[0,2\pi]$ cuando $\rho\to 0$, concluimos que f es continua en $(0,0)$.

4.- Por supuesto, es posible realizar el cálculo de las derivadas de f de orden menor o igual que 3 y evaluarlas en $(0,0)$, lo que proporciona los coeficientes del polinomio de Taylor pedido. Un procedimiento más rápido es el siguiente: puesto que $x-y$ es un polinomio, en $(0,0)$ se tiene que

$$x-y=x-y+o\big(\|(x,y)\|^3\big);$$

por otra parte, sabemos que

$$e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+o(t^3),\qquad t\to 0,$$

de donde es sencillo deducir que

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{6}(x+y)^3+o\big(\|(x,y)\|^3\big).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \Big(x-y+o\big(\|(x,y)\|^3\big)\Big)\Big((x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{6}(x+y)^3+o\big(\|(x,y)\|^3\big)\Big) \\ &= x^2-y^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{2}y^3+o\big(\|(x,y)\|^3\big),\end{aligned}$$

expresión que ha de ser necesariamente el desarrollo de Taylor de f en $(0,0)$.

5.- Si definimos la función $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z)=xz^3-yz-\mathrm{sen}(z),$$

es claro que $F\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F(0,0,0)=0$ y

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)=3xz^2-y-\cos(z)\big|_{(0,0,0)}=-1\neq 0.$$

Estamos en condiciones de aplicar el teorema de la función implícita para garantizar que existe una función $z=z(x,y)$, definida y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno V de $(0,0)$, con $z(0,0)=0$ y de modo que

$$x\big(z(x,y)\big)^3-yz(x,y)-\mathrm{sen}\,\big(z(x,y)\big)=0,\qquad (x,y)\in V. \tag{1}$$

Derivando respecto de x en (1), se tiene que

$$\big(z(x,y)\big)^3+3x\big(z(x,y)\big)^2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)-y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)-\cos\big(z(x,y)\big)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=0,\qquad (x,y)\in V,$$

y evaluando en $(x,y)=(0,0)$ se obtiene que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)=0$.

Derivando ahora respecto de y en (1), se tiene que

$$3x\big(z(x,y)\big)^2\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)-z(x,y)-y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)-\cos\big(z(x,y)\big)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=0,\qquad (x,y)\in V,$$

y evaluando en $(x,y)=(0,0)$ se deduce que $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$.

6, 7, 8.- Son las mismas que en el examen del segundo parcial.

2ª Parte –PROBLEMAS

1. a) La función f_α es derivable en $(0,\infty)$, y sus extremos relativos se presentarán en puntos que anulen su derivada: la ecuación

$$f'_\alpha(x) = \alpha\, e^{-\alpha^2 x^2} + \alpha\, x\, e^{-\alpha^2 x^2}(-2\alpha^2 x) = \alpha\, e^{-\alpha^2 x^2}\big(1 - 2\alpha^2 x^2\big) = 0$$

tiene como única solución en $(0,\infty)$ el punto $x_\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2\alpha}$, siendo inmediato comprobar que f_α crece en $(0, x_\alpha)$ y decrece en (x_α, ∞). Por lo tanto, f_α alcanza en x_α su máximo absoluto en el intervalo $(0,\infty)$ (en el que no aparecen otros extremos relativos), cuyo valor es

$$f_\alpha(x_\alpha) = \alpha\, x_\alpha\, e^{-\alpha^2 x_\alpha^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-1/2}.$$

Este último valor, independiente de α, es, por definición de extremo absoluto, el número M buscado.

b) Es inmediato que

$$\int f_\alpha(x)\, dx = -\frac{1}{2\alpha}\int e^{-\alpha^2 x^2}(-2\alpha^2 x)\, dx = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha^2 x^2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

c) El abierto D se puede determinar como

$$\{(x,\alpha) : 1 < \alpha < 2,\ 0 < x < \frac{1}{\alpha}\};$$

aunque la integral pedida es en principio impropia, es obvio que la adherencia de D es un compacto medible y el integrando una función continua, luego integrable, en dicha adherencia. En esta situación, la integral de Riemann extendida a la adherencia de D coincide con la integral impropia sobre D, y es lícita la aplicación del teorema de Fubini para su cálculo:

$$\begin{aligned}\iint_D \alpha\, x\, e^{-\alpha^2 x^2} dx\, d\alpha &= \int_1^2 \Big(\int_0^{1/\alpha} f_\alpha(x)\, dx\Big)\, d\alpha \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\int_1^2 e^{-\alpha^2 x^2}\Big|_{x=0}^{x=1/\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\alpha}\big(1 - \frac{1}{e}\big).\end{aligned}$$

2.- Coincide con el primero de los propuestos para los que se examinan sólo del segundo parcial.

3..- Coincide con el tercero de los propuestos para los que se examinan sólo del segundo parcial.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen extraordinario – 1 de septiembre de 2005
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:50

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **6 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- Resolver la inecuación

$$x < \frac{x+4}{x-2}, \qquad x \neq 2.$$

2.- Obtener el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x=0$ de la función

$$f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}, \qquad x \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big).$$

3.- Determinar, si existe, el valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, siendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x\,y)}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

4.- Determinar los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$. ¿Presenta la función en $(0,0)$ un extremo relativo?

5.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} t^2\,dt}{\operatorname{tg}^3(x)}$.

6.- Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{2/\pi}^{\infty} \log\Big(\operatorname{sen}\big(1/x\big)\Big)\,dx$.

7.- Calcular

$$\iint_{B((0,0),1)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy.$$

8.- Sea D el recinto no acotado limitado por el eje OY positivo y el arco de la parábola $y=x^2$ contenido en el primer cuadrante. Estudiar la convergencia de

$$\iint_D \frac{x\,e^{-y}}{y}\,dx\,dy,$$

y calcular su valor si procede.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen extraordinario – 1 de septiembre de 2005
2ª Parte – Duración: de 11:15 a 13:10

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

1. Dada la función $f_a(x) = x^3 - 3\,a\,x + 16$, donde a es un parámetro real, se pide:
a) Estudiar, en función de a, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f_a. *6 puntos*
b) Determinar los puntos en los que la función f_a alcanza sus extremos relativos (si los hay) y el valor de la función en dichos puntos. *5 puntos*
c) Determinar, razonadamente y en función de a, el número de raíces reales de la ecuación $f_a(x) = 0$. *8 puntos*

2.- Se considera la ecuación $z^3 + 6\,x^2 - 6\,y^2 - 6\,z = 0$. Se pide:
a) Demostrar que dicha ecuación define z como función implícita de x e y en un entorno de $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$. *4 puntos*
b) Estudiar si la función así definida presenta un extremo relativo en $(0,0)$. *10 puntos*

3.- Sea S_1 la superficie definida por las relaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z < 0,$$

orientada según la normal con tercera componente negativa, y sea S_2 la superficie dada por

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad 0 < z < 1,$$

dotada de la orientación que define la normal $N(x,y,z) = (x,y,0)$, $(x,y,z) \in S_2$. Llamamos S a la superficie suma de S_1 y S_2.
a) Dar parametrizaciones de S_1 y S_2, respectivamente. *6 puntos*
b) Consideremos el campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x, a\,y, x\,y)$, donde a es un parámetro real. Determinar el valor de a para que exista un campo $\boldsymbol{G}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$, y hallar dicho campo $\boldsymbol{G}$. *6 puntos*
c) Para el valor de a obtenido anteriormente, calcular

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma. \qquad \textit{7 puntos}$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen extraordinario (1 de septiembre de 2005)

1ª Parte –CUESTIONES

1.- La inecuación propuesta equivale a estas dos:

$$\text{si } x > 2, \quad x(x-2) < x+4, \quad \text{es decir,} \quad x^2 - 3x - 4 < 0;$$
$$\text{si } x < 2, \quad x(x-2) > x+4, \quad \text{es decir,} \quad x^2 - 3x - 4 > 0.$$

Las raíces del polinomio $x^2 - 3x - 4$ son -1 y 4, por lo que dicho polinomio toma valores negativos en $(-1, 4)$ y positivos en $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$. De acuerdo con lo anterior, el conjunto de soluciones de la inecuación es $(-\infty, -1) \cup (2, 4)$.

2.- Basta dividir los polinomios de Taylor correspondientes a las funciones e^x y $\cos(x)$, ordenados por potencias crecientes de x, para obtener que el polinomio pedido es

$$1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3.$$

3.- El límite vale 0, como se puede ver utilizando el desarrollo limitado de $\operatorname{sen}(xy)$ o pasando a coordenadas polares.

4.- Derivando parcialmente respecto de x e y e igualando a cero las derivadas parciales se obtiene el sistema

$$\big(2x + 2x(x^2 + y^2)\big)e^{x^2 - y^2} = 0,$$
$$\big(2y - 2y(x^2 + y^2)\big)e^{x^2 - y^2} = 0.$$

Como la exponencial no se anula, los puntos críticos son solución del siguiente sistema:

$$2x + 2x(x^2 + y^2) = 0,$$
$$2y - 2y(x^2 + y^2) = 0.$$

La primera ecuación nos da $x = 0$. La segunda se satisface para $y = 0$, y también, si $x = 0$ para $y = \pm 1$. En consecuencia los puntos críticos son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. En $(0, 0)$ hay claramente un mínimo sin necesidad de ir a la matriz hessiana, ya que la función dada es siempre mayor o igual que cero y en $(0, 0)$ vale 0.

5.- Es una indeterminación del tipo $0/0$, pudiéndose aplicar la regla de L'Hôpital. Derivando numerador y denominador se obtiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)}{3\operatorname{tg}^2(x)\dfrac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)}{3\operatorname{tg}^2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^5(x)}{3} = \frac{1}{3}.$$

(Nótese que al derivar el numerador se ha utilizado el teorema fundamental del cálculo.)

6.- La función integrando mantiene signo constante (negativo) en la semirrecta de integración, de modo que pueden utilizarse los criterios de comparación. Como $\operatorname{sen}(1/x) \sim 1/x$ cuando $x \to \infty$, resulta que la integral tiene el mismo comportamiento que la de $\log(1/x) = -\log(x)$, que es divergente.

7.- Haciendo el cambio a polares, la integral se convierte en

$$\iint_{(0,1)\times(0,2\pi)} \frac{r^2}{1 + r^3}\, dr\, d\theta,$$

de modo que, con el teorema de Fubini,

$$\iint_{(0,1)\times(0,2\pi)} \frac{r^2}{1+r^3}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^3}\,dr = \frac{2\pi}{3}\log(1+r^3)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}\log(2).$$

8.- La aplicación del teorema de Tonelli asegura la convergencia de la integral, ya que la integral iterada es

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\Big(\int_0^{\sqrt{y}} x\,dx\Big)\,dy = \frac{1}{2}.$$

Por el teorema de Fubini, éste es el valor de la integral.

2ª Parte –PROBLEMAS

1. a) Puesto que f_a es derivable en $\mathbb{R}$, se trata de estudiar el signo de su derivada:

$$f_a'(x) = 3(x^2 - a), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es claro que si $a < 0$, $f_a'(x) > 0$ para todo x, con lo que f_a es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Si $a = 0$, $f_0'(x) > 0$ si $x \neq 0$ y $f_0'(0) = 0$, de modo que f_0 vuelve a ser estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Por último, en el caso de que $a > 0$, es sencillo ver que $f_a'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = \pm\sqrt{a}$; $f_a'(x) > 0$ si $x < -\sqrt{a}$ o $x > \sqrt{a}$, mientras que $f_a'(x) < 0$ si $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$. Así, f_a crece en $(-\infty, -\sqrt{a})$, decrece en $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ y crece en $(\sqrt{a}, \infty)$.

b) Del apartado anterior se deduce que f_a no presenta extremos si $a \leq 0$, mientras que si $a > 0$ se tiene un máximo relativo en el punto $(-\sqrt{a}, 16 + 2a\sqrt{a})$ y un mínimo relativo en el punto $(\sqrt{a}, 16 - 2a\sqrt{a})$.

c) Para el caso $a \leq 0$, el crecimiento estricto de f_a obtenido en el primer apartado, y el hecho de que $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$ (lo que permite aplicar el teorema de Bolzano en un intervalo adecuado), aseguran que f_a se anula exactamente una vez en $\mathbb{R}$.

El caso $a > 0$ requiere un estudio más profundo. Si observamos que f_a crece estrictamente en $(-\infty, -\sqrt{a})$, que $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$ y que $f_a(-\sqrt{a}) = 16 + 2a\sqrt{a} > 0$, es claro que f_a se anula exactamente una vez en dicho intervalo. En $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ la función decrece estrictamente, y su anulación o no en dicho intervalo depende del signo del valor que tome en $\sqrt{a}$:

$$f_a(\sqrt{a}) = 16 - 2a\sqrt{a} < 0 \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad a > 4.$$

Por lo tanto, si $a > 4$ se tiene una única nueva solución de la ecuación en el intervalo $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$, y puesto que $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$, un razonamiento idéntico a los anteriores garantiza la presencia de una última solución en el intervalo $(\sqrt{a}, \infty)$.

Si $a = 4$ se tiene que $f_4(\sqrt{4}) = f_4(2) = 0$, con lo que, de acuerdo con la monotonía de f_a, el punto 2 es la única solución de la ecuación mayor que -2.

Si $0 < a < 4$, se tiene que $f_a(\sqrt{a}) > 0$, y se deduce que f_a es estrictamente positiva en $(-\sqrt{a}, \infty)$.

En conclusión, hay tres soluciones si $a > 4$, dos si $a = 4$, y una si $a < 4$.

2.- a) Consideremos la función $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z) = z^3 + 6\,x^2 - 6\,y^2 - 6\,z.$$

Es obvio que F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, que $F(0,0,0) = 0$ y que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = -6 \neq 0.$$

Por lo tanto, el teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función $z = z(x, y)$, definida y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno V de $(x_0, y_0) = (0, 0)$, de modo que $z(0, 0) = 0$ y para cada $(x, y) \in V$ se tiene que

$$F\big(x, y, z(x, y)\big) = 0, \quad \text{es decir,} \quad z^3(x, y) + 6\,x^2 - 6\,y^2 - 6\,z(x, y) = 0. \tag{1}$$

b) Pasamos al cálculo de las derivadas de la función obtenida. Derivando respecto de x en (1) resulta que

$$3z^2(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + 12\,x - 6\,\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in V, \qquad (2),$$

y particularizando en $(0, 0)$, se tiene que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0$. Análogamente, derivando (1) respecto de y queda

$$3z^2(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) - 12\,y - 6\,\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in V, \qquad (3),$$

y particularizando en $(0, 0)$, se tiene que $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0$. Por lo tanto, $(0, 0)$ es punto crítico, y procede calcular las derivadas segundas. Derivando (2) respecto de x e y, respectivamente, se obtiene

$$6z(x, y)\Big(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\Big)^2 + 3z^2(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) + 12 - 6\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in V,$$

y

$$6z(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + 3z^2(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y) - 6\,\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in V.$$

Evaluando en $(0, 0)$ se obtiene que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$. Por último, derivando en (3) respecto de y se tiene que

$$6z(x, y)\Big(\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\Big)^2 + 3z^2(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) - 12 - 6\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in V,$$

y es inmediato que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = -2$. En conclusión, la matriz hessiana asociada a $z(x, y)$ en el punto $(0, 0)$ es la matriz diagonal con elementos diagonales 2 y -2, que son sus autovalores, con lo que representa una forma indefinida y el punto $(0, 0)$ es de silla.

3.- a) Una parametrización de S_1 es $g_1 \colon B\big((0, 0), 1\big) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g_1(x, y) = \big(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\big),$$

que induce en S_1 la orientación opuesta a la considerada en el enunciado. Otra posibilidad es recurrir a las coordenadas esféricas para parametrizar mediante la aplicación $g_2 \colon (0, 2\pi) \times (-\pi/2, 0) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g_2(\theta, \varphi) = \big(\cos(\theta)\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi)\big),$$

que induce la orientación considerada en S_1.

En cuanto a S_2, se puede describir mediante $h \colon (0, 2\pi) \times (0, 1) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$h(\theta, z) = \big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), z\big),$$

que induce la orientación dada en el enunciado sobre S_2.

b) Puesto que $\boldsymbol{F}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en el abierto convexo $\mathbb{R}^3$, la condición para que sea igual a un rotacional es que su divergencia se anule:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x, y, z) = 1 + a = 0 \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad a = -1.$$

Para este valor de a, el problema de hallar un campo $\boldsymbol{G}$ tal que $\operatorname{rot}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ tiene infinitas soluciones, por ejemplo,

$$\boldsymbol{G}_1(x,y,z) = \big(0, \frac{1}{2}x^2y, xy\big) \quad \text{o} \quad \boldsymbol{G}_2(x,y,z) = \big(-yz, -xz + \frac{1}{2}x^2y, 0\big).$$

c) Es claro que, aunque se disponga de las parametrizaciones obtenidas en el primer apartado, el cálculo directo del flujo como suma de los flujos correspondientes a través de S_1 y S_2 será trabajoso. Sin embargo, el borde $\boldsymbol{\Gamma}$ de la superficie suma es muy sencillo, pues se reduce a la circunferencia parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, donde

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 1\big).$$

La orientación que induce esta parametrización en el borde es opuesta a la inducida por la superficie suma sobre el mismo, de modo que el teorema de Stokes permite escribir

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= \int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{G}_1\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{\boldsymbol{\Gamma}} \boldsymbol{G}_1\cdot d\boldsymbol{r}\\ &= -\int_0^{2\pi} \big(0, \frac{1}{2}\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\big)\cdot\big(-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0\big)\,d\theta\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^3(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}\cos^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Examen parcial – 6 de febrero de 2006
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones de las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. Cada cuestión vale* **7 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n > 3$, se verifica que $n^2 > 3n + 2$.

2.- ¿Qué valor debe dársele al parámetro real a para que $\lim_{x \to 0} \frac{\big(1 - \cos(x)\big)^3}{\big(x - \operatorname{sen}(x)\big)^a}$ sea finito y no nulo?

3.- Una función $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ es tal que $f(0) = 1$, y $|f'(x)| < 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que $f(4)$ pertenece al intervalo $(-7, 9)$.

4.- Estudiar si la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^4}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

tiene límite en el punto $(0,0)$.

5.- Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = xe^{yz} + \cos(x+y+z)$ en el punto $(0,0,0)$ según el vector $(1,2,-1)$.

6.- Consideremos las funciones

$$F(u,v) = \big(u^3 + v^3, \log(u^2 + v^2)\big), \qquad u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = 2xy,$$

y definamos la función $G(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$. Calcular $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)$.

7.- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación

$$z = x^3 - 3xy^2 + 1$$

en el punto $(1,1)$.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Examen parcial – 6 de febrero de 2006
2ª Parte — Duración: de 11:15 a 13:15

Instrucciones: *Las soluciones deben entregarse escritas con tinta,* **cada problema en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*

1. Se considera la función $f(x) = \log(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Se pide:

i) Indicar el dominio de f, y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y las posibles asíntotas de f. *7 puntos*
ii) Dado un número real α, determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = \alpha$. *9 puntos*

2.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua en $\mathbb{R}^2$ y tal que

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

i) Determinar $f(0,0)$. *5 puntos*
ii) Estudiar la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$. *7 puntos*
iii) Estudiar la continuidad de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. *5 puntos*

3.- Se considera la función f dada por

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - xy - 3, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Hallar sus extremos relativos. *7 puntos*
ii) Comprobar que la ecuación $f(x,y) = 0$ define a y como función implícita de x en un entorno de $x = 1$ con $y(1) = 2$. *3 puntos*
iii) Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $y(x)$, obtenida en el apartado anterior, en el punto $x = 1$. *8 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Soluciones del examen parcial de 6 de febrero de 2006

CUESTIONES

1.- Se puede razonar por inducción. La igualdad se cumple obviamente para $n = 4$, pues $16 > 14$. Si se cumple para un natural n,

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 > 3n+2+2n+1 = 5n+3 = (3+2)n+3 \geq 3n+2+3 = 3(n+1)+2,$$

como queríamos. Otra opción es estudiar el signo de la función polinómica $P(x) = x^2 - 3x - 2$, comprobando que es estrictamente positiva si $x \geq 4$.

2.- En la tabla de desarrollos de Taylor de las funciones elementales se encuentra que

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$
$$x - \operatorname{sen}(x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0,$$

de modo que es inmediato obtener que

$$\big(1 - \cos(x)\big)^3 = \frac{x^6}{8} + x^6\varepsilon_3(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

Si se desea obtener un valor finito y no nulo para el límite dado, es obvio que el denominador debe comportarse, salvo constante y términos de orden superior, como x^6, lo que se consigue si, y sólo si, $a = 2$.

3.- Basta aplicar el teorema de los incrementos finitos, cuyas hipótesis se cumplen por ser f de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, en el intervalo $[0, 4]$: existirá $\xi \in (0, 4)$ tal que

$$f(4) - f(0) = (4 - 0)f'(\xi), \qquad \text{de donde} \qquad |f(4) - 1| = 4|f'(\xi)| < 4 \cdot 2 = 8.$$

Esta desigualdad equivale a que $f(4)$ pertenezca al intervalo $(-7, 9)$.

4.- El límite en el punto $(0, 0)$ no existe, pues el límite direccional siguiendo el eje OY, de ecuación $x = 0$, no existe:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}.$$

5.- La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^3$ (es operación válida de funciones diferenciables como las polinómicas, la exponencial y el coseno). Un resultado teórico permite escribir

$$\begin{aligned} D_{(1,2,-1)}f(0, 0, 0) &= f'(0, 0, 0)(1, 2, -1)^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}\Big|_{(0,0,0)}(1, 2, -1)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}(1, 2, -1)^t = 1. \end{aligned}$$

6.- La aplicación de la regla de la cadena se justifica inmediatamente por ser $F = (F_1, F_2)$, u y v funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$. Si ponemos

$$G(x, y) = \Big(F_1\big(u(x, y), v(x, y)\big), F_2\big(u(x, y), v(x, y)\big)\Big),$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) &= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial u}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial F_1}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\\ &\qquad \frac{\partial F_2}{\partial u}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\Big)\\ &= \Big(3\big(u(x,y)\big)^2(-2y) + 3\big(v(x,y)\big)^2 2x,\\ &\qquad \frac{2u(x,y)}{\big(u(x,y)\big)^2+\big(v(x,y)\big)^2}(-2y) + \frac{2v(x,y)}{\big(u(x,y)\big)^2+\big(v(x,y)\big)^2}2x\Big),\end{aligned}$$

expresión que se puede simplificar sin dificultad.

7.- Si llamamos $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$, es obvio que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y en ese caso se sabe que la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,1)$ es

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot(y-1) = -1 + 0\cdot(x-1) - 6(y-1),$$

es decir, la ecuación $6y + z = 5$.

PROBLEMAS

1.- i) El dominio de f es $(0,\infty)$, donde la función es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Puesto que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, el eje OY es asíntota vertical de la gráfica de f. Por otra parte, puesto que el infinito potencial es de mayor orden que el logarítmico en $+\infty$, es inmediato que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty,$$

por lo que no hay, respectivamente, asíntotas horizontales ni oblicuas. En cuanto a la monotonía, estudiamos el signo de

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{x},$$

que es claramente positivo si $x \in (0,1)$, donde f crece, y negativo en $(1,\infty)$, donde f decrece. En el punto $x = 1$ se anula la derivada, y es evidente que f presenta en él un máximo relativo (y absoluto).

ii) Teniendo en cuenta la información del apartado anterior y que $f(1) = -1/2$, se deduce que:

(1) Si $\alpha > -1/2$, la función f no toma el valor α en ningún punto, por lo que la ecuación $f(x) = \alpha$ no tiene soluciones.

(2) Si $\alpha = -1/2$, la función f toma este valor sólo en $x = 1$, por lo que la ecuación $f(x) = -1/2$ tiene una solución.

(3) Si $\alpha < -1/2$, la función f toma el valor α en dos puntos, uno en el intervalo $(0,1)$ (donde f crece estrictamente tomando, en virtud de la propiedad de Darboux, todos los valores del intervalo $(-\infty,-1/2)$), y otro en el intervalo $(1,\infty)$ (donde f decrece estrictamente tomando los mismos valores que en el caso anterior). Por lo tanto, la ecuación $f(x) = \alpha$ tiene dos soluciones.

2.- i) Puesto que f es continua en $\mathbb{R}^2$, lo será en $(0,0)$, de donde

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

El valor de este límite se deduce pasando a coordenadas polares:

$$\big|f\big(\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big) - 0\big| = \Big|\frac{\rho^3\cos^3(\theta)}{\rho^2}\Big| = \rho\big|\cos^3(\theta)\big| \le \rho.$$

Como $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho = 0$, se concluye que el límite buscado vale 0.

ii) En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la función es cociente de funciones diferenciables (por ser polinómicas) con denominador no nulo en todo punto, luego es diferenciable. En cuanto al punto $(0,0)$, es inmediato que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

La función será diferenciable en $(0,0)$ si el límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{-hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

vale 0. Basta observar que

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k=h}}\frac{-hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

para concluir que f no es diferenciable en $(0,0)$. Alternativamente, también se puede comprobar que, al expresar este cociente en coordenadas polares (ρ,θ), el límite depende del ángulo θ.

iii) Las derivadas parciales de f existen en todo $\mathbb{R}^2$. Si la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ fuera continua en $(0,0)$, un resultado teórico garantizaría que f es diferenciable en $(0,0)$, lo que no ocurre. Por lo tanto, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no puede ser continua en $(0,0)$ (y tampoco lo será la otra derivada parcial). Por supuesto, otra solución consiste en calcular la función

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

y comprobar que no existe su límite en el origen.

3.- i) Los puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y = 0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - x = 0,\end{cases}$$

que resultan ser $(0,0)$ y $(1/12, 1/6)$. La hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 6y\end{pmatrix},$$

que es indefinida en $(0,0)$, que será punto de silla, y definida positiva en $(1/12,1/6)$, donde f presenta un mínimo relativo.

ii) La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, por ser polinómica. Además, $f(2,1)=0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 1 \neq 0$, por lo que el teorema de la función implícita permite asegurar que la ecuación define $y=y(x)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno U de $x=2$, con $y(2)=1$ y de modo que

$$x^2 + y(x)^3 - xy(x) - 3 = 0, \qquad x\in U. \tag{1}$$

iii) Podemos derivar la igualdad (1) para obtener:

$$2x + 3\big(y(x)\big)^2 y'(x) - y(x) - xy'(x) = 0, \qquad x\in U. \tag{2}$$

Evaluando en $x = 2$ deducimos que

$$4 + 3y'(2) - 1 - 2y'(2) = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad y'(2) = -3.$$

Volvemos a derivar, ahora en (2):

$$2 + 6y(x)\big(y'(x)\big)^2 + 3\big(y(x)\big)^2 y''(x) - y'(x) - y'(x) - xy''(x) = 0, \qquad x \in U;$$

si evaluamos en $x = 2$, se obtiene que

$$2 + 54 + 3y''(2) + 6 - 2y''(2) = 0, \qquad \text{de donde} \qquad y''(2) = -62.$$

En conclusión, el polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 2$ es

$$1 - 3(x-2) - 31(x-2)^2.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen final (13 de junio de 2006)

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Calcular $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^{2/3}}\,dx$.

Solución: La integral es binomia, y el primer cambio de variable indicado es $x^{2/3}=t$, que transforma la integral en

$$\frac{3}{2}\int t^2(1+t)^{1/2}\,dt.$$

Un nuevo cambio de variable, $1+t=u^2$, hace aparecer

$$3\int u^2(u^2-1)^2\,du=\frac{3}{7}u^7-\frac{6}{5}u^5+u^3+C,$$

que tras deshacer los dos cambios proporciona la solución,

$$\frac{3}{7}\big(1+x^{2/3}\big)^{7/2}-\frac{6}{5}\big(1+x^{2/3}\big)^{5/2}+\big(1+x^{2/3}\big)^{3/2}+C,\qquad C\in\mathbb{R}.$$

2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^{\operatorname{sen}(x)}\operatorname{arctg}(t)\,dt$.

Solución: La función $g(x)=\operatorname{arctg}(t)$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo que el teorema fundamental del cálculo integral garantiza que la función

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt,\qquad x\in\mathbb{R},$$

es derivable en $\mathbb{R}$ y $G'(x)=g(x)$ para todo x. Puesto que $h(x)=\operatorname{sen}(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, la función f, definida por

$$f(x)=G\circ h(x)=G\big(h(x)\big)=G\big(\operatorname{sen}(x)\big)=\int_0^{\operatorname{sen}(x)}\operatorname{arctg}(t)\,dt,$$

es derivable en virtud de la regla de la cadena, y su derivada es

$$f'(x)=G'\big(\operatorname{sen}(x)\big)h'(x)=g\big(\operatorname{sen}(x)\big)\cos(x)=\operatorname{arctg}\big(\operatorname{sen}(x)\big)\cos(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Como f es continua en 0 y $f(0)=0$, el límite propuesto presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, y se puede aplicar la regla de L'Hôpital, que pide calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\big(\operatorname{sen}(x)\big)\cos(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\big(\operatorname{sen}(x)\big)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Se ha aplicado sucesivamente que

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1,\qquad \operatorname{arctg}\big(f(x)\big)\sim f(x)\text{ si }f(x)\to 0,\qquad \operatorname{sen}(x)\sim_0 x.$$

3.- Sea D el recinto acotado limitado por las rectas de ecuaciones $x=0$, $y=1$, $y=2$ y $x+2y=6$. Calcular

$$\iint_D xy\,dx\,dy.$$

Solución: Se puede escribir $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le y\le 2,\ 0\le x\le 6-2y\}$. Es claro que D es compacto (cerrado y acotado) y medible Jordan (su frontera es unión de cuatro segmentos, y por lo tanto de medida nula). Puesto que el integrando es una función continua en $\mathbb{R}^2$, la integral propuesta es de Riemann, y para su cálculo aplicamos el teorema de Fubini, que permite escribir

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_1^2 \Big(\int_0^{6-2y} xy\,dx \Big)\,dy = \frac{13}{2}.$$

4.- Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\iint_{B((0,0),1)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Solución: La forma del conjunto de integración y la expresión del integrando aconsejan reescribir la integral en coordenadas polares. Si llamamos $\varphi(\rho,\theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big)$, se tiene que, salvo conjuntos de medida nula, $\varphi^{-1}\big(B((0,0),1)\big) = (0,1)\times(0,2\pi)$, con lo que la integral se transforma en

$$\iint_{(0,1)\times(0,2\pi)} \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

El integrando es positivo, por lo que calculamos directamente una integral iterada:

$$\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \Big)\,d\theta = \int_0^{2\pi} -\sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^1\,d\theta = 2\pi.$$

Por obtenerse un valor finito, el criterio de Tonelli asegura que la integral converge (y el teorema de Fubini afirma que su valor es 2π). Por el teorema de cambio de variables, la integral original es convergente.

5.- ¿Para qué valor del parámetro real a el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(2xyz, x^2z, x(a+xy)\big)$$

es un gradiente? Hallar para dicho valor una función potencial de $\boldsymbol{F}$.
Solución: El campo $\boldsymbol{F}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, que es un abierto estrellado. En virtud del lema de Poincaré, $\boldsymbol{F}$ será un gradiente si, y sólo si, su rotacional es nulo. Es inmediato que $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(x,y,z) = (0,-a,0)$, con lo que el valor pedido es $a=0$. Para este valor, es sencillo obtener un potencial de $\boldsymbol{F}$, por ejemplo, $f(x,y,z) = x^2yz$.

6.- Hallar la integral del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ a lo largo de la curva parametrizada por

$$\gamma(t) = \big(t\cos(t), 1+t\,\mathrm{sen}(t), e^t\big), \qquad t \in [0,2\pi].$$

Solución: Si se aplica la definición, aparece una integral de Riemann que no se puede calcular. Ahora bien, el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$, pues es el gradiente de $f(x,y,z) = xyz$, de modo que, teniendo en cuenta la regla de Barrow,

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = f\big(\gamma(2\pi)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f\big(2\pi, 1, e^{2\pi}\big) - f(0,1,1) = 2\pi e^{2\pi}.$$

7.- Sea γ la curva frontera de un abierto de Jordan D, orientada en la forma inducida por D. Si el área de D es 4 (unidades de superficie), calcular

$$\int_\gamma (3y+x^2, y^2+x)\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Solución: El campo a integrar es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, por lo que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} (3y+x^2, y^2+x)\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}(y^2+x) - \frac{\partial}{\partial y}(3y+x^2) \Big)\,dx\,dy \\ &= \iint_D (-2)\,dx\,dy = -2\text{Área}(D) = -8.\end{aligned}$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen final (13 de junio de 2006)

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Hallar el desarrollo de Taylor de orden 4 en el punto $x = 0$ de la función $f(x) = e^x \operatorname{sen}(x^2)$.
Solución: Aunque se pueden calcular las derivadas sucesivas de f en 0, esto es laborioso y aumenta el riesgo de errores en los cálculos, por lo que es preferible utilizar los desarrollos ya tabulados. Sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$
$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_2(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Del segundo de estos desarrollos, y aplicando el resultado relativo a la composición de funciones, se deduce que

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + (x^2)^4\varepsilon_2(x^2) = x^2 + x^4\varepsilon_3(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

Basta multiplicar para concluir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)\right)\left(x^2 + x^4\varepsilon_3(x)\right) \\ &= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_4(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0. \end{aligned}$$

2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \operatorname{sen}^2(x)\right)^{\log(x)}$.
Solución: La indeterminación es del tipo $1^{-\infty}$. Si llamamos L al valor del límite (finito o infinito), tenemos que

$$\log(L) = \lim_{x\to 0^+} \log(x)\log\left(1 + \operatorname{sen}^2(x)\right) = \lim_{x\to 0^+} \log(x)\operatorname{sen}^2(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\log(x),$$

donde se han aplicado sendas equivalencias. Preparamos ahora la expresión para utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = 0.$$

En conclusión, $L = e^0 = 1$.

3.- Sea a un parámetro real. ¿Qué tipo de extremo presenta en $(0,0)$ la función

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - ax^2 - ay^2 + 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2?$$

Solución: Es sencillo comprobar en primer lugar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

de modo que el punto $(0,0)$ es crítico. La hessiana de f en dicho punto es

$$\begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix},$$

que tiene un autovalor doble de valor $-2a$. Por lo tanto, si $a > 0$ la matriz es definida negativa, y f presenta en $(0,0)$ un máximo relativo, mientras que si $a < 0$ la matriz es definida positiva, y f presenta en $(0,0)$ un mínimo relativo. El caso dudoso $a=0$ se resuelve observando que para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$f(x,y)=x^4+2x^2y^2+y^4+1=\big(x^2+y^2\big)^2+1\geq 1=f(0,0),$$

con lo que f presenta en $(0,0)$ un mínimo relativo (y absoluto).

4.- Comprobar que la ecuación $e^{x+y}+\cos(x^2+y)=2$ define y como función implícita de x en un entorno de $x=0$, con $y(0)=0$. Calcular $y'(0)$.
Solución: Si definimos la función $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z)=e^{x+y}+\cos(x^2+y)-2,$$

es claro que $F\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F(0,0)=0$ y

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=e^{x+y}-\operatorname{sen}(x^2+y)\big|_{(0,0)}=1\neq 0.$$

El teorema de la función implícita garantiza que existe una función $y=y(x)$, definida y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno V de $x=0$, con $y(0)=0$ y de modo que

$$e^{x+y(x)}+\cos\big(x^2+y(x)\big)=2,\qquad (x,y)\in V. \tag{1}$$

Derivando respecto de x en (1), se tiene que

$$e^{x+y(x)}\big(1+y'(x)\big)-\operatorname{sen}\big(x^2+y(x)\big)\big(2x+y'(x)\big)=0,\qquad (x,y)\in V$$

y evaluando en $x=0$ se obtiene que $y'(0)=-1$.

5.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^{\operatorname{sen}(x)}\operatorname{arctg}(t)\,dt$.
Solución: La función $g(x)=\operatorname{arctg}(t)$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo que el teorema fundamental del cálculo integral garantiza que la función

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt,\qquad x\in\mathbb{R},$$

es derivable en $\mathbb{R}$ y $G'(x)=g(x)$ para todo x. Puesto que $h(x)=\operatorname{sen}(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, la función f, definida por

$$f(x)=G\circ h(x)=G\big(h(x)\big)=G\big(\operatorname{sen}(x)\big)=\int_0^{\operatorname{sen}(x)}\operatorname{arctg}(t)\,dt,$$

es derivable en virtud de la regla de la cadena, y su derivada es

$$f'(x)=G'\big(\operatorname{sen}(x)\big)h'(x)=g\big(\operatorname{sen}(x)\big)\cos(x)=\operatorname{arctg}\big(\operatorname{sen}(x)\big)\cos(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Como f es continua en 0 y $f(0)=0$, el límite propuesto presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, y se puede aplicar la regla de L'Hôpital, que pide calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\big(\operatorname{sen}(x)\big)\cos(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\big(\operatorname{sen}(x)\big)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Se ha aplicado sucesivamente que

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1,\qquad \operatorname{arctg}\big(f(x)\big)\sim f(x)\text{ si }f(x)\to 0,\qquad \operatorname{sen}(x)\sim_0 x.$$

6.- ¿Para qué valor del parámetro real a el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(2xyz,x^2z,x(a+xy)\big)$$

es un gradiente? Hallar para dicho valor una función potencial de $\boldsymbol{F}$.
Solución: El campo $\boldsymbol{F}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, que es un abierto estrellado. En virtud del lema de Poincaré, $\boldsymbol{F}$ será un gradiente si, y sólo si, su rotacional es nulo. Es inmediato

que $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(x, y, z) = (0, -a, 0)$, con lo que el valor pedido es $a = 0$. Para este valor, es sencillo obtener un potencial de $\boldsymbol{F}$, por ejemplo, $f(x, y, z) = x^2 y z$.

7.- Sea γ la curva frontera de un abierto de Jordan D, orientada en la forma inducida por D. Si el área de D es 4 (unidades de superficie), calcular

$$\int_\gamma (3y + x^2, y^2 + x) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Solución: El campo a integrar es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, por lo que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} (3y + x^2, y^2 + x) \cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2 + x) - \frac{\partial}{\partial y}(3y + x^2) \right) dx\, dy \\ &= \iint_D (-2)\, dx\, dy = -2\text{Área}(D) = -8.\end{aligned}$$

Solución a los problemas propuestos

1.- Se considera la función $f(x) = (x+1)e^{-x}$, $x \in R$.

a) Estudiar las asíntotas, intervalos de monotonía, extremos relativos e intervalos de concavidad y convexidad de *f*.

b) Esbozar las gráficas de *f* y de $g(x) = x^2$.

c) Determinar, en función del parámetro real *a*, el número de soluciones de la ecuación $f(x) = x^2 + a$.

---

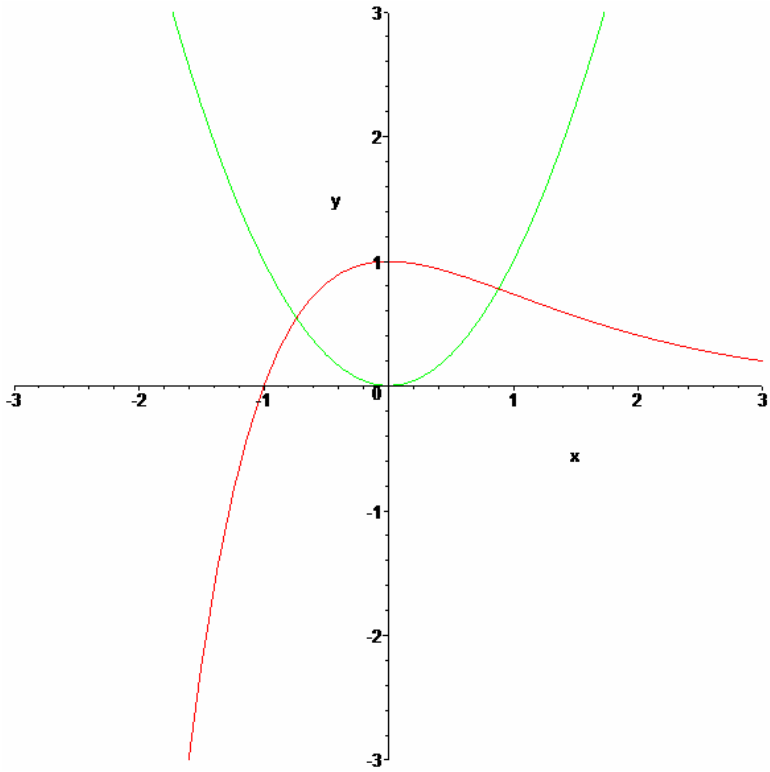
a) Es inmediato que se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

de modo que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal (cuando $x \to \infty$, $f(x)$ tiende a cero manteniéndose positiva). Habiendo una asíntota horizontal, no hay asíntotas oblicuas. Tampoco existen asíntotas verticales al ser *f* continua en todo *R*.

Como $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$, es $f'(x) > 0$ para $x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $x > 0$ por lo que la función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, \infty)$. En $x = 0$, único punto en que se anula la derivada, *f* pasa de creciente a decreciente, luego hay un máximo relativo, que también es el máximo absoluto, con $f(0) = 1$.

Calculando la derivada segunda resulta $f''(x) = (x-1)e^{-x}$, que se anula en $x = 1$, donde hay un punto de inflexión, siendo positiva para $x > 1$ y negativa para $x < 1$. Con toda esta información es inmediato trazar la gráfica de $f(x)$, que se muestra a continuación junto con la de $g(x) = x^2$:



c)Las raíces de la ecuación $f(x) = x^2 + a$ son las abscisas de los puntos de corte de las gráficas de $f(x)$ y de $x^2 + a$. Si $a > 1$ no hay puntos de corte, habiendo solo uno cuando a = 1. En el caso de ser a < 1, hay dos puntos de corte, tal como sugiere el dibujo anterior, lo que puede formalizarse así: sea $h(x) = (x^2 + a) - f(x)$; se tiene entonces h (0) = a – 1 < 0. Como $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$, resulta que h (x) toma valores positivos a partir de un cierto valor x_1 de x a la izquierda de x = 0 , y lo mismo ocurre a partir de un cierto valor x_2 a la derecha de x = 0. Aplicando el teorema de Bolzano a los intervalos $[x_1, 0]$ y $[0, x_2]$ se demuestra la existencia de las dos raíces. Además no pueden existir otras debido a que h (x) es monótona decreciente en $(-\infty, 0)$ y monótona creciente en $(0, \infty)$ (basta observar que la derivada es $2x + xe^{-x}$) .

2.- Estudiar, en función del parámetro real α, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{(x^2-1)\operatorname{sen}^3(x)}{x^\alpha(e^x-1)}dx$$

La función integrando es continua en $(0, \infty)$, luego localmente integrable en dicho intervalo, por lo que la integral impropia tiene sentido.

Descomponiendo la integral en suma de dos

$$\int_0^\infty \frac{(x^2-1)\operatorname{sen}^3(x)}{x^\alpha(e^x-1)}dx = \int_0^1 \frac{(x^2-1)\operatorname{sen}^3(x)}{x^\alpha(e^x-1)}dx + \int_1^\infty \frac{(x^2-1)\operatorname{sen}^3(x)}{x^\alpha(e^x-1)}dx$$

vemos que el integrando de la primera conserva signo constante (negativo) en (0,1), y se comporta en un entorno a la derecha de 0 como la función

$$\frac{(x^2-1)x^3}{x^\alpha.x} = \frac{(x^2-1)}{x^{\alpha-2}} \underset{0}{\approx} \frac{-1}{x^{\alpha-2}}$$

Por tanto la primera integral será convergente si $\alpha - 2 < 1$, esto es, si $\alpha < 3$, y divergente en otro caso.
Respecto del segundo sumando, dicha integral tiene un integrando que no conserva signo en $(1, \infty)$, por lo que intentaremos ver si converge absolutamente. Se tiene que

$$\left|\frac{(x^2-1)\operatorname{sen}^3(x)}{x^\alpha(e^x-1)}\right| \le \frac{x^2}{x^\alpha(e^x-1)} = \frac{x^{2-\alpha}}{(e^x-1)}$$

Como se sabe, $\int_1^\infty \frac{x^p}{e^{\beta x}}dx$ converge si $\beta > 0$ cualquiera que sea p, por lo que $\int_1^\infty \frac{x^{2-\alpha}}{e^x}dx$ converge, y como $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2-\alpha}/(e^x-1)}{x^{2-\alpha}/e^x} = 1$, la integral $\int_1^\infty \frac{x^{2-\alpha}}{e^x-1}dx$ es convergente, luego $\int_1^\infty \frac{(x^2-1)\operatorname{sen}^3(x)}{x^\alpha(e^x-1)}dx$ es absolutamente convergente, y por tanto convergente cualquiera que sea el valor de α. En resumen, la integral impropia propuesta converge si y solo si $\alpha < 3$.

3.- Sea $V = \{(x,y,z) \in R^3 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1, 0 < z < x + 2\}$. Si S es la frontera de V orientada según la normal exterior, calcular el flujo de $F(x,y,z) = (3y + z, x^2 y, y^2 z)$ a través de S.

Este es un caso en el que la aplicación del teorema de Gauss o de la divergencia está más que indicado, ya que se tiene:

$$\iint_S F.nd\sigma = \iiint_V divFdxdydz = \iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz \,.$$

El recinto V está limitado por la superficie de un cilindro de revolución de eje OZ y radio 1, los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $z = x + 2$. Por la naturaleza de V es aconsejable hacer un cambio a coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

cuyo jacobiano vale r. θ varía entre 0 y $\pi/2$, r entre 0 y 1, y z entre 0 y $r\cos\theta + 2$ por lo que la integral anterior se transforma en esta:

$$\iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{r\cos\theta+2} r^3 dz \right) dr \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (2 + r\cos\theta) r^3 dr \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{2} + \frac{r^5}{5}\cos\theta \Big|_0^1 \right) = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cos\theta \right) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\theta}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5}\,.$$

4.-Calcular de dos formas distintas la integral $\int_\Gamma (xz, y, 1).dr$ siendo Γ la curva intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = 4\,, \qquad x + y + z = 1.$$

La curva Γ es una elipse cuya parametrización es inmediata:

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\theta \\ y &= 2\,\mathrm{sen}\theta \qquad\qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z &= 1 - 2\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\theta \end{aligned}$$

Una manera de calcular la integral es aplicando directamente la definición de integral de un campo vectorial a lo largo de una curva, obteniendo así, dado que

$$\begin{aligned} x' &= -2\,\mathrm{sen}\theta \\ y' &= 2\cos\theta \\ z' &= 2\,\mathrm{sen}\theta - 2\cos\theta \end{aligned}$$

lo siguiente:

$$\int_{\Gamma}(xz, y,1).dr = \int_0^{2\pi}(2\cos\theta(1-2\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta), 2\operatorname{sen}\theta,1).(-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta-2\cos\theta)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}(-4\cos\theta\operatorname{sen}\theta+8\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta+8\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta+4\operatorname{sen}\theta\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta-2\cos\theta)d\theta =$$

$$= -\frac{8}{3}\cos^3\theta+\frac{8}{3}\operatorname{sen}^3\theta-2\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

La otra forma es emplear el teorema de Stokes. La integral anterior es igual al flujo del rotacional del campo a través de la superficie de plano $x + y + z = 1$ interior al cilindro. Como el rotacional es $(0, x, 0)$, y la normal al plano es $(1, 1, 1)$, resulta que

$$\int_{\Gamma}(xz, y,1).dr = \iint_D x\,dx\,dy$$

siendo $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Un cambio a polares nos da lo siguiente:

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\cos\theta.r\,dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^1 r^2\,dr = 0\,.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen extraordinario – 6 de septiembre de 2006
1ª Parte — Duración: de 9:00 a 10:45

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas con tinta, debiendo figurar en todas las hojas que se entreguen los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. Cada cuestión vale* **7 puntos** *sobre una nota total de 100 puntos.*

1.- Calcular, para $a > 0$, el valor de $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\log(ax)}$.

2.- Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de la función f dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ x^2 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

3.- Sea F la función definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$F(x,y) = \int_1^{xy^2} e^{t^2}\, dt.$$

Calcular $\nabla F(1,1)$.

4.- Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}\, dx$.

5.- Calcular $\displaystyle\iint_D |xy|\, dx\, dy$, siendo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}, \qquad r > 0.$$

6.- Sea a una constante real y $\boldsymbol{F}$ el campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz, yz, x - az^2)$. Determinar para qué valores de a existe un campo $\boldsymbol{G}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$, y para dichos valores hallar un campo $\boldsymbol{G}$ que verifique la igualdad anterior.

7.- Sea γ la curva resultante de la suma $\gamma_1 + \gamma_2$, siendo

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \qquad t \in [-1, 1];$$
$$\gamma_2(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big), \qquad t \in [0, \pi].$$

Calcular

$$\int_\gamma (y, -x) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Examen extraordinario – 6 de septiembre de 2006
2ª Parte – Duración: de 11:00 a 13:00

Instrucciones: *Las soluciones a los problemas deben entregarse escritas con tinta y en* **hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre**, *en este orden, del alumno. La puntuación de cada apartado, sobre el total de 100 puntos, figura a su derecha.*

1. Se considera la función f_a, definida en $(0, \infty)$ por

$$f_a(x) = x^a\, e^{2a-x},$$

donde a es un parámetro real estrictamente positivo. Se pide:

a) Demostrar que f_a alcanza su máximo absoluto en el punto $x = a$, y que dicho máximo vale $e^{a(1+\log(a))}$. *8 puntos*

b) ¿Para qué valor de a el máximo anterior es lo menor posible? *5 puntos*

c) Representar gráficamente la función $f_1(x) = xe^{2-x}$, $x \in (0, \infty)$, determinando los intervalos de monotonía, concavidad y convexidad, los extremos relativos, los puntos de inflexión y las asíntotas. *7 puntos*

2.- **a)** Hallar el desarrollo limitado de orden 2 en $x = 0$ de la función

$$g(x) = \big(x + \operatorname{sen}(x)\big)\big(1 - e^{-x}\big).$$ *5 puntos*

b) Estudiar, en función del parámetro real p, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\big(x + \operatorname{sen}(x)\big)\big(1 - e^{-x}\big)}{x^p(1 + x^3)}\, dx.$$ *11 puntos*

3.- Se considera la región acotada V de $\mathbb{R}^3$ limitada por los planos

$$z = 0, \qquad x = 0, \qquad x = 1, \qquad y = 0, \qquad y = 1,$$

y por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 4$. Dado el campo

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \big(x - x^2, y - y^2, 2z(x + y)\big),$$

se pide:

a) Calcular $\displaystyle\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$, siendo $\boldsymbol{n}$ la normal exterior a V. *8 puntos*

b) Calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la porción del borde de V contenida en el paraboloide, orientada por la normal con tercera componente positiva. *7 puntos*

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen extraordinario (6 de septiembre de 2006)

1ª Parte –CUESTIONES

1.- Calcular, para $a > 0$, el valor de $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\log(ax)}$.

Solución: La indeterminación es del tipo 0^0. Si llamamos L al límite buscado (finito o infinito), tenemos que, por las propiedades de los límites y de los logaritmos,

$$\log(L) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\log(ax)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\log(a)+\log(x)}.$$

Ahora bien, puesto que $\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty$, basta dividir numerador y denominador de la última expresión por $\log(x)$ para deducir que el valor del límite anterior es 1, y concluir que $L = e^1 = e$.

2.- Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de la función f dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ \\ x^2 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Solución: En primer lugar, en virtud de la definición de f, es claro que $f(0,0) = 0^2 = 0$. Para calcular el límite en dicho punto, separamos las distintas posibilidades:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq 0}} \left(x^2 + y^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 0.$$

En el segundo cálculo se ha utilizado que el segundo sumando es producto de la función y^2, que tiende a 0, y de la función $\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, que está acotada. En conclusión, el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto, de modo que f es continua en $(0,0)$.

Es importante centrarse en el punto indicado, el $(0,0)$, pues en muchas de las soluciones se ha hecho un estudio general que no se pedía.

3.- Sea F la función definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$F(x,y) = \int_1^{xy^2} e^{t^2}\, dt.$$

Calcular $\nabla F(1,1)$.

Solución: La función F es composición de $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $g(x,y) = xy^2$, con la función $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $h(s) = \displaystyle\int_1^s e^{t^2}\, dt$. En virtud del teorema fundamental del cálculo integral, sabemos que $h'(s) = e^{s^2}$, $s \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, las derivadas parciales de F se obtienen a partir de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = h'(xy^2)\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^{x^2y^4}y^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = h'(xy^2)\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^{x^2y^4}2xy.$$

El gradiente pedido es

$$\nabla F(1,1) = \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(1,1), \frac{\partial F}{\partial y}(1,1) \Big) = (e, 2e).$$

4.- Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}\, dx$.

Solución: Puesto que el integrando es una función racional en seno y coseno, e impar con respecto del coseno, se realiza el cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$, quedando

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} \cos(x)\, dx = \int \frac{t^2}{1-t^2}\, dt.$$

Se trata ahora de un cociente de polinomios, en el que se debe comenzar dividiendo para luego descomponer en fracciones simples:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{1-t^2}\, dt &= \int \Big(-1 - \frac{1}{t^2-1} \Big)\, dt = -t - \frac{1}{2} \int \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \Big)\, dt \\ &= -t - \frac{1}{2} \log|t-1| + \frac{1}{2} \log|t+1| + C. \end{aligned}$$

Basta deshacer el cambio de variable para concluir:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}\, dx = -\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} \log\big|\operatorname{sen}(x) - 1\big| + \frac{1}{2} \log\big|\operatorname{sen}(x) + 1\big| + C.$$

5.- Calcular $\displaystyle\iint_D |xy|\, dx\, dy$, siendo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}, \qquad r > 0.$$

Solución: El conjunto D es un compacto medible (una bola cerrada), y el integrando es continuo en D, de modo que la integral tiene perfecto sentido y es un número real. La forma de D aconseja realizar un cambio a coordenadas polares, $(x,y) = \varphi(\rho,\theta)$, donde $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \operatorname{sen}(\theta)$. Dicho cambio tiene jacobiano igual a ρ, y es inmediato comprobar que, salvo conjuntos de medida nula,

$$\varphi^{-1}(D) = \{(\rho,\theta) \colon 0 < \rho < r,\ 0 < \theta < 2\pi\} = (0,r) \times (0,2\pi),$$

lo que permite aplicar el teorema del cambio de variables para escribir la igualdad

$$\iint_D |xy|\, dx\, dy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} \big|\rho \cos(\theta) \rho \operatorname{sen}(\theta)\big|\, \rho\, d\rho\, d\theta.$$

El teorema de Fubini posibilita el cálculo de esta última integral como iterada:

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi^{-1}(D)} \rho^3 \big|\cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\big|\, d\rho\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \big|\cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\big| \Big(\int_0^r \rho^3\, d\rho \Big)\, d\theta \\ &= \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \big|\cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\big|\, d\theta. \end{aligned}$$

Para concluir, las propiedades de las funciones trigonométricas permiten poner

$$\int_0^{2\pi} \big|\cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\big|\, d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta = 4 \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 2,$$

y la integral pedida vale $r^4/2$.

6.- Sea a una constante real y $\boldsymbol{F}$ el campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz, yz, x - az^2)$. Determinar para qué valores de a existe un campo $\boldsymbol{G}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$, y para dichos valores hallar un campo $\boldsymbol{G}$ que verifique la igualdad anterior.

Solución: El campo dado es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en el abierto convexo $\mathbb{R}^3$, por lo que la condición necesaria y suficiente para que sea un rotacional es que su divergencia sea nula. Como

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y,z)=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=z+z-2az=2z(1-a),$$

se deduce que ha de ser $a=1$. En ese caso, un campo $\boldsymbol{G}=(G_1,G_2,G_3)$ verifica lo pedido si se cumple el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}=xz,\qquad \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}=yz,\qquad \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=x-z^2.$$

Como es sabido, el sistema admite infinitas soluciones; exponemos dos de ellas,

$$\boldsymbol{G}(x,y,z)=\big(\frac{1}{2}yz^2-xy,-\frac{1}{2}xz^2,0\big),\qquad \boldsymbol{H}(x,y,z)=\big(0,\frac{1}{2}x^2-xz^2,-xyz\big).$$

7.- Sea γ la curva resultante de la suma $\gamma_1+\gamma_2$, siendo

$$\begin{aligned}\gamma_1(t)&=(t,0),\qquad t\in[-1,1];\\ \gamma_2(t)&=\big(\cos(t),\operatorname{sen}(t)\big),\qquad t\in[0,\pi].\end{aligned}$$

Calcular

$$\int_\gamma (y,-x)\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Solución: Es sencillo aplicar la definición y calcular directamente:

$$\begin{aligned}\int_\gamma (y,-x)\cdot d\boldsymbol{r}&=\int_{\gamma_1}(y,-x)\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{\gamma_2}(y,-x)\cdot d\boldsymbol{r}\\ &=\int_{-1}^{1}(0,-t)\cdot(1,0)\,dt+\int_0^\pi\big(\operatorname{sen}(t),-\cos(t)\big)\cdot(-\operatorname{sen}(t),\cos(t))\,dt\\ &=\int_{-1}^{1}0\,dt+\int_0^\pi(-1)\,dt=-\pi.\end{aligned}$$

Otra posibilidad es observar que γ es la curva borde del semicírculo superior unidad D, y aplicar el teorema de Riemann-Green. Como la orientación dada en γ por la parametrización del problema coincide con la que induce D sobre la curva, se tiene que

$$\int_\gamma (y,-x)\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_D\big(\frac{\partial(-x)}{\partial x}-\frac{\partial(y)}{\partial y}\big)\,dx\,dy=-2\cdot\text{área}(D)=-2\frac{\pi}{2}=-\pi.$$

Problema 1.-

a) Derivando la función dada se obtiene:

$$f_a'(x) = ax^{a-1}e^{2a-x} - x^a e^{2a-x} = e^{2a-x}x^{a-1}(a-x)$$

Como el dominio es $(0,\infty)$, y $a > 0$, el único punto en que se anula la derivada es $x = a$, y como $f_a'(x)$ es positiva para $x < a$ y negativa para $x > a$, concluimos que en $x = a$ hay un máximo relativo, que también lo es absoluto, ya que a la derecha de a la función decrece hacia 0 y entre 0 y a crece desde el valor $f_a(0) = 0$ hasta el máximo que toma en $x = a$, que vale

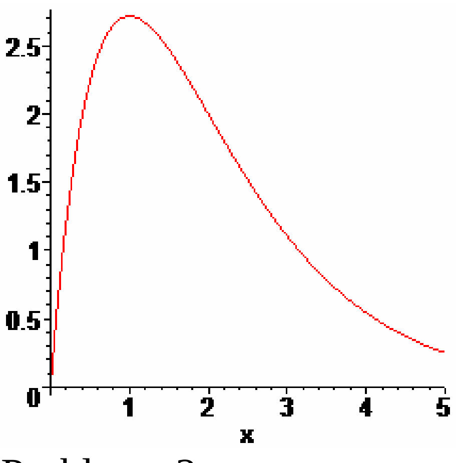
$$f_a(a) = a^a e^{2a-a} = a^a e^a = e^{a\log a}e^a = e^{a(1+\log a)}$$

b) Para hallar el mínimo de $e^{a(1+\log a)}$, derivando respecto de a e igualando la derivada a cero se obtiene:

$$e^{a(1+\log a)}(1+\log a + a.\frac{1}{a}) = e^{a(1+\log a)}(2+\log a) = 0$$

y esta expresión solo se anula si 2+log a = 0, es decir, $a = \dfrac{1}{e^2}$. Que este valor corresponde a un mínimo resulta del hecho de que la derivada de $e^{a(1+\log a)}$ es negativa para $a < \dfrac{1}{e^2}$ y positiva para $a > \dfrac{1}{e^2}$, por lo que la función $e^{a(1+\log a)}$ pasa de decreciente a creciente y el punto $a = \dfrac{1}{e^2}$ es efectivamente un mínimo.

c) Del apartado a), sustituyendo a por 1, podemos decir que la función xe^{2-x} tiene un máximo en x =1, es creciente en (0, 1) y decreciente en $(1,\infty)$, tiende a cero cuando x tiende a cero y también cuando x tiende a infinito, por lo que y = 0 es asíntota horizontal. Hallando la derivada segunda se obtiene $f_1''(x) = e^{2-x}(x-2)$, que se anula en x = 2, donde hay un punto de inflexión. Con esos datos se dibuja la gráfica



Problema 2.

a) $x + \operatorname{sen} x$ tiene por desarrollo de orden 2, 2x. En cuanto a $(1-e^{-x})$, teniendo en cuenta el de e^{-x} que es $1 - x + \dfrac{x^2}{2}$, resulta ser $x - \dfrac{x^2}{2}$. Multiplicando y quedándonos con los términos de grado 2 e inferior, resulta que el desarrollo pedido es $2x^2$.

b) La función integrando es continua en $(0, \infty)$, luego localmente integrable, por lo que la integral impropia tiene sentido.
Estudiaremos por separado cada una de las dos integrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{(x+\operatorname{sen} x)(1-e^{-x})}{x^p(1+x^3)}dx \quad , \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{(x+\operatorname{sen} x)(1-e^{-x})}{x^p(1+x^3)}dx$$

Notemos que ambos integrandos son positivos, por lo que podemos aplicar los criterios de comparación.
En la primera integral, el integrando puede estar no acotado en un entorno a la derecha de 0, debido a la presencia de x^p en el denominador. De acuerdo con lo obtenido en a), se tiene que $\frac{(x+\operatorname{sen} x)(1-e^{-x})}{x^p(1+x^3)} \underset{0}{\approx} \frac{2x^2}{x^p(1+x^3)} = \frac{2}{x^{p-2}(1+x^3)}$, por lo que I_1 se comporta en cuanto a convergencia lo mismo que $\int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}}$, que converge si $p-2<1$ y diverge en otro caso. Por tanto I_1 converge si y solo si $p < 3$.

En cuanto a I_2 nótese que

$$\frac{(x+\operatorname{sen} x)(1-e^{-x})}{x^p(1+x^3)} \underset{\infty}{\approx} \frac{1}{x^{p+2}}$$

de forma que la integral converge si y solo si $p+2>1$, o sea, $p>-1$. En conclusión, la integral propuesta converge si y solo si $-1<p<3$.

Problema 3.-

Basta aplicar el teorema de la divergencia para obtener que el flujo total vale $\iiint_V 2dxdydz$, ya que $div(F) = 1-2x+1-2y+2(x+y) = 2$. El cálculo de la integral triple es inmediato, ya que se tiene:

$$\iiint_V 2dxdydz = 2\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2+4} dz \quad = 2\int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2+4)dy = 2\int_0^1 (x^2+\frac{1}{3}+4)dx = \frac{28}{3}.$$

El flujo a través de la porción del borde de V contenida en el paraboloide podría hacerse directamente, pero es más fácil observar que si se calculan los flujos a través de las cinco porciones planas del borde de *V*, y se restan del flujo total, obtendremos el valor pedido. Que este procedimiento sea más rápido es consecuencia de lo siguiente:
Sobre el plano *x*=0, el valor del campo es $(0, y-y^2, 2zy)$. La normal exterior a la porción de plano *x*=0 que forma parte del borde de V es (-1, 0, 0) .Al multiplicar escalarmente el valor del campo por la normal anterior obtenemos 0, y por tanto el flujo a través de esa porción de plano es nulo. El mismo razonamiento vale para el resto de las porciones planas (razonar una a una). En consecuencia, el flujo a través de la porción de borde comprendida en el paraboloide es 28/3.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Soluciones del examen parcial realizado el 9 de febrero de 2007

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Obtener el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}$ que verifican

$$|x-1| + 2|3-2x| > 3.$$

Solución: Debemos distinguir los siguientes casos. En primer lugar, si $x < 1$, la inecuación se escribe como $1 - x + 2(3 - 2x) > 3$, que equivale a $x < 4/5$. Como de hecho $4/5 < 1$, todos los puntos del intervalo $(-\infty, 4/5)$ son solución de la inecuación. En segundo lugar, si $1 \leq x \leq 3/2$, ha de ser $x - 1 + 2(3 - 2x) > 3$, lo que equivale a $x < 2/3$, que es incompatible con la suposición de partida. Finalmente, si $x > 3/2$, deberá ser $x - 1 + 2(2x - 3) > 3$, lo que conduce a $x > 2$, que es coherente con la hipótesis inicial. Con todo, la solución es $(-\infty, 4/5) \cup (2, \infty)$.

2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg}(x)}{\operatorname{sen}\big(x - \operatorname{sen}(x)\big)}$.

Solución: Aplicando la equivalencia $\operatorname{sen}(x) \sim x$ en $x = 0$ en el denominador, escribimos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg}(x)}{\operatorname{sen}\big(x - \operatorname{sen}(x)\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg}(x)}{x - \operatorname{sen}(x)}.$$

A partir de aquí el valor del límite se puede obtener aplicando la regla de L'hôpital dos veces consecutivas. Sin embargo, es más rápido utilizar los desarrollos de Taylor en $x = 0$,

$$\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\,\varepsilon_1(x)\,, \quad \operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\,\varepsilon_2(x),$$

de manera que al sustituir se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^3/3 - x^4\,\varepsilon_1(x)}{x^3/6 - x^4\,\varepsilon_2(x)} = -2.$$

3.- Demostrar que para cada $x > 1$ se tiene que

$$\frac{2}{x+1} < \log(x+1) - \log(x-1) < \frac{2}{x-1}.$$

Solución: Se considera la función $f(x) = \log(x)$, que es derivable en todo su dominio $(0, \infty)$. Para cada $x > 1$ se puede considerar el intervalo $[x-1, x+1] \subset (0, \infty)$. Entonces f es continua en $[x-1, x+1]$ y derivable en $(x-1, x+1)$, y según el teorema de los incrementos finitos de Lagrange existe un punto $\xi = \xi(x)$ con $x - 1 < \xi < x + 1$ tal que $f(x+1) - f(x-1) = f'(\xi)\,(x + 1 - (x-1))$, es decir,

$$\log(x+1) - \log(x-1) = \frac{2}{\xi}.$$

Ahora, como $0 < x - 1 < \xi < x + 1$, es inmediato que $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{x-1}$, y junto con la igualdad previa se prueba inmediatamente el resultado.

4.- Determinar el polinomio de Taylor de orden 6 en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{1 + x^2}.$$

Indicar el valor de $f^{(6)}(0)$.

Solución: El cálculo de las derivadas sucesivas de la función dada es demasiado laborioso. Por ello, recurrimos al procedimiento explicado en el caso de una función dada por un cociente. El desarrollo de Taylor

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

se obtiene por composición del desarrollo de Taylor conocido de la función $\operatorname{sen}(x)$ en $x = 0$ con la función x^2. Como el denominador de f es ya un polinomio, no es necesario hacer ningún cálculo adicional. Ahora, basta realizar una división formal de los dos polinomios (colocándolos en orden de potencias creciente) hasta obtener grado 6 en el cociente. Se obtiene así el polinomio de Taylor de orden 6:

$$p(x) = x^2 - x^4 + \frac{5}{6}x^6 .$$

Finalmente, para calcular el valor de $f^{(6)}(0)$, basta recordar que el coeficiente de x^6 en el desarrollo de Taylor de f en $x = 0$ es precisamente $f^{(6)}(0)/6!$. En este caso el coeficiente es $5/6$ y por tanto $f^{(6)}(0) = 5 \cdot 5! = 600$.

5.- Sabiendo que, para cada $\theta \in \mathbb{R}$, se verifica que $\cos^4(\theta)+\operatorname{sen}^4(\theta) \geq 1/2$, calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4 + y^4}.$$

Solución: Pasando a coordenadas polares, se ha de estudiar el límite

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos^2(\theta)\,\rho^3 \operatorname{sen}^3(\theta)}{\rho^4 \cos^4(\theta) + \rho^4 \operatorname{sen}^4(\theta)} = \lim_{\rho\to 0} \rho\, \frac{\cos^2(\theta) \operatorname{sen}^3(\theta)}{\cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta)}.$$

Para afirmar que el valor del límite previo es 0, basta comprobar que la expresión

$$\left| \frac{\cos^2(\theta) \operatorname{sen}^3(\theta)}{\cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta)} \right|$$

admite una cota superior válida para todo valor del ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$. Por una parte, es inmediato que $|\cos^2(\theta) \operatorname{sen}^3(\theta)| \leq 1$. Por otra parte, para acotar la expresión dada, es necesario minorar (es decir, hacer más pequeño) el denominador. Precisamente con ese fin se indica que $|\cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta)| = \cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta) \geq 1/2$ para cualquier valor de θ. Con todo, la expresión señalada se puede acotar por 2 para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, y el valor del límite es 0.

6.- Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y)^2 - 4xy.$$

Solución: Por tratarse de una función polinómica, f es de clase C^∞ y en particular es diferenciable. Por tanto sus posibles extremos relativos se encuentran entre los puntos (x, y) que anulan sus derivadas parciales. Resolvemos entonces el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2(x + y) - 4y = 4x - 2y = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 2(x + y) - 4x = -2x + 4y = 0, \end{cases}$$

cuya única solución es el punto $(0, 0)$. Calculamos ahora la matriz hessiana en dicho punto:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se comprueba que los dos menores principales son estrictamente positivos y por tanto es definida positiva. En consecuencia hay un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$.

7.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ que posee en $x = 0$ un extremo relativo. Se define $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $F(x,y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que F admite inversa de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno del punto $(0,0)$.

Solución: El teorema de la función inversa permite resolver la cuestión, siempre que la función F satisfaga las hipótesis necesarias para su aplicación. Efectivamente, la función F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$, por ser f de la misma clase en $\mathbb{R}$. Además, llamando (F_1, F_2) a las componentes de la función F, se tiene que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1\,, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = f'(y)\,, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = f'(x)\,, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1,$$

de modo que el jacobiano de F en $(0,0)$ toma el valor $1 - f'(0)^2 = 1 \neq 0$, ya que $f'(0) = 0$ por presentar la función derivable f un extremo relativo en 0.

2ª Parte — PROBLEMAS

2.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\[2ex] 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Estudiar la existencia de derivadas direccionales de f en $(0,0)$. *5 puntos*

ii) Calcular $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *4 puntos*

iii) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. *6 puntos*

Solución: **i)** La derivada direccional en $(0,0)$ según el vector $(v_1, v_2) \neq (0,0)$ es

$$D_{(v_1,v_2)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^3 t}{v_1^2 + v_2^4 t^2}.$$

Si $v_1 = 0$ la fracción anterior es nula para cada t, luego el límite es 0. Si $v_1 \neq 0$, el límite es $0/v_1^2 = 0$.

ii) Es claro que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{y^2 y^3}{(y^2)^2 + y^4}}{\sqrt{(y^2)^2 + y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{2|y|\sqrt{y^2+1}}.$$

Este límite debe estudiarse lateralmente: si $y > 0$ vale $1/2$, y si $y < 0$ resulta $-1/2$, de modo que no existe el límite pedido.

iii) De acuerdo con **i)**,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = 0,$$

de modo que el estudio de la diferenciabilidad de f consiste en decidir si la función

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

tiende a 0 cuando (h,k) tiende a $(0,0)$. Según lo obtenido en **ii)**, la respuesta a esta cuestión es negativa, y f no es diferenciable en $(0,0)$.

3.- Se considera la ecuación

$$\operatorname{sen}(z) = x^2 + y^2 + x^4y^4 + 1 - e^z.$$

i) Comprobar que la ecuación define a z como función implícita de x e y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$. *3 puntos*

ii) Estudiar si la función $z = z(x,y)$ definida anteriormente presenta un extremo relativo en $(0,0)$. *12 puntos*

Solución: **i)** La función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + x^4y^4 + 1 - e^z - \operatorname{sen}(z)$$

se anula cuando se verifica la ecuación. Es claro que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, $f(0,0,0) = 0$ y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = -e^z - \cos(z)|_{(0,0,0)} = -2 \neq 0,$$

de modo que se puede aplicar el teorema de la función implícita para asegurar la existencia de una función $z = z(x,y)$, definida y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno U de $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$ y

$$f\big(x,y,z(x,y)\big) = x^2 + y^2 + x^4y^4 + 1 - e^{z(x,y)} - \operatorname{sen}\big(z(x,y)\big) = 0, \qquad (x,y) \in U. \quad (1)$$

ii) Por ser z diferenciable en U, si presenta en $(0,0)$ un extremo relativo el punto debe ser crítico. Derivando en (1) respecto de x se deduce que

$$2x + 4x^3y^4 - e^{z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \cos\big(z(x,y)\big)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in U, \qquad (2)$$

y particularizando en $(0,0)$ se obtiene que

$$0 + 0 - e^0\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) - \cos(0)\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0.$$

El simetría de f con respecto a las variables x e y permite asegurar que también $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$, con lo que el punto es crítico. Determinamos a continuación la hessiana de z en $(0,0)$. Derivando en (2) respecto de x (y simplificando la notación por obviar el punto (x,y) donde se evalúan las funciones) se deduce que

$$2 + 12x^2y^4 - e^z\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 - e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \operatorname{sen}(z)\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 - \cos(z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \qquad (x,y) \in U,$$

y evaluando en $(0,0)$ se deduce que $2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0$, es decir, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 1$. Como antes, es obvio que $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 1$. Si ahora derivamos respecto de y en (2), se tiene

$$16x^3y^3 - e^z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - e^z\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + \operatorname{sen}(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \cos(z)\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 0, \qquad (x,y) \in U,$$

y al sustituir en $(0,0)$ resulta que $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(0,0) = 0$. Por lo tanto,

$$Hz(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que obviamente representa una forma definida positiva, lo que asegura que z presenta en $(0,0)$ un mínimo relativo.

Problema 1.

Sean a, b y c parámetros reales, y definamos la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0, \\ ax^3 + bx + c & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Se pide:
i) Determinar para qué valores de los parámetros la función f es continua y derivable en $x = 0$.
ii) A partir de ahora, sean $b = -1$, $c = -1/2$. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f en función del valor de a.
iii) Hallar, si existe, el valor de a para el que f presenta un mínimo relativo en $x = 1$.
iv) Si fijamos ahora también $a = 1/3$, determinar el número de soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$.

Solución:
Se tiene $f(0) = c = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Para que f sea continua en $x = 0$, c debe coincidir con el límite en cero, por la izquierda, de $f(x)$, es decir, $c = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x-1}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
Una vez establecida la continuidad, la función será derivable si existen las derivadas laterales en $x = 0$ y son iguales. Se tiene que

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0, \\ 3ax^2 + b & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Los límites a derecha e izquierda de cero valen b y -1 respectivamente, luego $b = -1$.

ii) La derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0, \\ ax^3 - x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad \text{es} \quad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0, \\ 3ax^2 - 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Puesto que para $x < 0$ la derivada es negativa, la función $f(x)$ es decreciente para $x < 0$, independientemente del valor de a. Si $a = 0$ entonces $f'(x) = -1$ para $x \geq 0$, y la función es estrictamente decreciente en toda la recta real ; lo mismo ocurre si $a < 0$. En cambio, si $a > 0$, $3ax^2 - 1$ se anula, para $x > 0$, en el punto $x = \dfrac{1}{\sqrt{3a}}$, siendo $f'(x) < 0$ para $x < \dfrac{1}{\sqrt{3a}}$ y $f'(x) > 0$ para $x > \dfrac{1}{\sqrt{3a}}$. Por tanto $f(x)$ es decreciente para $x < \dfrac{1}{\sqrt{3a}}$ y creciente para $x > \dfrac{1}{\sqrt{3a}}$, siendo el punto $x = \dfrac{1}{\sqrt{3a}}$ un mínimo relativo.

iii) Del estudio hecho en el punto anterior se desprende que para que en $x = 1$ exista un mínimo relativo debe ser $1 = \dfrac{1}{\sqrt{3a}}$, de donde $a = 1/3$.

iv) Fijando ahora $a = 1/3$ la función es $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$.

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$, y $f(0) = -\dfrac{1}{2}$, siendo la función estrictamente decreciente en la semirrecta $(-\infty, 0)$, concluimos que hay una única raíz de $f(x) = 0$ en $(-\infty, 0)$ - de hecho, es el punto $x = -1$. La función sigue decreciendo hasta el mínimo en $x = 1$, por lo que en el intervalo [0, 1] no puede haber otra raíz. Dado que $f(1) < 0$, y que a partir de 1 la función es estrictamente creciente, y tiende a infinito cuando x tiende a infinito, debe haber otra raíz en $(1, \infty)$, y sólo una por la monotonía. En consecuencia la ecuación propuesta tiene dos raíces.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Soluciones del examen final (11 de junio de 2007)

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Calcular $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx.$

Solución: Puesto que

$$3-2x-x^2 = 4-(x+1)^2 = 4\Big(1-\big(\frac{x+1}{2}\big)^2\Big),$$

se realiza el cambio de variable

$$x+1 = 2\,\mathrm{sen}(t), \qquad dx = 2\cos(t)\,dt,$$

resultanto la integral

$$\int \sqrt{4\big(1-\mathrm{sen}^2(t)\big)}2\cos(t)\,dt = 4\int \cos^2(t)\,dt = 2\int \big(1+\cos(2t)\big)\,dt = 2t+\mathrm{sen}(2t)+C,$$

que tras deshacer el cambio proporciona la integral

$$2\,\mathrm{arcsen}\,\big(\frac{x+1}{2}\big)+\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}+C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

2.- Hallar los puntos críticos de la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+t^3}}\,dt\,.$$

Solución: El integrando es una función continua en $\mathbb{R}$, luego, por el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de la cadena, la función f es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = 2x\frac{\cos(x^2)}{\sqrt{1+x^6}}.$$

Los puntos críticos son aquellos en los que se anula esta expresión, es decir,

$$x_0 = 0, \qquad y_k = +\sqrt{\pi/2+k\pi}, \qquad z_k = -\sqrt{\pi/2+k\pi}, \quad k\in\{0,1,2,\ldots\}.$$

3.- Dar la expresión de la otra integral iterada de f en D, si

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\right) dy\,.$$

Solución: La expresión de la integral iterada permite determinar D como el interior del triángulo de vértices $(-1,1)$, $(0,0)$ y $(1,1)$. Por lo tanto, la otra iterada será

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_x^1 f(x,y)\,dy\right)dx.$$

4.- Si $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2<z<2\}$, calcular

$$\iiint_V \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Solución: El conjunto V es abierto y el integrando es continuo en V, luego la integral tiene perfecto sentido. Es aconsejable aplicar el cambio de variables φ a coordenadas cilíndricas,

$$(x,y,z) = \varphi(\rho,\theta,z) = \big(\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}(\theta),z\big),$$

para el que, salvo conjuntos de medida nula, se tiene que

$$\varphi^{-1}(V) = \{(\rho, \theta, z) \colon 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < z < 2,\ 0 < \rho < \sqrt{z}\,\}.$$

Entonces, el teorema del cambio de variables permite escribir

$$\iiint_V \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\varphi^{-1}(V)} \frac{\rho\cos(\theta) - \rho\,\mathrm{sen}(\theta)}{\rho} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz,$$

pudiendo aplicar ahora el teorema de Fubini:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho\big(\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\big)\, d\rho \right) dz \right) d\theta = 0.$$

5.- Dado $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 16\,,\ (x-2)^2+y^2 > 1\,,\ (x+1)^2+(y-1)^2 > 1\}$, calcular

$$\int_{\partial D} (xe^{x+y}, x + e^{x+y}(x-1)) \cdot d\boldsymbol{r}$$

cuando en ∂D se considera la orientación inducida por D.
Solución: Es inmediato observar que D es el círculo centrado en $(0,0)$ y de radio 4 al que se le han practicado dos taladros de radio 1, uno con centro en $(2,0)$ y otro con centro en $(-1,1)$. En particular, D es un abierto de Jordan, y el campo objeto de la integral es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Puesto que el cálculo directo no es aconsejable, aplicamos el teorema de Riemann-Green, que con la orientación considerada en ∂D permite sustituir la integral original por

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\big(x + e^{x+y}(x-1)\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(xe^{x+y}\big) \right) dx\, dy = \iint_D 1\, dx\, dy.$$

Esta integral representa el área de D, que es $16\pi - \pi - \pi = 14\pi$.

6.- Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1, se considera el campo definido por

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (xf(x^2+y^2), yf(x^2+y^2))\,.$$

Si γ es la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 4x+4y-7$ recorrida en sentido antihorario, calcular

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Solución: El campo $\boldsymbol{F} = (P,Q)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en el abierto estrellado $\mathbb{R}^2$, y se verifica que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xyf'(x^2+y^2)$ en todo punto. El lema de Poincaré garantiza entonces que $\boldsymbol{F}$ es un gradiente, y su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada, como la dada en el enunciado, será nula.

7.- Parametrizar la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\,,\ x > y > 0\,,\ z > 0\}$$

usando coordenadas esféricas.
Solución: Si utilizamos las coordenadas esféricas dadas por

$$x = \rho\cos(\theta)\cos(\varphi), \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi), \qquad z = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi),$$

la condición $x^2+y^2+z^2 = R^2$ se transforma en $\rho = R$, la condición $z > 0$ en $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, y la condición $x > y > 0$ en $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Por lo tanto, la parametrización resulta ser

$$\psi(\theta,\varphi) = \big(R\cos(\theta)\cos(\varphi), R\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi), R\,\mathrm{sen}(\varphi)\big), \qquad (\theta,\varphi) \in (0,\pi/4) \times (0,\pi/2).$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen final (11 de junio de 2006)

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Sea $\rho(x)$ la función tal que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen} x = \frac{x\,(120 - 14\,x^2 + x^4)}{120 + 6\,x^2} + \rho(x)\,x^5\,.$$

Calcular $\lim_{x\to 0} \rho(x)$.
Solución: Para cada $x \neq 0$ se tiene que

$$\rho(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) - \dfrac{x\,(120 - 14\,x^2 + x^4)}{120 + 6\,x^2}}{x^5}.$$

En la tabla de desarrollos de Taylor aparece que

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_1(x), \qquad \text{con } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

Por otra parte, dividiendo formalmente (en potencias crecientes de x) es sencillo obtener que

$$\frac{120 - 14\,x^2 + x^4}{120 + 6\,x^2} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{60} + x^4\varepsilon_2(x), \qquad \text{con } \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Llevando estas igualdades a la expresión de ρ, resulta que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \rho(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_1(x) - x\big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{60} + x^4\varepsilon_2(x)\big)}{x^5} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^5}{120} + x^5\big(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)\big)}{x^5} = -\frac{1}{120}.\end{aligned}$$

2.- Demostrar que $f(x) = \displaystyle\int_0^x (e^{t^2} - e)\,dt$ toma el valor 0 una única vez cuando x varía en el intervalo $[1, \infty)$.
Solución: Por ser el integrando continuo, el teorema fundamental del cálculo integral garantiza que f es derivable en dicho intervalo y que $f'(x) = e^{x^2} - e$. Es claro que $f'(x) > 0$ si $x > 1$, por lo que f toma sus valores una única vez en el intervalo. Ahora bien, si $t \in [0, 1)$ se tiene que $e^{t^2} - e < 0$, luego $f(1) < 0$; por otra parte, $\lim_{t\to\infty} (e^{t^2} - e) = +\infty$, con lo que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x (e^{t^2} - e)\,dt = +\infty.$$

Una aplicación del teorema de Bolzano en el intervalo $[1, b]$, con $b > 1$ adecuado de modo que $f(b) > 0$, permite concluir.

3.- Sea f una función cuya derivada es $\dfrac{\cos^3(x)}{1 + x^4}$. ¿Puede existir un valor de x tal que

$$|f(x + 5) - f(x)| > 5\,?$$

Solución: Para cada $x \in \mathbb{R}$, el teorema de los incrementos finitos de Lagrange asegura la existencia de un valor $\xi \in (x, x + 5)$ tal que

$$f(x + 5) - f(x) = f'(\xi)(x + 5 - x) = 5f'(\xi) = 5\frac{\cos^3(\xi)}{1 + \xi^4},$$

de donde
$$|f(x+5)-f(x)| = 5\frac{|\cos^3(\xi)|}{1+\xi^4} \le 5.$$
Por lo tanto, la respuesta es negativa.

4.- Sea $\alpha > 0$. Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
dependiendo del valor del parámetro positivo α.
Solución: En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la función es operación válida de funciones continuas, por lo que es continua. Veamos qué ocurre en $(0,0)$, para lo que expresamos la función en coordenadas polares:
$$f\big(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big) = \rho^{\alpha-1}\cos^\alpha(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad \rho > 0.$$
Si $\alpha \in (0,1)$ y $\theta \in (0,\pi/2)$ es fijo, es claro que el límite cuando ρ tiende a 0 de la expresión anterior es infinito, con lo que no existe el límite de f en $(0,0)$ y f no es continua en él.

Si $\alpha = 1$, el límite en el origen siguiendo cada semirrecta de argumento θ es $\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$, y por depender de θ, tampoco existirá el límite de f en $(0,0)$.

Si $\alpha > 1$, tenemos que
$$|f\big(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big) - 0| \le \rho^{\alpha-1} \to 0 \qquad \text{si } \rho \to 0,$$
lo que garantiza que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, y f es continua en $(0,0)$.

5.- Comprobar que la ecuación $x^3 + \cos(xy) - y = 1$ define y como función implícita de x en un entorno de $x = 0$, con $y(0) = 0$. Determinar la recta tangente a la gráfica de dicha función en $x = 0$.
Solución: La función $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = x^3 + \cos(xy) - y - 1$ verifica que $F(0,0) = 0$, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ y
$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -x\,\mathrm{sen}(xy) - 1|_{(0,0)} = -1 \neq 0.$$
El teorema de las funciones implícitas asegura que en un entorno U de $x = 0$ se puede definir $y = y(x)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U, con $y(0) = 0$ y tal que
$$F\big(x, y(x)\big) = x^3 + \cos\big(xy(x)\big) - y(x) - 1 = 0 \qquad \text{para todo } x \in U.$$
La pendiente de la recta tangente pedida es $y'(0)$, para cuyo cálculo derivamos en la igualdad anterior,
$$3x^2 - \big(y(x) + xy'(x)\big)\,\mathrm{sen}\big(xy(x)\big) - y'(x) = 0.$$
Evaluando en $x = 0$ deducimos que $y'(0) = 0$, con lo que la recta tangente es la de ecuación $y = 0$.

6.- Es la cuestión 4 del examen del segundo parcial.
7.- Es la cuestión 6 del examen del segundo parcial.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen final (11 de junio de 2006)

2ª Parte — PROBLEMAS

i) Estudiar, en función del parámetro real α, la convergencia de la integral
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^\alpha}\,dx.$$ *6 puntos*

ii) Estudiar la integrabilidad de $f(x,y) = \dfrac{e^{-y}}{x^\alpha}$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y\}$, dependiendo del valor de α. *8 puntos*

iii) Demostrar que, si $\alpha < 1$,
$$\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt\,.$$ *4 puntos*

Solución: **i)** El integrando, al que denominamos f, es continuo en $(0,\infty)$, luego localmente integrable. Para el estudio de la integral en $(0,1]$ basta observar que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$
lo que permite aplicar el criterio de comparación para deducir que el carácter de la integral es el mismo que el de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, es decir, converge si, y sólo si, $\alpha < 1$. El estudio de la integral en $[1,\infty)$ no es necesario, pues aparece como una de las integrales test, y resulta ser convergente para todo valor de α. Así, la integral original converge si, y sólo si, $\alpha < 1$.

ii) El integrando es continuo en D, abierto de $\mathbb{R}^2$, luego la integral impropia tiene sentido. Como el integrando es positivo, debemos estudiar una de sus integrales iteradas. Escogemos
$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{x^\alpha}\,dy\right)dx = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{x^\alpha}e^{-y}\Big|_x^\infty\right)dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^\alpha}\,dx.$$
Por el apartado anterior y el criterio de Tonelli, la integral propuesta converge si, y sólo si, $\alpha < 1$.

iii) Si invertimos el orden de integración en la integral del apartado ii), se tiene que
$$\iint_D \frac{e^{-y}}{x^\alpha}\,dx\,dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{e^{-y}}{x^\alpha}\,dx\right)dy = \int_0^\infty e^{-y}\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,dy,$$
con lo que se concluye lo pedido.

Otra solución consiste en aplicar una integración por partes adecuada en la primera de las integrales para llevarla a la segunda.

Solución a los problemas del examen

1.- Considérese la función $z = x^2 - 2y^2 + y^3 + 2xy$.
i) Determinar sus posibles extremos relativos y estudiar de qué tipo es cada uno.
ii)¿ Cuál es el valor mínimo de la función restringida al segmento que une los puntos (-2, 2) y (3, -3) ?

---

i) Se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 3y^2 + 2x.$$

Igualando ambas derivadas a cero, y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se obtienen los puntos (0, 0) y (-2, 2).
Las derivadas segundas de la función son:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4 + 6y$$

por lo que la matriz hessiana en (0, 0) es $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, y en (-2, 2), $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.
Claramente en (0, 0) hay un punto de silla, ya que la forma cuadrática correspondiente es indefinida, mientras que en (-2, 2) la función presenta un mínimo relativo por ser la forma cuadrática definida positiva.

ii) La recta que une los puntos (-2, 2) y (3, -3) es la recta $y = -x$. La función dada, restringida al segmento que une dichos puntos es la función de una sola variable obtenida sustituyendo *y* por –*x* , en el intervalo [-2, 3] de variación de *x*. Es, por tanto, la función $x^2 - 2(-x)^2 + (-x)^3 + 2x(-x)$, es decir, $-3x^2 - x^3$. Para buscar el mínimo de esta función en el intervalo [-2, 3] derivamos e igualamos a cero:

$$-6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ , } x = -2.$$

Como la segunda derivada es negativa en $x = 0$, en dicho punto hay un máximo relativo, en el que la función vale 0. El valor mínimo no puede alcanzarse en un punto interior al intervalo, y por tanto se alcanza en uno de los extremos, concretamente en 3, donde la función vale -54.

2.- Sea $f(x, y, z)$ un campo escalar de clase C^2 definido en R^3 y sea $g(x, y, z) = x + y + z$.
i) Probar que el campo vectorial $F = \nabla f \times \nabla g$ es solenoidal. Verificar además que, si $G = (f, f, f)$ entonces $\operatorname{rot} G = F$.
ii) Calcular

$$\int_S F.n\, d\sigma$$

cuando $f(x, y, z) = xy$ y S es la porción de la superficie de ecuación $z = x^3 y + xy^3$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada con normal con tercera componente positiva.

---

i) Se tiene que $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ $, \nabla g = (1, 1, 1)$, por lo que *F*, producto vectorial de ∇f y ∇g, es el campo $\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Calculando su divergencia se obtiene: $\operatorname{div} F = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$. Puesto que *f* es de clase C^2 el teorema de Schwarz nos asegura que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ y la divergencia de *F* es idénticamente nula, por lo que *F* es solenoidal.

Es inmediato comprobar, calculando el rotacional de $G = (f, f, f)$, que $\operatorname{rot} G = F$.

ii) Como *F* es el rotacional de *G*, aplicando el teorema de Stokes se obtiene

$$\int_S F.n\, d\sigma = \int_S \operatorname{rot} G.n\, d\sigma = \int_\Gamma G.dr,$$

siendo Γ la curva de intersección de las superficies $z = x^3 y + x y^3$, $x^2 + y^2 = 1$. La proyección de dicha curva sobre el plano *XY* es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, de modo que una parametrización de Γ es la siguiente:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = \cos^3 t \ \operatorname{sen} t + \cos t \ \operatorname{sen}^3 t = \cos t \ \operatorname{sen} t (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = \cos t \ \operatorname{sen} t \end{cases}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Esta parametrización corresponde a la orientación inducida por el recinto interior a la circunferencia y sobre Γ nos da la requerida en el enunciado.

Tenemos, por tanto, $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t \ \operatorname{sen} t)$, con lo que

$$\varphi'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)$$

En el caso que nos ocupa, el campo G es (*xy*, *xy*, *xy*), por lo que

$$\int_\Gamma G.dr = \int_0^{2\pi} (\cos t \ \operatorname{sen} t, \cos t \ \operatorname{sen} t, \cos t \ \operatorname{sen} t).(-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \ \operatorname{sen} t + \cos^3 t \ \operatorname{sen} t - \cos t \ \operatorname{sen}^3 t) dt =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} - \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^4 t}{4} - \frac{\operatorname{sen}^4 t}{4}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

3.-Se considera el campo

$$F(x,y,z) = (yz^3 e^z, x^3 e^{z^2}, z^2)$$

y la cadena de superficies $S = S_1 + S_2$ con

$$S_1 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 , \, z > 1\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 = 1 , \, 0 < z < 1\}.$$

Calcular $\int_S F.n \, d\sigma$, indicando con qué orientación de *S* se efectúa el cálculo.

La cadena de superficies dada no es la frontera de un abierto acotado de R^3. Si añadimos a la misma el disco D , $x^2 + y^2 < 1$, $z = 0$, y orientamos toda la cadena según la normal exterior, el teorema de la divergencia nos dice que

$$\iiint_V \text{div } F dxdydz = \int_S F.nd\sigma + \int_D F.nd\sigma ,$$

donde *V* es el recinto limitado por la cadena *S*+*D*. Por tanto, el valor de la integral que nos piden calcular es

$$\int_S F.nd\sigma = \iiint_V \text{div } F dxdydz - \int_D F.nd\sigma .$$

La normal exterior a la superficie *D* es (0, 0, -1), por lo que su producto escalar por *F* se reduce a z^2, y dado que el disco *D* se encuentra en el plano z = 0, el producto escalar es cero y el flujo del campo a través de *D* es nulo. En consecuencia,

$$\int_S F.nd\sigma = \iiint_V \text{div } F dxdydz = \iiint_V 2zdxdydz .$$

Calculando esta integral triple por secciones, teniendo en cuenta que los planos paralelos al plano *XY* cortan a *V* según círculos que tienen radio 1 cuando $0 \le z \le 1$, y $\sqrt{1-(z-1)^2}$ cuando $1 < z \le 2$, resulta

$$\iiint_V 2zdxdydz = \int_0^1 2z\pi \, dz + \int_1^2 2z\pi(1-(z-1)^2)dz = \frac{17\pi}{6} .$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen de 3 de septiembre de 2007

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Demostrar que para todo valor de $x \geq 0$,
$$e^x - 1 \leq x\, e^x\,.$$
Solución: Para $x = 0$ se tiene la igualdad. La función $f(t) = e^t$ es derivable en $\mathbb{R}$, por lo que, dado un valor arbitrario de $x \in (0,\infty)$, se puede aplicar el teorema de los incrementos finitos de Lagrange en el intervalo $[0,x]$, obteniendo la existencia de un punto $c \in (0,x)$ tal que
$$e^x - e^0 = e^c(x-0), \qquad \text{es decir,} \qquad e^x - 1 = e^c x.$$
Ahora bien, como la función exponencial es siempre estrictamente creciente y $c < x$, se tiene que $e^c < e^x$, con lo cual $e^x - 1 < xe^x$.

Otra solución consiste en considerar la función $g(x) = e^x - 1 - x\,e^x$, y tras observar que $g(0) = 0$ y que $g'(x) \leq 0$ si $x \in [0,\infty)$, concluir lo pedido. En este razonamiento es fundamental atender al valor de g en 0, pues en otro caso la conclusión no es válida.

2.- Probar que no existe el límite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^4}\,.$$
Solución: Basta observar que
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{y^3}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y},$$
que no existe. También se pueden determinar familias de curvas que pasan por el $(0,0)$ para las que el correspondiente límite depende de un parámetro (por ejemplo, $x = \lambda y^{3/2}$). Lo que resulta incómodo es razonar utilizando coordenadas polares.

3.- Si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clase C^1, tiene un máximo relativo en el punto $(1,2)$ con $f(1,2) = 4$, calcular la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ en la dirección del vector $(-3,1)$.
Solución: Por ser de clase C^1, la función f es diferenciable en $(1,2)$ y, por presentar en este punto un extremo relativo, es condición necesaria que $f'(1,2) = 0$ (es decir, las dos derivadas parciales de f en $(1,2)$ son nulas, y lo es también la matriz jacobiana en el punto). Entonces,
$$D_{(-3,1)}f(1,2) = f'(1,2)(-3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

4.- Probar que la ecuación
$$e^{x+y} + \mathrm{Ch}(x^2+y) = 2$$
define una función $y = y(x)$ en un entorno de $x_0 = 0$ con $y(0) = 0$. Calcular $y'(0)$.
Solución: La función $f(x,y) = e^{x+y} + \mathrm{Ch}(x^2+y) - 2$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$, $f(0,0) = 1 + 1 - 2 = 0$ y
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = e^{x+y} + \mathrm{Sh}(x^2+y)|_{(0,0)} = 1 + 0 = 1 \neq 0,$$
de modo que, por el teorema de la función implícita, existen un entorno U de $x_0 = 0$, un entorno V de $y_0 = 0$ y una función $y = y(x)$ de U en V, de clase C^∞, con $y(0) = 0$

y tal que
$$e^{x+y(x)} + \mathrm{Ch}\left(x^2 + y(x)\right) = 2, \qquad x \in U.$$
Derivando esta identidad con respecto de x, se deduce que
$$e^{x+y(x)}\left(1 + y'(x)\right) + \mathrm{Sh}\left(x^2 + y(x)\right)\left(2x + y'(x)\right) = 0, \qquad x \in U,$$
y evaluando en $x = 0$ resulta que $1 + y'(0) = 0$, de donde $y'(0) = -1$.

5.- Determinar el área del recinto plano limitado por la curva dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \sqrt{1 + \cos(\theta)}$.
Solución: Observamos en primer lugar que $f(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ es periódica de periodo 2π, continua y no negativa para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. El recinto plano limitado por la curva, digamos D, es entonces un compacto medible, y si $\varphi(\rho,\theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big)$ es el cambio a coordenadas polares, es claro que, salvo conjuntos de medida nula,
$$\varphi^{-1}(D) = \{(\rho,\theta) : 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \rho < \sqrt{1 + \cos(\theta)}\}.$$
Por lo tanto, aplicando primero el teorema del cambio de variable y luego el teorema de Fubini, podemos escribir que el área es
$$\begin{aligned}\iint_D 1\,dx\,dy &= \iint_{\varphi^{-1}(D)} \rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{1+\cos(\theta)}} \rho\,d\rho\Big)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1+\cos(\theta)}}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(1 + \cos(\theta)\big)\,d\theta = \pi.\end{aligned}$$

6.- ¿Puede ser
$$\begin{pmatrix} 1 + 2xy & x^2 \\ xy - 1 & e^x\cos(x) \end{pmatrix}$$
la matriz jacobiana de una función $\boldsymbol{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$? Razonar la respuesta.
Solución: Para que la respuesta sea afirmativa, cada fila de la matriz dada debe ser el gradiente de la correspondiente componente de f. Como se observa, f es de clase C^∞ (en su abierto de definición), y en este caso es condición necesaria para lo anterior que se verifiquen las igualdades
$$\frac{\partial}{\partial y}\big(1 + 2xy\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^2\big), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\big(xy - 1\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(e^x\cos(x)\big).$$
Es inmediato que la segunda de estas igualdades no se verifica en ningún abierto de $\mathbb{R}^2$, con lo que la respuesta es negativa.

7.- Calcular
$$\int_\gamma (x^2 + y, x)\cdot d\boldsymbol{r}$$
si γ es la elipse centrada en el origen, de ejes los ejes coordenados, y semiejes 2 y 3.
Solución: Observamos que el campo es de clase C^∞ en (el abierto estrellado) $\mathbb{R}^2$ y
$$\frac{\partial}{\partial y}\big(x^2 + y\big) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
de modo que, según el lema de Poincaré, el campo es conservativo. Puesto que la curva es cerrada, la integral propuesta es nula.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen de 3 septiembre de 2007

2ª Parte — PROBLEMAS

1. Sea f una función de clase C^∞ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se sabe que

$$f(0) = 2\,, \quad f'(0) = 0\,,$$

y que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x) + f'(x) + f''(x) = 1\,. \tag{1}$$

a) Estudiar si f presenta un extremo relativo en $x = 0$ y, en caso afirmativo, indicar de qué tipo. *6 puntos*
b) Obtener el polinomio de Taylor de orden 4 de f en $x = 0$. *6 puntos*
c) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - 4 + x^2}{x\,(\cos(x) - 1)}\,.$$ *6 puntos*

Solución: **a)** De acuerdo con (1), tomando $x = 0$ se deduce que

$$f(0) + f'(0) + f''(0) = 2 + 0 + f''(0) = 1, \qquad \text{de donde} \qquad f''(0) = -1.$$

Por lo tanto, f presenta un máximo relativo en $x = 0$.

b) Derivando sucesivamente la relación (1) se obtiene que

$$f'(x) + f''(x) + f'''(x) = 0, \qquad \text{luego} \quad f'(0) + f''(0) + f'''(0) = 0,$$

y que

$$f''(x) + f'''(x) + f^{(IV)}(x) = 0, \qquad \text{luego} \quad f''(0) + f'''(0) + f^{(IV)}(0) = 0.$$

Como $f'(0) = 0$ y $f''(0) = -1$, resulta que $f'''(0) = 1$ y $f^{(IV)}(0) = 0$, y el polinomio de Taylor pedido es

$$T_4(f,0)(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(IV)}(0)}{4!}x^4 = 2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

c) Por el apartado anterior y aplicando la equivalencia $\cos(x) - 1 \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$, queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - 4 + x^2}{x\,(\cos(x) - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\Big(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\Big) - 4 + x^2}{x\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + 2x^4\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

2.- Sea D el interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$, y sea f la función definida en el semiplano $x > 0$ por

$$f(x,y) = x^{\alpha} y \log(x)\,,$$

donde α es un parámetro real.

a) Estudiar la convergencia de la integral

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$ *9 puntos*

según los valores de α.

b) Calcular, si es posible, el valor de dicha integral para $\alpha = -1$. *7 puntos*

Solución: **a)** La función $f(x,y) = x^{\alpha} y \log(x)$ es continua en el semiplano $x > 0$, y por tanto es localmente integrable sobre el abierto D, contenido en dicho semiplano. Para estudiar la convergencia de la integral, recurrimos al criterio de Tonelli y calculamos **una integral iterada de la función en valor absoluto**. En este caso, si $(x,y) \in D$, $y > 0$ y $0 < x < 1$, de modo que $\log(x) < 0$ y por tanto

$$|f(x,y)| = -f(x,y) = -x^{\alpha} y \log(x)\,.$$

Teniendo en cuenta tanto la geometría de D como la expresión de la función, calculamos la integral iterada

$$\int_0^1 \left(\int_0^x -x^{\alpha} \log(x)\, y\, dy \right) dx = \int_0^1 -\frac{x^{\alpha+2}}{2} \log(x)\, dx = \frac{-1}{2} \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^{-\alpha-2}} dx\,,$$

que, de acuerdo con la tabla de funciones test, converge si y sólo si $-\alpha - 2 < 1$, es decir, si y sólo si, $\alpha > -3$.

b) Para el valor $\alpha = -1$ hemos visto en a) que la integral es convergente. Por tanto podemos aplicar el teorema de Fubini para llevar a cabo su cálculo mediante integración iterada. Así pues,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^{-1} \log(x)\, y\, dy \right) dx = \frac{-1}{2} \int_0^1 x\, \log(x)\, dx = \frac{-1}{8}\,,$$

sin más que integrar por partes y aplicar que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2\, \log(x) = 0$.

3.- Sea S_1 la porción del paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ con $z > 0$, y sea S_2 la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z < 0$.

a) Hallar el flujo del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (3x, 1, z)$ a través de la cadena $S_1 + S_2$, indicando qué orientación se considera en el cálculo. *9 puntos*

b) Calcular el área de S_1. *8 puntos*

Solución: **a)** El paraboloide de ecuación $z = 4 - (x^2 + y^2)$ tiene su vértice en el punto $(0,0,4)$ y se abre hacia abajo (nótese que ha de ser $x^2 + y^2 = 4 - z \geq 0$, de modo que $z \leq 4$). La superficie S_1 tiene su borde sobre el plano $z = 0$, en concreto la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Por su parte, S_2 es la semiesfera inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, y tiene su borde sobre el plano $z = 0$, coincidente con el borde de S_1. De este modo $S = S_1 + S_2$ es una cadena de superficies sin borde y orientable. Llamando V al abierto acotado que encierra dicha cadena, tenemos que $\partial V = S$ y podemos aplicar el teorema de la divergencia:

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_V 4\, dx\, dy\, dz\,,$$

considerando en S la orientación dada por la normal exterior. Para el cálculo de la última integral, basta notar que las secciones de V por planos horizontales con $-2 < z < 0$ son círculos de radio $r = \sqrt{4 - z^2}$, y para $0 < z < 4$ círculos de radio $r = \sqrt{4 - z}$, de manera que

$$\iiint_V 4\,dx\,dy\,dz = 4\left(\int_{-2}^{0} \pi\,(4 - z^2)\,dz + \int_0^4 \pi\,(4 - z)\,dz\right) = \frac{160}{3}\pi\,.$$

b) Para calcular el área de S_1 se puede considerar cualquier parametrización. Lo más sencillo es considerar

$$\varphi : B = B((0,0),2) \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x,y) \mapsto (x, y, 4 - (x^2 + y^2))\,,$$

para la que el vector normal es

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)(x,y) = (2x, 2y, 1)\,.$$

Entonces,

$$A(S_1) = \iint_B \left\| \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)(x,y) \right\| dx\,dy = \iint_B \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dx\,dy\,,$$

que se calcula fácilmente mediante un cambio a coordenadas polares y la aplicación del teorema de Fubini, resultando

$$A(S_1) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r\,\sqrt{4r^2 + 1}\,dr\right) d\theta = 2\,\pi\,\left.\frac{(4r^2+1)^{3/2}}{12}\right|_0^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)\,.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Soluciones del examen parcial realizado el 7 de febrero de 2008

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\big(e^{\cos(x)} - 1\big)$. Probar que la función se anula en infinitos puntos, y deducir que también f' se anula en infinitos puntos.

Solución: Para que f se anule debe ocurrir que $x = 0$ o que $e^{\cos(x)} = 1$, lo cual ocurre cuando $\cos(x) = 0$, es decir, cuando $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k entero, lo que prueba que, en efecto, f se anula en una infinidad de puntos. Aplicando el teorema de Rolle a la función f en cada uno de los intervalos cuyos extremos son dos ceros consecutivos de f, concluimos que también la derivada se anula en una infinidad de puntos.

2.- Si f y g son dos funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$f(1) = g(1) = 1, \qquad f'(1) = g'(1) = -2, \qquad f''(1) = 3, \quad g''(1) = -1,$$

hallar $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - g(x)}{(x-1)^2}$.

Solución: Se tiene que

$$f(x) = 1 - 2(x-1) + \frac{3}{2!}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_1(x), \qquad \lim_{x\to 1} \varepsilon_1(x) = 0,$$

y

$$g(x) = 1 - 2(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_2(x), \qquad \lim_{x\to 1} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - g(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\Big(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)\Big)(x-1)^2}{(x-1)^2} = 2.$$

3.- Demostrar que $\operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(1) < \dfrac{1}{2}$.

Solución: Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange a la función $\operatorname{arctg}(x)$ en el intervalo $[1,2]$ se obtiene

$$\operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{1+c^2}(2-1), \qquad \text{con } 1 < c < 2.$$

Por consiguiente, $1 + c^2 > 1 + 1^2 = 2$, y $\dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{2}$, y se llega al resultado pedido.

4.- Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución: La función no es continua en $(0,0)$, ya que no existe su límite en dicho punto, como se puede ver tendiendo hacia $(0,0)$ por rectas $y = mx$ y observando que el valor del límite, $\dfrac{m}{1+m^4}$, depende de m.

5.- Calcular la derivada direccional en el punto $(1,0)$ en la dirección del vector $(1,2)$ de la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + xy^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0.$$

Solución: Se tiene que, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(1+xy^2) - y^2(x^2+y^2)}{(1+xy^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(1+xy^2) - 2xy(x^2+y^2)}{(1+xy^2)^2}.$$

Puesto que estas funciones son continuas en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$, la función f es diferenciable en A, y en particular en $(1,0)$. Sustituyendo en las expresiones anteriores, resulta que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$, de modo que la derivada direccional pedida es

$$D_{(1,2)}f(1,0) = f'(1,0)(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.$$

6.- Sea $z = f(u,v)$ una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, y pongamos $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = x + y$. Si se define la función $g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ en términos de las derivadas parciales de f.

Solución: La función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la composición $f \circ \mathbf{h}$, donde $\mathbf{h} \equiv (u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La función $\mathbf{h}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ puesto que sus componentes, u y v, son polinómicas. Por hipótesis f es una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. La composición $g = f \circ \mathbf{h}$ es entonces una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y, por el teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}.$$

Al aplicar la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &== \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y), v(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y)\big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y), v(x,y)\big)x + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y)\big). \end{aligned}$$

En lo que sigue, por simplicidad, no haremos explícitos los puntos de evaluación de cada parcial. Ahora, por la linealidad de la derivación, la regla de derivación de un producto y de nuevo la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v}\right] \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right]x + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}x + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\big(x+y\big) + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

En la última igualdad se ha utilizado que, por ser f de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, el teorema de Schwarz asegura la igualdad de las parciales cruzadas segundas de f.

7.- Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = x^2y + y^2 - 4y.$$

Solución: La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, por ser polinómica, de modo que los extremos relativos serán puntos críticos: la condición $f'(x,y) = \mathbf{0}$ conduce al sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y - 4 = 0.$$

De la primera ecuación, $x = 0$ ó $y = 0$. Si $x = 0$, la segunda ecuación implica que $y = 2$. Si $y = 0$, la segunda ecuación lleva a que $x = \pm 2$. Los puntos críticos de f son entonces

$$(0,2), \quad (2,0), \quad (-2,0).$$

Pasamos al estudio de la matriz hessiana de f, $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$, en cada uno de ellos:

(a) $Hf(0,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, matriz diagonal con autovalores estrictamente positivos 4 y 2. Por tanto, $Hf(0,2)$ es definida positiva y f presenta un mínimo relativo en $(0,2)$.

(b) $Hf(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, matriz cuyos menores principales son $\Delta_1 = 0$, y $\Delta_2 = -16$. Puesto que Δ_2 es igual al producto de los autovalores y es negativo, la hessiana tiene un autovalor positivo y otro negativo, con lo que $(2,0)$ es punto de silla.

(c) $Hf(-2,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, matriz cuyos menores principales también son $\Delta_1 = 0$, y $\Delta_2 = -16$. Razonando como antes se deduce que $(-2,0)$ es punto de silla.

2ª Parte — PROBLEMAS

1. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + e^x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

i) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus extremos relativos. *6 puntos*
ii) Obtener las asíntotas de la gráfica de f y esbozar dicha gráfica. *6 puntos*
iii) Fijado un número real a, determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = a$ en función del valor de a. *8 puntos*

Solución: **i)** Sabemos que $e^x > 0$ y $x^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que f es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ por ser cociente de funciones de este tipo y no anularse el denominador en ningún $x \in \mathbb{R}$. La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{e^x x(2-x)}{(x^2+e^x)^2},$$

cuyo signo coincide con el de $x(2-x)$, esto es, $f'(x) > 0$ si $x \in (0,2)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Obviamente, $f'(x) =$ si $x = 0$ ó $x = 2$. De este análisis de la derivada se deduce que f es estrictamente creciente en el intervalo $(0,2)$, estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(2, \infty)$ y presenta un mínimo relativo en $x = 0$ ($f(0) = 0$) y un máximo relativo en $x = 2$ ($f(2) = \frac{4}{4+e^2} < 1$).

ii) *Asíntotas verticales:* no existen puesto que f está definida y es continua en $\mathbb{R}$.
Asíntotas horizontales: Por órdenes de infinitud,

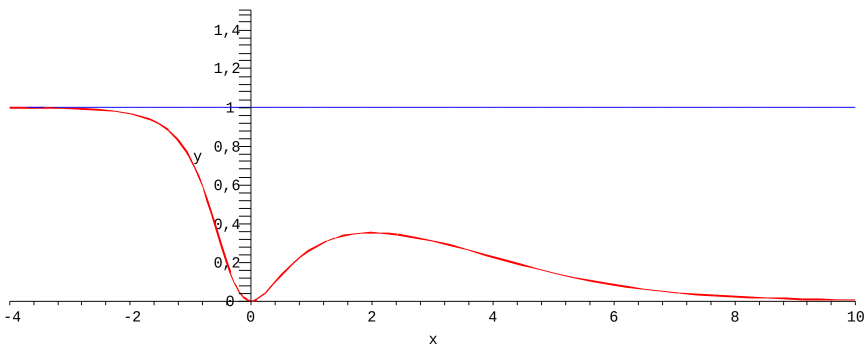
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + e^x/x^2} = 0,$$

lo que implica que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de f en $+\infty$. Por otro lado, es inmediato que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ y, por tanto, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal de f en $-\infty$

Asíntotas oblícuas: no presenta por ser $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

De acuerdo con estos resultados y lo visto en el apartado i) la gráfica de la función

f es de la forma:



iii) El estudio de los apartados i) y ii) resuelve el problema. Fijado un número real a, las soluciones de la ecuación $f(x) = a$ son justamente las abscisas de los puntos de corte de la recta $y = a$ con la gráfica de f. A la vista de la gráfica de f es inmediato que:

(1) $f(x) = a$ tiene tres soluciones si $a \in (0, \frac{4}{4+e^2})$.
(2) $f(x) = a$ tiene dos soluciones si $a = \frac{4}{4+e^2}$.
(3) $f(x) = a$ tiene una solución si $a \in (\frac{4}{4+e^2}, 1)$ ó $a = 0$.
(4) $f(x) = a$ no tiene soluciones si $a \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

2.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función continua en $\mathbb{R}^2$ determinada por

$$f(x,y) = (1 + x + y)\frac{\operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Se pide:

i) Comprobar que $f(0,0) = 1$. *4 puntos*

ii) Comprobar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$. *5 puntos*

iii) Obtener el desarrollo de Taylor de orden 6 en $(0,0)$ de la función

$$g(x,y) = \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$ *6 puntos*

iv) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. *6 puntos*

Solución: **i)** Puesto que sabemos que f es continua en $(0,0)$, $f(0,0)$ coincidirá con el límite de f en $(0,0)$, o con cualquiera de los límites siguiendo subespacios que pueda interesar considerar, o con los iterados que existan. Por ejemplo,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}(1+x)\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = 1,$$

donde se ha tenido en cuenta que $\operatorname{sen}(t) \sim t$ cuando $t \to 0$.

ii) Por definición, la parcial pedida es

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)\dfrac{\operatorname{sen}(h^2)}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)\operatorname{sen}(h^2) - h^2}{h^3}. \qquad (1)$$

Dado que $\operatorname{sen}(h) = h + h^2\varepsilon(h)$, con $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, es inmediato que

$$\operatorname{sen}(h^2) = h^2 + h^4\varepsilon(h^2) = h^2 + h^4\varepsilon_1(h), \qquad \text{con } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)\big(h^2+h^4\varepsilon_1(h)\big)-h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3+(1+h)h^4\varepsilon_1(h)}{h^3} = 1.$$

Nota: La aplicación de equivalencias en el límite (1) no es válida, pues $\operatorname{sen}(h^2)$ no aparece como un factor en la expresión bajo estudio. Un método válido, pero más largo, es aplicar tres veces la regla de L'Hôpital en (1).

iii) Sabemos que $\operatorname{sen}(t) = t - \dfrac{t^3}{6} + t^3\varepsilon_2(t)$, con $\lim_{t\to 0}\varepsilon_2(t) = 0$. Puesto que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0$, es válido escribir

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\big(x^2+y^2\big) &= x^2+y^2-\frac{\big(x^2+y^2\big)^3}{6}+\big(x^2+y^2\big)^3\varepsilon_2\big(x^2+y^2\big)\\ &= x^2+y^2-\frac{\big(x^2+y^2\big)^3}{6}+\|(x,y)\|^6\varepsilon_2\big(x^2+y^2\big).\end{aligned}$$

Basta observar que los tres primeros sumandos conforman un polinomio de grado 6 y que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon_2\big(x^2+y^2\big) = 0$ para concluir que la igualdad anterior es el desarrollo pedido.

Nota: Otra solución consiste en aplicar primero la fórmula para el seno de una suma y desarrollar cada una de las cuatro funciones que aparecen, combinando luego los correspondientes desarrollos. Lo que no es aconsejable es calcular las derivadas de g hasta orden 6, pues requiere un inmenso trabajo.

iv) Es claro, por la simetría de los papeles que juegan x e y en la definición de f, que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Resta comprobar si es 0 o no el límite en $(0,0)$ de la función

$$\begin{aligned}\varepsilon(x,y) &= \frac{f(x,y)-f(0,0)-f'(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(1+x+y)\dfrac{\operatorname{sen}\big(x^2+y^2\big)}{x^2+y^2}-1-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \frac{(1+x+y)\left(\dfrac{\operatorname{sen}\big(x^2+y^2\big)}{x^2+y^2}-1\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = (1+x+y)\frac{\operatorname{sen}\big(x^2+y^2\big)-(x^2+y^2)}{\Big(x^2+y^2\Big)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Es obvio que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x+y) = 1$, mientras que, por lo obtenido en iii),

$$\frac{\operatorname{sen}\big(x^2+y^2\big)-(x^2+y^2)}{\Big(x^2+y^2\Big)^{3/2}} = \frac{-\dfrac{\big(x^2+y^2\big)^3}{6}+\|(x,y)\|^6\varepsilon_2\big(x^2+y^2\big)}{\Big(x^2+y^2\Big)^{3/2}},$$

expresión que tiende a 0 cuando $(x,y)\to(0,0)$. Así, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y) = 0$, y f es diferenciable en $(0,0)$.

3.- Se considera la ecuación

$$z\cos(x+y)+\operatorname{sen}(z)=x+y.$$

i) Comprobar que la ecuación define a z como función implícita de x e y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de $(0,0)$, con $z(0,0)=0$. *3 puntos*

ii) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función definida anteriormente en $(0,0)$. *7 puntos*

Solución: **i)** La función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y,z)=z\cos(x+y)+\operatorname{sen}(z)-x-y,$$

es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, $f(0,0,0)=0$ y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=\big(\cos(x+y)+\cos(z)\big)|_{(0,0,0)}=2\neq 0\,.$$

En estas condiciones, el teorema de las funciones implícitas asegura que la ecuación $f(x,y,z)=0$ define implícitamente una función $z=z(x,y)$, de clase C^∞ en un entorno V de $(0,0)$, con $z(0,0)=0$, y de modo que

$$z(x,y)\cos(x+y)+\operatorname{sen}\big(z(x,y)\big)-x-y=0,\qquad (x,y)\in V. \tag{2}$$

ii) Necesitamos calcular las derivadas parciales de z en $(0,0)$, para lo que partiremos de la igualdad (2). Si derivamos respecto de x en la misma, obtenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\cos(x+y)+z(x,y)\big(-\operatorname{sen}(x+y)\big)+\cos\big(z(x,y)\big)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)-1=0,\qquad (x,y)\in V,$$

y evaluando en $(0,0)$ deducimos que

$$2\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)-1=0,\qquad \text{es decir,}\quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{1}{2}.$$

Dada la simetría de la ecuación (2) respecto de x e y, es claro que también $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\dfrac{1}{2}$, y el plano tangente es el de ecuación

$$z=z(0,0)+\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)(y-0)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Soluciones del examen realizado el 23 de junio de 2008

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Probar que $\sqrt{2}\big(1-\dfrac{1}{e}\big) \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sqrt{3+\operatorname{sen}(x)}\,dx \leq 2\big(1-\dfrac{1}{e}\big)$.

Solución: Es de sobra conocido que $e^{-x}>0$ y $-1\leq \operatorname{sen}(x)\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Por tanto, $e^{-x}\sqrt{2}\leq e^{-x}\sqrt{3+\operatorname{sen}(x)}\leq e^{-x}2$, para todo $x\in\mathbb{R}$, en particular, para todo $x\in[0,1]$. Por la monotonía de la integral tenemos entonces que

$$\int_0^1 e^{-x}\sqrt{2}\,dx \leq \int_0^1 e^{-x}\sqrt{3+\operatorname{sen}(x)}\,dx \leq \int_0^1 e^{-x}2\,dx.$$

Finalmente, por la regla de Barrow,

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx = (-e^{-x})\Big|_{x=0}^{x=1} = 1-\frac{1}{e}.$$

2.- Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que existe una constante real C de modo que

$$\int_2^x f(t)\,dt = x^2+C, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Determinar f y C.

Solución: Al ser f una función continua en $\mathbb{R}$, por el teorema fundamental del cálculo y la igualdad del enunciado,

$$\frac{d}{dx}\Big[\int_2^x f(t)\,dt\Big] = f(x) = \frac{d}{dx}[x^2+C] = 2x, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Por tanto, $f(x)=2x$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Al sustituir en la igualdad del enunciado y aplicar la regla de Barrow,

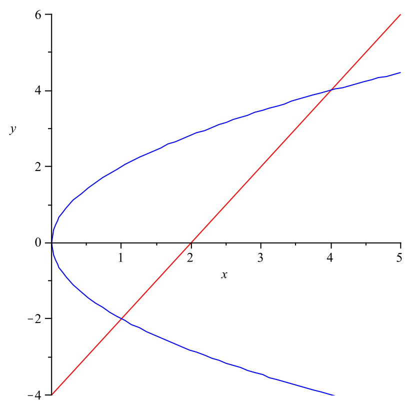
$$\int_2^x f(t)\,dt = \int_2^x 2t\,dt = t^2\Big|_{t=2}^{t=x} = x^2-4, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Así pues, $C=-4$.

3.- Calcular el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones respectivas

$$y=2x-4, \qquad y^2=4x.$$

Solución: Las ecuaciones corresponden a una recta y una parábola, respectivamente, cuyos puntos de corte son $(1,-2)$ y $(4,4)$. Llamemos D al recinto limitado por ambas curvas.



Se sabe que el área de D es

$$\text{Área}(D) = \iint_D dx\, dy.$$

A la vista de la figura, D está incluido en el intervalo $[0,4]\times[-2,4]$ y en la frontera de D la parábola siempre queda a la izquierda de la recta, esto es, $\dfrac{y^2}{4} \le \dfrac{y+4}{2}$, para todo $y \in [-2,4]$. De la aplicación del teorema de Fubini resulta entonces

$$\iint_D dx\, dy = \int_{-2}^{4} \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+4}{2}} dx \Big)\, dy = \int_{-2}^{4} \Big(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4} \Big)\, dy = \Big(\frac{y^2}{4} + 2y - \frac{y^3}{12} \Big)\Big|_{y=-2}^{y=4} = 9.$$

4.- Parametrizar la curva dada mediante las ecuaciones

$$z = x^2 + y^2, \qquad z = x + y + \frac{1}{2}.$$

Solución: Eliminando z entre las dos ecuaciones anteriores se obtiene el cilindro que proyecta la curva intersección sobre el plano OXY, cilindro cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{2} = 0.$$

Esta ecuación es también, considerada como una curva en el plano OXY, la curva proyección de la dada sobre dicho plano, y resulta ser una circunferencia. Completando cuadrados se puede escribir así:

$$\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(y - \frac{1}{2}\Big)^2 - 1 = 0.$$

Una representación paramétrica de esta circunferencia es

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{1}{2} &= \cos(t) \\ y - \frac{1}{2} &= \operatorname{sen}(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in [0, 2\pi], \qquad \text{es decir,} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \cos(t) \\ y &= \frac{1}{2} + \operatorname{sen}(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in [0, 2\pi].$$

A cada punto (x, y) sobre esta curva le corresponde un punto (x, y, z) de la curva problema, en la que $z = x + y + 1/2$. Por tanto, una parametrización de la curva dada es

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \cos(t) \\ y &= \frac{1}{2} + \operatorname{sen}(t) \\ z &= \frac{3}{2} + \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in [0, 2\pi].$$

5.- Calcular la integral del campo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \big(2xyz, x^2 z, x^2 y - \operatorname{sen}(z)\big)$ a lo largo de la curva Γ parametrizada por

$$\gamma(t) = \big(e^{t^2} \operatorname{sen}(t^2 - t), t^3 - t, 1 - \cos(\pi t)\big), \qquad t \in [0, 1].$$

Solución: Es claro que el campo vectorial $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$ y su rotacional es nulo:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(x, y, z) &= \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)(x, y, z) = \\ &= (x^2 - x^2, 2xy - 2xy, 2xz - 2xz) = (0, 0, 0), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbb{R}^3$ es abierto estrellado, por el lema de Poincaré, $\boldsymbol{F}$ es allí el gradiente de un campo escalar f, esto es, $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Esta relación corresponde al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z) = 2xyz, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z) = x^2 z, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z) = x^2 y - \operatorname{sen}(z). \end{cases}$$

Al integrar la primera respecto de x obtenemos

$$f(x,y,z) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int 2xyz\, dx = x^2yz + C(y,z),$$

donde $C(y,z)$ es la correspondiente constante de integración. Al sustituir esta expresión en la segunda ecuación tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz + C(y,z)) = x^2z + \frac{\partial}{\partial y}C(y,z) = x^2 z,$$

esto es, $\dfrac{\partial}{\partial y}C(y,z) = 0$. Así pues, $C(y,z)$ no depende de y, por lo que podemos escribir $C(y,z) = C(z)$. Finalmente, de la tercera ecuación se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz + C(z)) = x^2y + \frac{d}{dz}C(z) = x^2y - \operatorname{sen}(z),$$

de donde $\dfrac{d}{dz}C(z) = -\operatorname{sen}(z)$. Integrando respecto de z obtenemos $C(z) = \cos(z) + K$, con K constante de integración. Tomemos $K = 0$ y el potencial escalar f será de la forma $f(x,y,z) = x^2yz + \cos(z)$. Ahora, por la regla de Barrow,

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(0,0,2) - f(0,0,0) = \cos(2) - \cos(0) = \cos(2) - 1.$$

6.- Si $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < y < 5,\ 0 < x < \sqrt{9-y}\,\}$, calcular $\displaystyle\int_{\partial D}(xy, x^2y)\cdot d\boldsymbol{r}$.

Solución: D es un dominio de Jordan cuya frontera es la curva unión de los tres segmentos rectilíneos de extremos $(2,5)$, $(0,5)$, $(0,0)$ y $(3,0)$, y el arco de parábola de ecuación $y = 9 - x^2$ entre los puntos $(3,0)$ y $(2,5)$. El sentido de recorrido dado se corresponde con la orientación inducida en el borde por D. Aplicando la fórmula de Green-Riemann se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D}(xy,x^2y)\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_D \Big(\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y}\Big)\, dx\, dy = \iint_D (2xy - x)\, dx\, dy = \\ &= \int_0^5 \Big(\int_0^{\sqrt{9-y}} (2xy - x)\, dx\Big)\, dy = \int_0^5 \Big(x^2y - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{9-y}}\, dy = \\ &= \int_0^5 \Big(y(9-y) - \frac{9-y}{2}\Big)\, dy = \frac{655}{12}. \end{aligned}$$

7.- Calcular el área de la superficie S dada por las condiciones

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad 1 < z < 2.$$

Solución: La superficie S admite la parametrización

$$\varphi : (0,2\pi)\times(1,2) \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\theta,z) = (z\,\cos(\theta), z\,\operatorname{sen}(\theta), z).$$

El área de S se calcula mediante la fórmula

$$\text{Área}(S) = \iint_{(0,2\pi)\times(1,2)} ||\boldsymbol{n}(\theta,z)||\, d\theta\, dz,$$

donde $\boldsymbol{n}(\theta,z)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta,z)\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(\theta,z)$ es el vector normal a la superficie en cada punto de la misma asociado a la parametrización. Puesto que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta,z)=(-z\ \mathrm{sen}(\theta),z\ \cos(\theta),0),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\theta,z)=(\cos(\theta),\mathrm{sen}(\theta),1),$$

tenemos que

$$||\boldsymbol{n}(\theta,z)||=||(z\ \cos(\theta),z,\mathrm{sen}(\theta),-z)||=\sqrt{2}\,z.$$

Al aplicar el teorema de Fubini a la integral doble obtenemos el resultado:

$$\text{Área}(S)=\iint_{(0,2\pi)\times(1,2)}\sqrt{2}\,z\,d\theta\,dz=\sqrt{2}\,2\pi\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_{z=1}^{z=2}=\sqrt{2}\,3\pi.$$

2ª Parte — PROBLEMAS

1.- **i)** Sabiendo que $e^x>1+x$ para cada $x>0$, deducir que la función

$$f(x)=\frac{1}{e^x-\cos(x)-x}$$

es continua en $(0,\infty)$. *3 puntos*

ii) Estudiar, en función del parámetro real p, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^p\big(e^x-\cos(x)-x\big)}.$$ *10 puntos*

Solución: **i)** Es obvio que el numerador y denominador de la fracción que define f son funciones continuas en $(0,\infty)$, y f lo será si el denominador no se anula en dicho conjunto. Para comprobar esto último, basta observar que $\cos(x)\le 1$ para todo x, con lo que, según la indicación del enunciado, para cada $x>0$ se tiene que

$$e^x-\cos(x)-x=e^x-\big(\cos(x)+x\big)\ge e^x-(1+x)>0.$$

ii) Pongamos

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^p},\qquad x>0.$$

De acuerdo con el apartado i), g es continua en $(0,\infty)$, luego localmente integrable. Además, g es positiva en dicho intervalo, lo que permite aplicar los criterios de comparación para integrales impropias. Dado que g puede ser no acotada en un entorno de 0 y que el intervalo de integración es no acotado, es necesario realizar el estudio de (por ejemplo) las integrales

$$\int_0^1 g(x)\,dx\qquad\text{y}\qquad\int_1^\infty g(x)\,dx.$$

Para la primera es necesario estudiar el comportamiento de g en 0, lo que se consigue mediante el desarrollo de Taylor en 0 adecuado: comparando los desarrollos de la tabla proporcionada en el formulario, basta desarrollar hasta orden 2 para obtener que

$$e^x-\cos(x)-x=1+x+\frac{1}{2}x^2-\big(1-\frac{1}{2}x^2\big)-x+x^2\varepsilon(x)=x^2+x^2\varepsilon(x),$$

con $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=0$. Así, procede calcular el límite

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{1/x^{p+2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^{p+2}}{x^p\big(e^x-\cos(x)-x\big)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2\varepsilon(x)}=1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

para deducir, por el criterio de comparación, que las integrales

$$\int_0^1 g(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^{p+2}}$$

tienen el mismo carácter. Ahora bien, la segunda corresponde a una de las funciones test, y sabemos que converge si, y sólo si, $p+2<1$, es decir, $p<-1$.

En cuanto al comportamiento de g en $+\infty$, es claro que el término exponencial determina el orden de decrecimiento de g, lo que se confirma calculando el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\dfrac{1}{x^p e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x-\cos(x)-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{\cos(x)}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}} = 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Por lo tanto, las integrales

$$\int_1^\infty g(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^\infty x^{-p}e^{-x}\,dx$$

tienen igual carácter. Como la última converge para todo p (de nuevo el integrando es una de las funciones test), también lo hace la dada.

En conclusión, la integral propuesta converge cuando lo hacen ambas, es decir, cuando $p<-1$.

Notas: El estudio de la función $e^x-\cos(x)-x$ en 0 no se puede hacer mediante equivalencias, pues se trata de una suma de funciones. Por otra parte, en muchos ejercicios se ha intentado la comparación por mayoración (en lugar de por cociente), pero ésta es complicada, y da sólo información parcial acerca de la convergencia.

2.- Sea $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq\sqrt{x}\}$.

i) Si φ es el cambio a coordenadas polares, es decir,

$$\varphi(\rho,\theta)=\big(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta)\big),$$

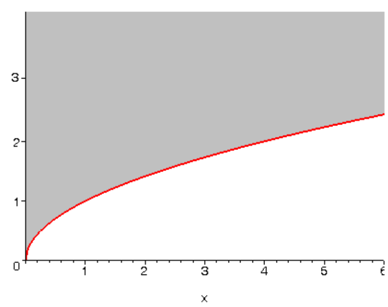
determinar (salvo conjuntos de medida nula) el conjunto $\varphi^{-1}(C)$. *6 puntos*

ii) Demostrar que la integral

$$\iint_C \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy$$

es convergente y calcular su valor. *12 puntos*

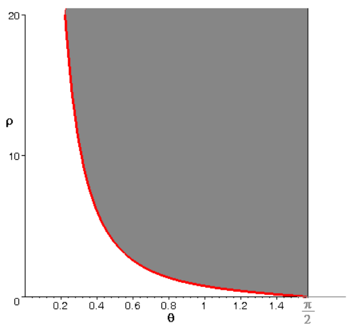
Solución: **i)** El conjunto C es el conjunto de puntos del primer cuadrante situados en y por encima de la parábola de ecuación $y=\sqrt{x}$. Es un conjunto no acotado, y parte de él se muestra en la figura adjunta. Incluye el semieje OY positivo, incluido el origen. El interior del conjunto C está dibujado en gris.



Puesto que para un punto (x, y) de C se tiene que $x = \rho\cos(\theta) \geq 0$, se deduce que $\cos(\theta) \geq 0$, y al ser $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \geq \sqrt{x} \geq 0$ también es $\mathrm{sen}(\theta) \geq 0$. De aquí que el ángulo polar varía en el intervalo $[0, \pi/2]$. La desigualdad $y \geq \sqrt{x}$ se traduce en $\rho\,\mathrm{sen}(x) \geq \sqrt{\rho\cos(\theta)}$ en el plano (θ, ρ). Elevando al cuadrado resulta

$$\rho^2\,\mathrm{sen}^2(x) \geq \rho\cos(\theta), \qquad \text{es decir,} \qquad \rho \geq \frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}. \tag{I}$$

La curva de ecuación $\rho = \dfrac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}$ es la que aparece en rojo en la siguiente figura. El conjunto $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{C})$, imagen inversa del interior de C, es el representado en gris oscuro. Sigue siendo no acotado, pero la línea vertical de ecuación $\theta = \pi/2$ lo limita por la derecha. Dicha línea es la imagen inversa del eje OY positivo. Nótese que todos los puntos del segmento $[0, \pi/2]$ del eje horizontal, en los que $\rho = 0$, se aplican sobre el origen del plano XY. Esto se debe a haber dividido por ρ en (I), pero puesto que tal segmento es un conjunto de medida nula, podemos prescindir de él.



ii) El cambio a coordenadas polares transforma la integral propuesta en esta otra:

$$\iint_{\varphi^{-1}(C)} \frac{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{\rho^2}\,d\theta\,d\rho.$$

En el abierto $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{C})$ la integral anterior tiene sentido, ya que el integrando es continuo y por tanto la función localmente integrable. Nótese que el integrando es positivo. Para aplicar el criterio de Tonnelli consideramos la integral iterada

$$\int_0^{\pi/2}\Big(\int_{\frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}}^{\infty} \frac{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{\rho^2}\,d\rho\Big)\,d\theta.$$

La integral impropia que aparece es convergente y su valor se calcula rápidamente, ya que

$$\int_{\frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}}^{\infty} \frac{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{\rho^2}\,d\rho = -\frac{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{\rho}\Big|_{\frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}}^{\infty} = \mathrm{sen}^4(\theta),$$

por lo que

$$\int_0^{\pi/2}\Big(\int_{\frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}}^{\infty} \frac{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{\rho^2}\,d\rho\Big)\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^4(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\Big(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\Big)^2\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\big(1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\big)\,d\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^2(2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

Por tanto la integral doble es convergente, y por el teorema del cambio de variable, la original también lo es y su valor coincide con el de la iterada que acabamos de hallar.

3.- Sea $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2+y^2,\ x^2+y^2 \leq 1,\ z \leq 2\}$, y sean las superficies

$$S_1 \equiv z = x^2+y^2, \quad z < 1,$$

orientada según la normal con tercera componente negativa, y

$$S_2 \equiv x^2+y^2 = 1, \quad 1 < z < 2,$$

orientada según el vector $\boldsymbol{n}(x,y,z) = (x,y,0)$. Sea S la superficie suma de S_1 y S_2.

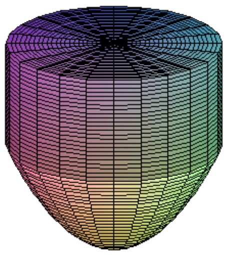
i) Calcular el volumen de V. *6 puntos*

ii) Utilizando el apartado i), calcular el flujo del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y, -x+y, z)$ a través de S. *7 puntos*

iii) ¿Cuál es el valor del flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la superficie S_2? *7 puntos*

Solución: **i)** Es claro que V es cerrado y acotado, pues si $(x,y,z) \in V$ se tiene que

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1+2^2 = 5.$$



Además, su frontera (ver la gráfica) es unión de tres superficies en $\mathbb{R}^3$, conjuntos de medida nula, luego V es compacto medible y tiene sentido el cálculo de su volumen como

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V 1\,dx\,dy\,dz.$$

Un primer método de cálculo para esta integral es el de secciones (en definitiva, una versión del teorema de Fubini), pues el corte, digamos V_z, de V por el plano horizontal a altura z es un círculo, de radio $\sqrt{z}$ si $z \in (0,1)$, y de radio 1 si $z \in (1,2)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^2 \Big(\int_{V_z} 1\,dx\,dy\Big)\,dz = \int_0^1 m(V_z)\,dz + \int_1^2 m(V_z)\,dz \\ &= \int_0^1 \pi\big(\sqrt{z}\big)^2\,dz + \int_1^2 \pi 1^2\,dz = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Una opción en este método es sustituir el cálculo de la integral $\displaystyle\int_1^2 m(V_z)\,dz$ por la fórmula del volumen de un cilindro de radio 1 y altura 1.

Otro método es aplicar el cambio a coordenadas cilíndricas,

$$(x,y,z) = \varphi(\rho,\theta,z) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta), z\big),$$

que permite expresar $\varphi^{-1}(V)$ (salvo conjuntos de medida nula) mediante las condiciones

$$z > \rho^2, \qquad \rho^2 < 1, \qquad z < 2,$$

de modo que

$$\varphi^{-1}(V) = \{(\rho,\theta,z) : 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \rho < 1,\ \rho^2 < z < 2\}.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta el valor del jacobiano de φ, por el teorema del cambio de variable se tiene que

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_{\varphi^{-1}(V)} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz.$$

Aplicando ahora el teorema de Fubini, concluimos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \Big(\int_{\rho^2}^2 \rho\, dz \Big)\, d\rho \Big)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \rho(2-\rho^2)\, d\rho \Big)\, d\theta = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

ii) El interior de V es un abierto con frontera (o borde) regular a trozos, y el campo $\boldsymbol{F}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ y con divergencia idénticamente igual a 2; se puede aplicar el teorema de la divergencia para obtener que

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz = 2\mathrm{Vol}(V) = 3\pi,$$

donde la orientación en ∂V es la de la normal exterior a V. Ahora bien, el borde de V no coincide con S, sino que $\partial V = S + S_3$, siendo S_3 la superficie dada por las condiciones $\{x^2+y^2<1,\ z=2\}$, y orientando S como se ha descrito en el enunciado y S_3 según la normal con tercera componente positiva, orientaciones ambas que coinciden con las que definen las respectivas restricciones de la normal exterior a V a S y S_3. Parametrizamos S_3 mediante $\varphi : B((0,0),1) \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y) = (x,y,2)$, con normal

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = (0,0,1),$$

que induce la orientación indicada en S_3. Así,

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma &= \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma - \int_{S_3} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \\ &= 3\pi - \iint_{B((0,0),1)} (y, -x+y, 2) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy \\ &= 3\pi - 2m\big(B((0,0),1)\big) = 3\pi - 2\pi = \pi.\end{aligned}$$

iii) Una parametrización de S_2 es $\psi : (0,2\pi) \times (1,2) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\psi(\theta,z) = \big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), z\big), \qquad (\theta,z) \in (0,2\pi) \times (1,2).$$

Es inmediato que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\psi}{\partial z}(\theta,z) = \big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0\big),$$

de modo que la parametrización induce en S_2 la orientación previamente definida en ella. Por lo tanto, según la definición de flujo y gracias al teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{S_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma &= \iint_{(0,2\pi)\times(1,2)} \big(\operatorname{sen}(\theta), -\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta), z\big) \cdot \big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0\big)\, d\theta\, dz \\ &= \iint_{(0,2\pi)\times(1,2)} \operatorname{sen}^2(\theta)\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta)\, d\theta = \pi.\end{aligned}$$

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que la ecuación $x = \alpha + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$ tiene una única raíz real.

Solución: Si para $x \in \mathbb{R}$ ponemos $f(x) = x - \alpha - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$, x es solución de la ecuación si, y sólo si, $f(x) = 0$. La función f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y su derivada $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\cos(x)$ es mayor que cero para todo $x \in \mathbb{R}$ ya que $|\cos(x)| \leq 1$. Por tanto, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y, si existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, éste es único. Ahora, puesto que $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$x - \alpha - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq x - \alpha + \frac{1}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Además, $x - \alpha + \dfrac{1}{2} < 0$ cuando $x < \alpha - \dfrac{1}{2}$ y de la segunda de las desigualdades anteriores se deduce que, en particular, $f(\alpha - 1) < 0$. De forma similar, la primera desigualdad junto con que $x - \alpha - \dfrac{1}{2} > 0$ cuando $x > \alpha + \dfrac{1}{2}$ implican que, en particular, $f(\alpha + 1) > 0$. El teorema de Bolzano aplicado a f en el intervalo cerrado y acotado $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ asegura entonces que existe un $x \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$ tal que $f(x) = 0$.

2.- Si $0 \leq \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, establecer las desigualdades

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \leq \frac{\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq \frac{1}{\cos^2(\beta)}.$$

Solución: La función $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ está bien definida en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y es derivable (en realidad de clase C^∞) en (α, β), ya que $0 \leq \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$. Su derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$. Por el teorema de los incrementos finitos de Lagrange, existe $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(\beta) - f(\alpha) = f'(x_0)(\beta - \alpha)$, esto es,

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\cos^2(x_0)}.$$

Se sabe que la función $x \mapsto \cos(x)$ es positiva y decreciente en el intervalo $[\alpha, \beta] \subseteq [0, \pi/2)$. Por tanto, la función $x \mapsto 1/\cos^2(x)$ es creciente en $[\alpha, \beta]$. Así pues,

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \leq \frac{1}{\cos^2(x_0)} \leq \frac{1}{\cos^2(\beta)}.$$

De estas desigualdades y la igualdad anterior se deduce el resultado.

3.- Hallar, si existe, el límite en $(0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

¿Es diferenciable f en $(0, 0)$?

Solución: Es inmediato comprobar que el límite de la función f cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo del camino $x = 0$ es igual a $1 \neq f(0, 0)$. Así pues, f no es continua y, por tanto, tampoco diferenciable en $(0, 0)$.

4.- Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=\big(\operatorname{tg}^2(x),e^y,2+\cos(xy)\big),\qquad g(u,v,w)=\frac{uv^2}{1+w^2}.$$

Calcular $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y)$.

Solución: La regla de la cadena implica que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w)\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)=\\&=\frac{v^2}{1+w^2}\frac{2\operatorname{tg}(x)}{\cos^2(x)}+\frac{2uv^2w}{(1+w^2)^2}\operatorname{sen}(xy)y=\\&=\frac{e^{2y}}{1+(2+\cos(xy))^2}\frac{2\operatorname{tg}(x)}{\cos^2(x)}+\frac{2\operatorname{tg}^2(x)e^{2y}(2+\cos(xy))}{(1+(2+\cos(xy))^2)^2}\operatorname{sen}(xy)y.\end{aligned}$$

5.- Es la cuestión 3 del examen del segundo parcial.

6.- Es la cuestión 4 del examen del segundo parcial.

7.- Es la cuestión 6 del examen del segundo parcial.

2ª Parte — PROBLEMAS

1.- Considérese la función $f(x,y)=2x^3+6xy^2+x^2+y^2-10$.
i) Determinar sus posibles extremos relativos y estudiar de qué tipo es cada uno. *8 puntos*
ii) Se considera la ecuación $f(x,y)=0$, una de cuyas soluciones es $x=1$, $y=1$. Estudiar si dicha ecuación permite definir una función implícita $y=y(x)$ en un entorno de $x=1$ con $y(1)=1$. *3 puntos*
iii) Si la respuesta en ii) ha sido afirmativa, calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de la $y(x)$ en el punto $x=1$. *7 puntos*

Solución: **i)** Los posibles extremos estarán entre las soluciones del sistema obtenido igualando a cero las derivadas parciales de primer orden de la función f. Se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+6y^2+2x=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=12xy+2y=0.$$

De la segunda ecuación se obtiene que, o bien $y=0$, o $x=-1/6$. Llevando el valor $y=0$ a la primera ecuación se obtienen las dos soluciones $x=0$, $x=-1/3$, por lo que tenemos los puntos $A=(0,0)$ y $B=(-1/3,0)$. Haciendo lo mismo con el valor $x=-1/6$ se llega a la ecuación $6y^2=1/6$, cuyas soluciones son $y=\pm1/6$, lo que nos da otros dos puntos en los que las primeras derivadas se anulan, que son $C=(-1/6,1/6)$ y $D=(-1/6,-1/6)$. Las correspondientes matrices hessianas son por el orden A, B, C y D las siguientes:

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}.$$

En consecuencia hay un mínimo relativo en A, un máximo relativo en B y puntos de silla en C y D.

ii) Se comprueba que, en efecto, $f(1,1)=0$, que $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=14\neq 0$. Por tanto se puede aplicar el teorema de la función implícita y existe $y=y(x)$ en un entorno de $x=1$ con $y(1)=1$, de forma que en dicho entorno $f(x,y(x))=0$.

iii) Puesto que $2x^3+6xy^2(x)+x^2+y^2(x)-10=0$, derivando respecto de x se obtiene:

$$6x^2+6y^2(x)+12xy(x)y'(x)+2x+2y(x)y'(x)=0.$$

Sustituyendo $x=1$ y teniendo en cuenta que $y(1)=1$, resulta $14+14y'(1)=0$, de donde $y'(1)=-1$. Derivando de nuevo,

$$12x+24y(x)y'(x)+12xy'(x)+12x[y'(x)]^2+12xy(x)y''(x)+2+2[y'(x)]^2+2y(x)y''(x)=0,$$

y sustituyendo los valores $x=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$, se llega a $14y''(1)+4=0$, luego $y''(1)=-2/7$, y el polinomio pedido es

$$1-(x-1)-\frac{1}{7}(x-1)^2.$$

2.- Es el problema 1 del examen del segundo parcial.

3.- Es el problema 3 del examen del segundo parcial.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen de 2 de septiembre de 2008

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Calcular $\lim_{x\to\infty} \log\left(x+x^2\right)\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Solución: Como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, se puede aplicar la equivalencia correspondiente (ver el apartado 6.5.1.10 del tema 2 en el formulario),

$$\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad x\to\infty;$$

también sabemos (ver 6.7 del mismo tema) que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

El cálculo que resta es el del límite

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(x+x^2\right)\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)+\log(1+x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

2.- Determinar el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x=0$ de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)-1}{x+1}$.

Solución: Puesto que (véase la tabla de desarrollos de Taylor 3.15 del tema 3)

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \qquad x\to 0,$$

se deduce que

$$\operatorname{sen}(x^2) - 1 = x^2 - \frac{x^6}{6} + x^6\varepsilon(x^2) - 1 = -1 + x^2 + x^3\varepsilon_1(x), \qquad x\to 0.$$

Para concluir basta dividir $-1+x^2$ entre $1+x$, ordenados de este modo, hasta llegar a grado 3 en el cociente, obteniendo que

$$f(x) = -1 + x + x^3\varepsilon_2(x), \qquad x\to 0.$$

3.- Dada la función $f(x,y) = x^6 + 2y^2 + xy$, calcular $D_{(1,3)}f(0,1)$.

Solución: La función f, por ser polinómica, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, y en particular es diferenciable en $(0,1)$, de modo que se puede aplicar el teorema 1.7 del tema 5 y escribir

$$D_{(1,3)}f(0,1) = f'(0,1)(1,3).$$

En las bases canónicas, la matriz asociada a $f'(0,1)$ es la jacobiana, por lo que calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 4,$$

resultando que

$$D_{(1,3)}f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 13.$$

4.- Probar que la ecuación $\displaystyle\int_0^{2x} \frac{e^t}{t+1}\,dt = 1$ tiene una sola raíz en $(0,\infty)$.

Solución: La función $g(t) = e^t/(t+1)$ es continua en $[0, \infty)$, y la función $2x$ es derivable en $\mathbb{R}$, con lo que podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de la cadena para obtener que la función

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{e^t}{t+1}\, dt - 1$$

es derivable en $[0, \infty)$ y

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{2x+1}.$$

Como $f'(x) > 0$ si $x > 0$, se tiene que f es inyectiva, y se anulará a lo sumo una vez. Ahora bien, $f(0) = -1 < 0$, mientras que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^t}{t+1}\, dt = \infty,$$

dado que $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$. Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Bolzano en un intervalo $[0, a]$, con a suficientemente grande de modo que $f(a) > 0$, y concluir que f se anula efectivamente en un punto del intervalo $(0, \infty)$.

5.- Sea f una función real continua en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq x^2\}$. Expresar como integral iterada la integral $\displaystyle\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$.

Solución: Dado que f es continua en el compacto medible A, es integrable en A, y podemos aplicar el teorema de Fubini. Los puntos de corte de las curvas de ecuaciones respectivas $x^2 + y^2 = 2$ (circunferencia) e $y = x^2$ (parábola) son el $(-1, 1)$ y el $(1, 1)$. Para cada $x \in [-1, 1]$ la sección de A correspondiente es el segmento vertical de extremos (x, x^2) (punto sobre la parábola) y $(x, +\sqrt{2-x^2})$ (punto sobre el arco superior de la circunferencia). En consecuencia,

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \Big(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy \Big)\, dx.$$

6.- Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{B((0,0),1)} \frac{\operatorname{sen}^3(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy.$$

Solución: La función que aparece en el integrando es continua en el abierto que constituye el recinto de integración, luego localmente integrable en él y la integral impropia tiene sentido. Como

$$\Big|\frac{\operatorname{sen}^3(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\Big| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

si converge la integral

$$\int_{B((0,0),1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

convergerá la propuesta. El cambio a polares transforma esta última integral en

$$\int_{(0,2\pi)\times(0,1)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho\, d\theta$$

que por el criterio de Tonelli-Hobson es convergente, pues la iterada

$$\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \Big)\, d\theta$$

existe y es finita, ya que vale 2π.

7.- La circulación de un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ a lo largo de una curva cerrada γ vale 4π. ¿Cuánto vale la circulación del campo $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$ a lo largo de γ si $\boldsymbol{G}=(yz, zx, xy)$? Razonar la respuesta.

Solución: Es inmediato que el campo $\boldsymbol{G}$ está definido en todo el espacio, es de clase C^∞, y su rotacional es nulo, por lo que según el lema de Poincaré $\boldsymbol{G}$ es el gradiente de un campo escalar, y en consecuencia su circulación a lo largo de la curva cerrada γ vale 0. Por tanto la circulación del campo $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$ vale 4π

2ª Parte — PROBLEMAS

1. Se considera la función f_α, dependiente del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, definida por

$$f_\alpha(x) = (\alpha - x)^2\, e^{\alpha - x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

i) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f_α y sus extremos relativos.

5 puntos

ii) Obtener las asíntotas de la gráfica de f_α y esbozar dicha gráfica.

6 puntos

iii) Probar que la integral impropia

$$\int_\alpha^\infty f_\alpha(x)\, dx$$

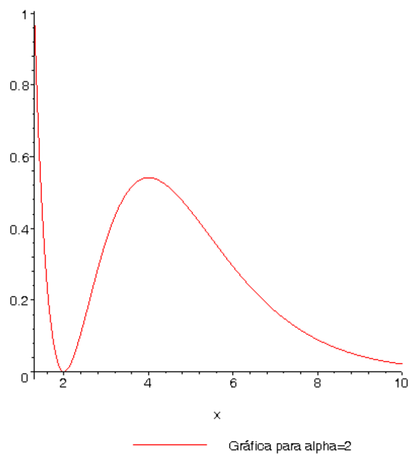
converge y hallar su valor. *6 puntos*

Solución: **i)** Derivando la función se obtiene

$$f_\alpha'(x) = -2e^{\alpha-x}(\alpha - x) - (\alpha - x)^2\, e^{\alpha-x} = -e^{\alpha-x}(\alpha - x)(2+\alpha - x),$$

y como la función exponencial no se anula, los únicos valores de x que anulan la primera derivada son $x=\alpha$ y $x=\alpha+2$. Para $x<\alpha$ y para $x>\alpha+2$ la primera derivada es negativa, y por tanto la función es decreciente, siendo creciente en el intervalo $(\alpha, \alpha+2)$. Por consiguiente, en $x=\alpha$ hay un mínimo relativo, en el que la función vale 0, y en $x=\alpha+2$ un máximo relativo.

ii) Puesto que la función está definida en todo $\mathbb{R}$ no existen asíntotas verticales. Como $\lim\limits_{x\to\infty} (\alpha - x)^2\, e^{\alpha-x} = 0$ deducimos que la recta $y=0$ es una asíntota horizontal, y por tanto no existen otras. Nótese que el límite cuando x tiende a menos infinito es infinito. Con todos estos datos ya es posible hacer un diseño de la gráfica:



iii) Se puede aplicar la proposición 3.4 del tema 8 para obtener inmediatamente que la integral propuesta es convergente, pero dado que nos piden además calcular su valor, vamos a integrar por partes, habida cuenta de que las funciones que intervienen, $(\alpha - x)^2$ y $e^{\alpha - x}$ son de clase C^∞ y el límite de su producto, cuando x tiende a ∞ existe y es finito (cero), por lo que se cumplen las condiciones exigidas. Se tiene así:

$$\int_\alpha^\infty (\alpha - x)^2 \, e^{\alpha - x} \, dx = -(\alpha - x)^2 \, e^{\alpha - x}\Big|_\alpha^\infty - 2 \int_\alpha^\infty (\alpha - x) \, e^{\alpha - x} \, dx$$

El término $-(\alpha - x)^2 \, e^{\alpha - x}\Big|_\alpha^\infty$ vale cero. Integrando de nuevo por partes resulta:

$$-2 \int_\alpha^\infty (\alpha - x) \, e^{\alpha - x} \, dx = 2(\alpha - x) \, e^{\alpha - x}\Big|_\alpha^\infty + 2 \int_\alpha^\infty e^{\alpha - x} \, dx$$

Una vez más el valor de $2(\alpha - x) \, e^{\alpha - x}\Big|_\alpha^\infty$ es cero, y la última integral es inmediata. El resultado pedido es 2.

2.- Se considera la ecuación

$$xyz + x^3 + y + z^3 = \operatorname{sen}(z).$$

i) Comprobar que la ecuación define a z como función implícita de x e y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$. *3 puntos*
ii) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x,y)$ definida anteriormente en $(0,0)$. *6 puntos*
iii) ¿Presenta $z(x,y)$ un extremo relativo en $(0,0)$? *2 puntos*

Solución: **i)** Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = xyz + x^3 + y + z^3 - \operatorname{sen}(z).$$

Un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es solución de la ecuación si, y sólo si, $f(x,y,z) = 0$. Se verifica que $f(0,0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = \big(xy + 3z^2 - \cos(z)\big)\Big|_{(0,0,0)} = -1 \neq 0$. Bajo estas condiciones el teorema de las funciones implícitas asegura que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define a z como función implícita de x e y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$.

ii) Los puntos que pertenecen al plano tangente a la gráfica de la función $z(x,y)$ en $(0,0)$ son de la forma

$$\Big(x, y, z(0,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)(y-0)\Big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ se obtienen de las ecuaciones (en las que se hace uso de la regla de la cadena):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z(x,y))\Big|_{(0,0)} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\Big)\Big|_{(0,0)} = \\
&= \Big(yz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + 3x^2 + 3z^2(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \cos(z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\Big)\Big|_{(0,0)} = \\
&= -\frac{\partial z}{\partial x}(0,0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z(x,y))\Big|_{(0,0)} = \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\Big)\Big|_{(0,0)} = \\
&= \Big(xz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 1 + 3z^2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - \cos(z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\Big)\Big|_{(0,0)} = \\
&= 1 - \frac{\partial z}{\partial y}(0,0).
\end{aligned}
$$

Esto es, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 1$, y los puntos que pertenecen al plano tangente son de la forma (x,y,y), es decir, satisfacen la ecuación

$$z = y.$$

A la misma ecuación se llega desde la condición

$$\big((x,y,z) - (0,0,z(0,0))\big)\cdot\nabla f(0,0,z(0,0)) = 0,$$

esto es, los vectores que unen el punto $(0,0,z(0,0))$ con cada punto (x,y,z) del plano tangente son ortogonales al gradiente de la función f en el punto $(0,0,z(0,0))$.

iii) La función $z(x,y)$ no puede presentar un extremo relativo en $(0,0)$ puesto que no se satisface la condición necesaria para ello: que $(0,0)$ sea un punto singular de $z(x,y)$, esto es, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$. Hemos visto en el apartado (ii) que $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 1$.

3.- Sea $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial definido por

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz, y^2 - yz, -2yz), \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

i) Comprobar que $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en $\mathbb{R}^3$ y obtener un campo $\boldsymbol{G}$ de la forma

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \big(G_1(x,y,z), 0, G_3(x,y,z)\big)$$

tal que

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{G}(x,y,z) = \boldsymbol{F}(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$ *6 puntos*

ii) Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$
\begin{aligned}
S = &\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ 1\le z\le 3\}\\
&\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-3)^2 = 1,\ z\le 3\}.
\end{aligned}
$$

Calcular el flujo del campo $\boldsymbol{F}$ a través de S respecto a la normal exterior al cilindro:
ii.1) Como una integral curvilínea. *8 puntos*
ii.2) Aplicando el teorema de la divergencia en un volumen conveniente. *9 puntos*

Solución: **i)** El campo vectorial $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en $\mathbb{R}^3$ puesto que

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y,z) = \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\Big)(x,y,z) = z + 2y - z - 2y = 0, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Las componentes del campo $\boldsymbol{G} = (G_1, 0, G_3)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial G_3}{\partial y}(x,y,z) &= F_1(x,y,z) = xz,\\
\frac{\partial G_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial G_3}{\partial x}(x,y,z) &= F_2(x,y,z) = y^2 - yz,\\
-\frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,z) &= F_3(x,y,z) = -2yz,
\end{aligned}
\right.
$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Al integrar la primera y la tercera obtenemos

$$G_3(x,y,z) = \int xz\,dy + C_3(x,z) = xyz + C_3(x,z),$$
$$G_1(x,y,z) = \int 2yz\,dy + C_1(x,z) = y^2z + C_1(x,z),$$

donde C_3 y C_1 son las correspondientes constantes de integración. Al sustituir estas expresiones en la segunda ecuación llegamos a que

$$\frac{\partial C_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial C_3}{\partial x}(x,y,z) = 0$$

y podemos tomar ambas constantes iguales a cero para obtener el campo

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \big(y^2z, 0, xyz\big), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

ii) S es una cadena de dos superficies, la primera de ellas un cilindro circular vertical cuyas secciones horizontales son circunferencias de radio 1 centradas en los puntos de la forma $(0,0,z)$ con $z \in [1,3]$, la segunda la semiesfera inferior de radio 1 centrada en el punto $(0,0,3)$.

ii.1) La frontera ∂S de S es la circunferencia horizontal de radio 1 y centro $(0,0,1)$ (el borde inferior del cilindro). Si se considera el vector normal $\boldsymbol{n}_e$ exterior al cilindro, la orientación inducida en ∂S es la positiva o antihoraria (como curva en el plano $z=1$). Por el teorema de Stokes,

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e\,d\sigma = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}_e\,d\sigma = \int_{\partial S} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Para calcular la última integral consideremos la paramatrización de ∂S dada por

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1),$$

la cual corresponde a la orientación requerida puesto que $\dfrac{d\gamma}{dt} = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)$. Así pues,

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen}^2(t), 0, \cos(t)\operatorname{sen}(t)\big) \cdot \big(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0\big)\,dt = \\ &= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} (1-\cos^2(t))\operatorname{sen}(t)\,dt = \\ &= \left(\cos(t) + \frac{\cos^3(t)}{3}\right)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Así pues, el flujo del campo $\boldsymbol{F}$ a través de S respecto a la normal exterior al cilindro es nulo:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e\,d\sigma = 0.$$

ii.2) Consideremos el volumen V limitado por la superficie S y el círculo horizontal de radio 1 y centro $(0,0,1)$, al que llamaremos S_1. Esto es, $\partial V = S \cup S_1$. Recordemos que en el apartado (ii) hemos visto que $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e\,d\sigma = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e\,d\sigma + \iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e\,d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0,$$

esto es,

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e\,d\sigma = -\iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e\,d\sigma.$$

Sea $D = (0, 2\pi) \times (0, 1)$. La parametrización de S_1 dada por $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$, definida por $\varphi(\theta, r) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), 1)$, tiene como vectores normales asociados $\boldsymbol{n}(\theta, r)$ justamente los vectores normales exteriores $\boldsymbol{n}_e(\theta, r)$ a V:

$$\boldsymbol{n}(\theta, r) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, r) \times \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\theta, r) = (0, 0, -r).$$

Con esta paramatrización y gracias al teorema de Fubini obtenemos

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e \, d\sigma = \iint_D \big(r\cos(\theta), r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\theta), -2r\,\mathrm{sen}(\theta)\big) \cdot (0, 0, -r)\, d\theta\, dr =$$

$$= \iint_D 2r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\, d\theta\, dr = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta \int_0^1 r^2\, dr = 0.$$

Así pues, también de esta forma llegamos a que el flujo del campo $\boldsymbol{F}$ a través de S respecto a la normal exterior al cilindro es nulo:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e \, d\sigma = 0.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen parcial de 6 de febrero de 2009

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Calcular $\lim_{x\to\infty}(e^x+x)\log\Big(\dfrac{e^x+1}{e^x}\Big)$.

Solución: Es claro que
$$\frac{e^x+1}{e^x}=1+\frac{1}{e^x}\longrightarrow 1 \qquad \text{cuando } x\to\infty,$$
de modo que se verifica la equivalencia
$$\log\Big(\frac{e^x+1}{e^x}\Big)\sim\frac{1}{e^x} \qquad \text{cuando } x\to\infty.$$
Entonces,
$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)\log\Big(\frac{e^x+1}{e^x}\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{e^x}=1,$$
donde en el último paso se ha aplicado la regla de L'Hôpital, o bien se ha tenido en cuenta que el orden de crecimiento de la exponencial es mayor que el de los polinomios en infinito.

2.- Probar que
$$xe^x\le e^{2x}-e^x\le xe^{2x} \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$
Solución: Supongamos que $x>0$. La función $f(t)=e^t$ es continua y derivable en el intervalo $[x,2x]$, por lo que se puede aplicar el teorema de Lagrange de los incrementos finitos, que asegura que existe $c\in(x,2x)$ tal que
$$e^{2x}-e^x=f(2x)-f(x)=(2x-x)f'(c)=xe^c.$$
Como la función exponencial es estrictamente creciente y $x<c<2x$, es obvio que $e^x<e^c<e^{2x}$, y como x es positivo, multiplicando en esta última desigualdad por x se concluye que
$$xe^x<xe^c=e^{2x}-e^x<xe^{2x},$$
como se quería.

El razonamiento es similar, pero **distinto**, si $x<0$, pues en este caso ha de razonarse en el intervalo $[2x,x]$ por ser $2x<x$. Por último, para $x=0$ la igualdad es trivial.

3.- Hallar el valor del parámetro real α para el que
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+\alpha x^2+x-1}{\cos(x)-1}=0.$$
Solución: En principio el límite es indeterminado del tipo $0/0$, lo que permite aplicar la regla de L'Hôpital para obtener el nuevo límite
$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+2\alpha x+1}{-\operatorname{sen}(x)}=\frac{0}{0}.$$
Con la misma técnica, se llega al límite
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+2\alpha}{-\cos(x)}=-1-2\alpha,$$
que será 0 sólo si $\alpha=-1/2$.

Otra posibilidad es aplicar desarrollos de Taylor en $x=0$ (todos incluidos en la correspondiente tabla) hasta orden 2 para todas las funciones presentes (un orden menor de desarrollo no permite llegar a conclusiones, mientras que un orden mayor es innecesario). Lo que **no es válido** es el **uso de equivalencias en el numerador** (sí en el denominador), pues se aplica en sumandos.

4.- Estudiar la existencia del límite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y\cos\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$
Solución: Es claro que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y=0$ (se puede razonar muy fácilmente por polares, si se desea), mientras que la función $\cos\Big(\dfrac{x}{x^2+y^2}\Big)$ es acotada. Una propiedad clásica garantiza entonces que el límite existe y es 0.

5.- Estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$ de la función
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\[2mm] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Solución: Puesto que la función vale 0 en $(0,0)$, sólo será continua en dicho punto si tiende a 0 en él. Ahora bien,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

lo que permite concluir que el límite de f en $(0,0)$, si existe, no será 0. Aunque no hace falta para responder, es sencillo ver que f no tiene límite en el origen.

6.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), 1 + x^2 + y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Escribir la diferencial de f en el punto $(1,0)$.
Solución: La función dada es claramente diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$ ya que cada una de sus componentes, $f_1 = e^x \cos(y)$, $f_2 = 1 + x^2 + y^2$ lo es. La diferencial de la función en el punto $(1,0)$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz es la matriz jacobiana de $f(x,y)$ en dicho punto. Puesto que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen}(y),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y,$$

evaluando tales derivadas parciales en $(1,0)$ se escribe inmediatamente la matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La diferencial de f en $(1,0)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$(h,k) \to \begin{pmatrix} e & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

7.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$ cumpliendo que

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f'(0) = 2.$$

Se considera también la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = f(xe^y + ye^x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcular el plano tangente a la gráfica de la función g en el punto $(0,0)$.
Solución: El plano tangente a la gráfica de la función g en el punto $(0,0)$ tiene por ecuación

$$z - g(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\,(x-0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\,(y-0)\,.$$

Consideremos la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xe^y + ye^x$. h es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$. Puesto que $g = f \circ h$, g es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ y, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = f'\big(h(0,0)\big)\,\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 2\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = f'\big(h(0,0)\big)\,\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 2\,.$$

De esto y que $g(0,0) = f(h(0,0)) = f(0) = 1$ resulta el plano tangente de ecuación

$$z - 1 = 2x + 2y\,.$$

2ª Parte — PROBLEMAS

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0, \\ -e^{-x} + c & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Se pide:
i) Determinar para qué valores de a, b y c la función f es derivable en $\mathbb{R}$. *9 puntos*
ii) Fijando $a = 1$ y $b = c - 1$, demostrar que la función f tiene una única raíz real. *8 puntos*
iii) Fijando $a = 1$ y $b = c - 1$, determinar para qué valores de c la única raíz real de f es de signo positivo. *4 puntos*
iv) Determinar razonadamente si existe $f''(0)$. Calcular los puntos de inflexión de la función f. *4 puntos*

Solución: **i)** f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ya que f es un polinomio en $(0,\infty)$ y composición y suma de funciones indefinidamente derivables en $(-\infty,0)$. Por tanto, f será derivable en $\mathbb{R}$ si lo es en $x = 0$, esto es, si existe $f'(0)$. Para ello deben existir los límites laterales del cociente incremental en $x=0$ y coincidir:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}\,.$$

Al aplicar desarrollos limitados obtenemos que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-e^{-h}+c-b}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-1+h+\epsilon(h)h+c-b}{h}$$

y el último límite existe si y sólo si $-1+c-b=0$. En tal caso, el límite es igual a 1. Ahora, por la derecha,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+ah+b-b}{h}=a.$$

Así pues, f es derivable en $x=0$ si y sólo si $b=c-1$ y $a=1$.

ii) Se ha probado en el apartado (i) que si $a=1$ y $b=c-1$ entonces f es derivable en $\mathbb{R}$ y, por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$. Además,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-e^{-x}+c=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2+x+c-1=\infty\,.$$

Se deduce de ello que existen $x_1<0$ y $x_2>0$ tales que $f(x_1)<0$ y $f(x_2)>0$. El teorema de Bolzano asegura entonces que f tiene al menos una raíz en el intervalo (x_1,x_2). Finalmente, la unicidad de la raíz de f en $\mathbb{R}$ se deriva del crecimiento estricto de f en $\mathbb{R}$, ya que $f'(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\geq 0,\\ e^{-x} & \text{si } x<0.\end{cases}$$

iii) En el apartado (ii) hemos visto que f es estrictamente creciente y tiene una única raíz en $\mathbb{R}$. Que dicha raíz sea positiva es equivalente entonces a que $f(0)=c-1<0$, esto es, $c<1$.

iv) Para que exista $f''(0)$ la función f' debe estar definida en un entorno de 0 y, como se ha probado en el apartado (i), esto ocurre si y sólo si $a=1$ y $b=c-1$. Bajo estas condiciones,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+c-1 & \text{si } x\geq 0,\\ -e^{-x}+c & \text{si } x<0,\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\geq 0,\\ e^{-x} & \text{si } x<0,\end{cases}$$

y existirá $f''(0)$ si y sólo si existen los límites laterales del cociente incremental para f' en $x=0$ y coinciden. Puesto que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+1-1}{h}=2\,,\quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-h}-1}{h}=-1\,,$$

$f''(0)$ no existe en ningún caso. Así pues, para cualesquiera valores de los parámetros a, b y c la segunda derivada de f está definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ por

$$f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x>0,\\ -e^{-x} & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Es claro que $f''(x)>0$ si $x>0$ y que $f''(x)<0$ si $x<0$. Por tanto, $x\neq 0$ no puede ser punto de inflexión de f y en $x=0$ la curvatura de f cambia. Para que $x=0$ sea un punto de inflexión de f es necesario que $f'(0)$ exista. Por el apartado (i), si $a=1$ y $b=c-1$, $x=0$ es un punto de inflexión de f.

2.- Se considera la ecuación

$$x^3+3ay^2z+az^3-3xz+2-a=0.$$

i) Probar que si $a\neq 1$ la ecuación define a z como función implícita $z=z(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $(1,0)$ con $z(1,0)=1$. *3 puntos*

ii) Comprobar que el punto $(1,0)$ es un punto crítico de la función $z=z(x,y)$ para cualquier valor de $a\neq 1$. *10 puntos*

iii) Estudiar, en función del parámetro real $a\neq 1$, si la función $z=z(x,y)$ posee un extremo relativo en el punto $(1,0)$. *13 puntos*

Solución: **i)** La función $f(x,y,z)=x^3+3ay^2z+az^3-3xz+2-a$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, ya que se trata de un polinomio. El punto $(1,0,1)$ verifica la ecuación $f(x,y,z)=0$, como se comprueba inmediatamente sustituyendo. Por último, la derivada parcial de f respecto de z es

$$\frac{\partial f}{\partial z}=3ay^2+3az^2-3x$$

cuyo valor en el punto $(1,0,1)$ es $3a-3$, distinto de cero si $a\neq 1$. Por tanto se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita y se puede asegurar que la ecuación $x^3+3ay^2z+az^3-3xz+2-a=0$

define a z como función implícita de (x, y) en un entorno de $(1, 0)$ con $z(1, 0) = 1$ cualquiera que sea el valor del parámetro $a \neq 1$.

ii) Sea $z = z(x, y)$ la función definida implícitamente por la ecuación $x^3+3ay^2z+az^3-3xz+2-a = 0$. Esto significa que cuando se sustituye z por $z(x, y)$ en dicha ecuación, lo que se obtiene es la función idénticamente nula en el entorno de $(1, 0)$ considerado. Por tanto, dado que

$$x^3 + 3ay^2z(x, y) + az(x, y)^3 - 3xz(x, y) + 2 - a = 0,$$

se deduce derivando respecto de x y de y:

$$3x^2 + 3ay^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3az(x, y)^2\frac{\partial z}{\partial x} - 3z(x, y) - 3x\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$6ayz(x, y) + 3ay^2\frac{\partial z}{\partial y} + 3az(x, y)^2\frac{\partial z}{\partial y} - 3x\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Sustituyendo $x = 1$, $y = 0$, $z(1, 0) = 1$, se obtiene:

$$3 + 3a\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) - 3 - 3\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 0,$$

$$3a\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) - 3\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

es decir,

$$(3a - 3)\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 0,$$

$$(3a - 3)\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

y como $a \neq 1$ se concluye que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 0, \frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

por lo que el punto $(1, 0)$ es un punto crítico de la función $z(x, y)$.

iii) Para estudiar el carácter del punto $(1, 0)$ necesitamos obtener la matriz hessiana. Para ello derivemos la ecuación (1) respecto de x, la (2) respecto de y y, o bien (1) respecto de y o bien (2) respecto de x. De esta manera obtenemos:

$$6x + 3ay^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 6az(x, y)\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + 3az(x, y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial x} - 3x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$6az(x, y) + 6ay\frac{\partial z}{\partial y} + 6ay\frac{\partial z}{\partial y} + 3ay^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 6az(x, y)\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2 + 3az(x, y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 3x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$6ay\frac{\partial z}{\partial y} + 3ay^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 6az(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 3az(x, y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - 3\frac{\partial z}{\partial y} - 3x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0.$$

Evaluando los primeros miembros de estas tres ecuaciones para $x = 1$, $y = 0$, $z(1, 0) = 1$, habida cuenta de que en $(1, 0)$ las derivadas primeras de $z(x, y)$ son nulas, por ser un punto crítico, resulta:

$$6 + 3a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 0) - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 0) = 0,$$

$$6a + 3a\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 0) - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 0) = 0,$$

$$3a\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1, 0) - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1, 0) = 0.$$

De la primera ecuación se deduce que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 0) = \frac{-6}{3a - 3} = \frac{-2}{a - 1},$$

y de manera análoga, de las otras dos se sigue que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 0) = \frac{-6a}{3a - 3} = \frac{-2a}{a - 1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1, 0) = 0.$$

Por consiguiente, la matriz hessiana de $z(x, y)$ en el punto (1,0) es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-2}{a-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2a}{a-1} \end{pmatrix}.$$

Como es diagonal, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal, y basta ver el signo de los mismos para saber cómo es la forma cuadrática correspondiente. Se tiene por tanto:

Si $a > 1$ ambos valores propios son negativos, la forma cuadrática es definida negativa y el punto crítico es un máximo relativo.

Si $0 < a < 1$ los valores propios son positivos, la forma cuadrática es definida positiva y tenemos un mínimo relativo.

Si $a < 0$ los valores propios son de signos distintos, y la forma cuadrática es indefinida, por lo que no hay extremo.

Queda por estudiar el caso $a = 0$, ya que en este caso la forma cuadrática es semidefinida positiva. Pero notando que para $a = 0$ la ecuación original se reduce a $x^3 - 3xz + 2 = 0$, se puede despejar explícitamente z obteniendo

$$z = \frac{x^3 + 2}{3x}.$$

En esta función de una sola variable, la derivada se anula en $x = 1$, y la segunda derivada en $x = 1$ vale 2, luego hay un mínimo.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen de 19 de junio de 2009

1ª Parte — CUESTIONES

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Hallar el desarrollo de Taylor de orden 2 en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \int_0^{2x} (t+1)^5 \cos^2(t)dt.$$

Solución: El integrando $h(t) = (t+1)^5 \cos^2(t)$ y los extremos de integración $u(x) = 0$ y $v(x) = 2x$ son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Por el teorema fundamental del cálculo integral, la función f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = h(v(x)) \cdot v'(x) = (2x+1)^5 \cos^2(2x)\, 2\,,$$

$$f''(x) = [f'(x)]' = 20\,(2x+1)^4 \cos^2(2x) - 8\,(2x+1)^5 \cos(2x)\,\operatorname{sen}(2x)\,.$$

La evaluación en $x = 0$ da: $f(0) = \displaystyle\int_0^0 (t+1)^5 \cos^2(t)dt = 0$ (por coincidir los extremos de integración), $f'(0) = 2$, $f''(0) = 20$. Así pues, el polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$ de la función f es

$$f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 = 2\,x + 10\,x^2\,.$$

2.- Demostrar que $0 \le \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sqrt{\operatorname{sen}(x)}\,dx \le \frac{\pi^3}{24}$.

Solución: Es claro que $0 \le x^2\sqrt{\operatorname{sen}(x)} \le x^2$ para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Una propiedad de la integral de Riemann permite deducir que

$$0 = \int_0^{\pi/2} 0dx \le \int_0^{\pi/2} x^2\sqrt{\operatorname{sen}(x)}dx \le \int_0^{\pi/2} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}.$$

3.- Parametrizar la curva definida por las relaciones

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 4, \quad z > 0.$$

Solución: Sumando las dos ecuaciones se deduce que $x^2 + y^2 - 2 - 2x = 0$. Reordenando los términos, la ecuación anterior puede escribirse como $(x-1)^2 + y^2 = 3$, la cual representa una circunferencia de radio $\sqrt{3}$ y centro $(1, 0)$. Parametrizamos esta circunferencia mediante coordenadas polares obteniendo

$$x = \sqrt{3}\cos(\theta) + 1, \quad y = \sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

De la expresión $z^2 = 2 + 2x$, podemos parametrizar z sin más que poner

$$z = \sqrt{2 + 2(\sqrt{3}\cos(\theta) + 1)}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

de donde concluimos una parametrización $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ de la curva, dada por

$$\gamma(\theta) = (\sqrt{3}\cos(\theta) + 1, \sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta), \sqrt{2 + 2(\sqrt{3}\cos(\theta) + 1)}), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Una solución alternativa es la siguiente: Realizando un cambio de variables a coordenadas cilíndricas, $(x, y, z) = \boldsymbol{\varphi}(\rho, \theta, z)$, dado por

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\operatorname{sen}(\theta), \quad z = z,$$

permite deducir de la primera ecuación que $\rho = z$. Teniendo en cuenta esto último, en la segunda ecuación tenemos que $\rho^2 - 2\cos(\theta)\rho - 2 = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado en ρ obtenemos dos posibles soluciones: $\rho = \cos(\theta) + \sqrt{\cos^2(\theta) + 2}$ y $\rho = \cos(\theta) - \sqrt{\cos^2(\theta) + 2}$. La segunda no es válida dado que ρ debe ser positivo. De la información obtenida podemos concluir una parametrización $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ para esta curva, dada por

$$\gamma_1(\theta) = ((\cos(\theta) + \sqrt{\cos^2(\theta) + 2})\cos(\theta), (\cos(\theta) + \sqrt{\cos^2(\theta) + 2})\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta) + \sqrt{\cos^2(\theta) + 2}).$$

4.- Dar la expresión de la otra integral iterada de f en V, si

$$\iint_V f(x, y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} f(x, y)dx\right) dy.$$

Solución: La expresión de la integral iterada permite determinar V como el interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(1,1)$. Por lo tanto, la otra integral iterada será

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)dy \right) dx.$$

5.- Sea D el recinto acotado limitado por la curva de ecuación polar $\rho = 2 + \operatorname{sen}\theta$. Calcular

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

Solución: Puesto que $|\operatorname{sen}(\theta)| \leq 1$, se verifica que $\rho(\theta) = 2 + \operatorname{sen}(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Un cambio a coordenadas polares transforma entonces el recinto D en $D' = \big\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, 0 \leq \rho \leq 2 + \operatorname{sen}(\theta)\big\}$ y, por el teorema del cambio de variable,

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_{D'} \frac{x(\rho,\theta)+y(\rho,\theta)}{x^2(\rho,\theta)+y^2(\rho,\theta)}\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \iint_{D'} \frac{\rho\cos(\theta) + \rho\operatorname{sen}(\theta)}{\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \iint_{D'} [\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)]\, d\rho\, d\theta\,.$$

La última integral se calcula mediante el teorema de Fubini y la regla de Barrow:

$$\iint_{D'} [\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)]\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[[\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)] \int_0^{2+\operatorname{sen}(\theta)} d\rho \right] d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)]\,[2 + \operatorname{sen}(\theta)]\, d\theta = \left(2\operatorname{sen}(\theta) - 2\cos(\theta) + \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2} + \frac{\theta}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{2} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi\,,$$

donde se ha hecho uso de la igualdad $\operatorname{sen}^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

6.- Dada la curva plana γ definida por las relaciones $x^2+y^2 = 1$, $y \geq 0$, y con origen en el punto $(1,0)$, calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y) = (ye^x, e^x + e^y)$ a lo largo de γ.
Solución: El campo dado está definido en todo $\mathbb{R}^2$, que es convexo, y verifica que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x$$

por lo que se puede aplicar el teorema de Poincaré y concluir que el campo es el gradiente de un potencial, que se calcula inmediatamente y resulta ser la función $f(x,y) = ye^x + e^y$. Como la curva γ es la semicircunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 situada en el semiplano superior, y dado que el punto inicial es el $(1,0)$, el final será el $(-1,0)$, de forma que

$$\int_\gamma F.dr = \int_\gamma \nabla f.dr = f(-1,0) - f(1,0) = 0.e^{-1} + e^0 - (0.e^1 + e^0) = 0.$$

7.- Calcular la circulación del campo

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \Big(\frac{y\operatorname{Ch}(xy)}{x} - \frac{\operatorname{Sh}(xy)}{x^2}, xy + \operatorname{Ch}(xy) \Big)$$

a lo largo del borde del dominio D con la orientación inducida por D, siendo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \ \ 1 - x \leq y \leq 0\}.$$

Solución: El dominio D resulta ser el interior del triángulo de vértices $(1,0)$,$(2,-1)$ y $(2,0)$, y es un dominio de Jordan. La orientación inducida por D en su borde ∂D es la que corresponde a recorrer el triángulo en el orden en que aparecen anteriormente los vértices. De acuerdo con el teorema de Green-Riemann, se tiene que la circulación del campo $F = (P,Q)$ es:

$$\int_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big) dxdy,$$

donde $P = \dfrac{y\operatorname{Ch}(xy)}{x} - \dfrac{\operatorname{Sh}(xy)}{x^2}$, $\quad Q = xy + \operatorname{Ch}(xy)$. Ahora bien,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y + y\operatorname{Sh}(xy) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\operatorname{Ch}(xy)}{x} + y\operatorname{Sh}(xy) - \frac{x\operatorname{Ch}(xy)}{x^2} = y\operatorname{Sh}(xy)$$

por lo que

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big) dxdy = \iint_D ydxdy = \int_1^2 \Big(\int_{1-x}^0 ydy \Big) dx = \int_1^2 \frac{-(1-x)^2}{2} dx = -\frac{1}{6}.$$

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Determinar el número de soluciones de la ecuación $x\,\mathrm{sen}(x) = 1/2$ en $[0, \pi/2]$.
Solución: Las soluciones de la ecuación dada son los ceros de la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - 1/2$, continua en $[0, \pi/2]$ y tal que

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0, \qquad f(\pi/2) = \frac{\pi - 1}{2} > 0.$$

El teorema de Bolzano garantiza que f se anula al menos una vez en el intervalo. Ahora bien,

$$f'(x) = \mathrm{sen}(x) + x\cos(x) > 0 \qquad \text{para cada } x \in (0, \pi/2),$$

con lo que f es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$ y toma sus valores una sola vez. En conclusión, la solución es única.

2.- Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{arctg}(x))^{1/\log(x)}$.
Solución: El límite presenta, en principio, una indeterminación del tipo 0^0. Si llamamos L a su valor (finito o infinito), tenemos que, por las propiedades de los límites,

$$\log(L) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\mathrm{arctg}(x))}{\log(x)} = \frac{-\infty}{-\infty}. \qquad (*)$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital a este último límite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1/(1+x^2)}{\mathrm{arctg}(x)}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}(x)} = 1.$$

En el último paso se ha tenido en cuenta que $\mathrm{arctg}(x) \sim x$ cuando $x \to 0$. Por lo tanto, se concluye que $L = e^1 = e$.
Nota: El límite en $(*)$ se puede resolver aplicando la equivalencia anterior directamente, pero debe justificarse que su utilización "dentro del logaritmo" es válida (el uso permitido se reduce a la sustitución de **factores** por otros equivalentes).

3.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $(1, 2)$ que cumple que $D_{(2,-3)}f(1, 2) = 5$ y $D_{(3,-5)}f(1, 2) = 3$. Determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.
Solución: Por ser f diferenciable en $(1, 2)$, se tiene que para cada vector (v_1, v_2) no nulo,

$$D_{(v_1,v_2)}f(1, 2) = f'(1, 2)(v_1, v_2) = v_1\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2).$$

Por lo tanto, los datos permiten escribir el sistema

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 5, \qquad 3\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) - 5\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3,$$

cuya solución es $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 16$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 9$.

Las cuestiones 4, 5, 6 y 7 del examen de toda la asignatura son, respectivamente, las cuestiones 1, 5, 6 y 7 del examen del segundo parcial.

2ª Parte — PROBLEMAS

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Sea f la función definida por $f(x) = xe^x - \mathrm{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
i) Comprobar que f no se anula en $(0, \infty)$. *5 puntos*
ii) Determinar el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $x = 0$. *4 puntos*
iii) Estudiar, en función del parámetro real α, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{xe^x - \mathrm{sen}(x)}\,dx.$$

10 puntos

Solución: **i)** La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Como $f(0) = 0$, si se prueba que f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$ se tendrá que $f(x) > 0$ cuando $x > 0$, con lo que f no se anulará en el intervalo $(0, \infty)$. Tenemos que $f'(x) = (x+1)e^x - \cos(x)$; ahora bien, si $x > 0$ es obvio que $x+1 > 1$, $e^x > 1$ y $\cos(x) \le 1$, de modo que $f'(x) > 0$.

ii) De la tabla de desarrollos de Taylor disponible obtenemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x), \qquad \operatorname{sen}(x) = x + x^2\varepsilon_2(x),$$

con $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Entonces,

$$f(x) = x\Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)\Big) - \big(x + x^2\varepsilon_2(x)\big) = x^2 + x^2\varepsilon_3(x), \quad \text{con } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

iii) El integrando $g(x) = x^\alpha/f(x)$ es, en virtud del apartado i), continuo (y positivo) en $(0,\infty)$, luego localmente integrable. Es necesario estudiar su comportamiento en 0 y en ∞ para determinar el carácter de la integral, por lo que estudiaremos las integrales

$$\int_0^1 g(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^\infty g(x)\,dx.$$

Para la primera, de acuerdo con el apartado ii), procede comparar el integrando con la función $x^\alpha/x^2 = 1/x^{2-\alpha}$, pues

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{1/x^{2-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha/f(x)}{1/x^{2-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x^2\varepsilon_3(x)}{x^2} = 1.$$

El criterio de comparación garantiza que el carácter de $\int_0^1 g$ es el de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{2-\alpha}}$, que converge cuando $2-\alpha < 1$, es decir, $\alpha > 1$.

En cuanto a la segunda, es claro que en el infinito el comportamiento de g es equiparable al de la función $x^{\alpha-1}e^{-x}$, pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{\alpha-1}e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x}{xe^x - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \operatorname{sen}(x)/(xe^x)} = 1.$$

Ahora bien, la integral $\displaystyle\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ converge para todo valor de α por ser negativo el coeficiente de x en la exponencial, y también será convergente $\int_1^\infty g$.

En conclusión, la integral original converge cuando lo hacen las dos estudiadas, es decir, cuando $\alpha > 1$.

2. Sea

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < z, \;\; x^2 + y^2 > 1\}.$$

i) Estudiar, en función de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergencia de la integral

$$\iiint_V \frac{(x^2+y^2)^\beta}{z^\alpha} dxdydz.$$

12 puntos

ii) Deducir de lo anterior que la integral

$$\iiint_V \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^3)}{z^2(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,dz$$

converge. *5 puntos*

Solución: **i)** El integrando es continuo en el abierto no acotado V, con lo que la integral impropia tiene sentido. La definición del conjunto V y de la función integrando aconsejan realizar un cambio de variables a coordenadas cilíndricas, $(x,y,z) = \boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta,z)$, dado por

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\operatorname{sen}(\theta), \quad z = z.$$

Salvo conjuntos de medida nula,

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V) = \{(\rho,\theta,z) : 0 < \theta < 2\pi, \rho > 1, z > 1\},$$

con lo que, en virtud del teorema del cambio de variables, podemos estudiar equivalentemente la integral

$$\iiint_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V)} \frac{\rho\rho^{2\beta}d\rho d\theta dz}{z^\alpha}.$$

El integrando es positivo, y el criterio de Tonelli pide estudiar la convergencia de una integral iterada, como puede ser

$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_1^\infty\Big(\int_1^\infty \frac{\rho^{2\beta+1}}{z^\alpha}d\rho\Big)dz\Big)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^{-2\beta-1}} \int_1^\infty \frac{dz}{z^\alpha}.$$

La primera integral converge, mientras que la integral respecto de ρ converge si, y sólo si, $\beta < -1$, y la integral respecto de z converge si, y sólo si, $\alpha > 1$. De acuerdo con el criterio de Tonelli, ésas son las condiciones de convergencia de la integral propuesta.

ii) La función $f(x,y,z) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{z^2(x^2+y^2)^2}$ es localmente integrable (por ser continua) en V. Se tiene que

$$|f(x,y,z)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{z^2(x^2+y^2)^2}\right| \le \frac{1}{z^2(x^2+y^2)^2},$$

para todo $(x,y,z) \in V$. La integral propuesta converge sin más que aplicar el criterio de comparación y el apartado i) para $\alpha = 2$, $\beta = -2$.

3.- Se considera la región acotada V de $\mathbb{R}^3$ determinada por

$$x^2+y^2+z^2 \ge 1, \quad x^2+y^2 \le 1+z^2, \quad 0 \le z \le 1.$$

Se pide:

i) Calcular el volumen de V. *7 puntos*

ii) Dado el campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2x, 2y, z)$, calcular

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal exterior a V. *3 puntos*

iii) Calcular la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva de ecuaciones

$$x^2+y^2 = 2, \quad z = 1.$$ *5 puntos*

Solución: **i)** La región V es exterior a la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$, interior al hiperboloide circular de una hoja de ecuación $x^2+y^2 = 1+z^2$, y limitada por los planos horizontales $z=0$ y $z=1$. Fijada la tercera coordenada $z \in [0,1]$, la correspondiente sección horizontal de V es la corona circular $S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-z^2 \le x^2+y^2 \le 1+z^2\}$, cuyo área es

$$\text{Área}(S_z) = \pi(1+z^2) - \pi(1-z^2) = 2\pi z^2 \,.$$

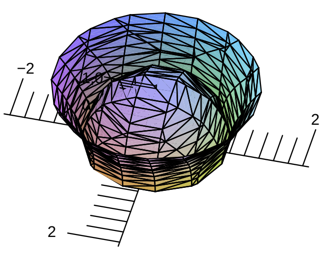
El volumen de V es entonces

$$\text{Volumen}(V) = \int_0^1 \text{Área}(S_z)\, dz = \int_0^1 2\pi z^2\, dz = 2\pi\, \frac{z^3}{3}\Big|_{z=0}^{z=1} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Un cambio a coordenadas cilíndricas (ρ,θ,w) también permite calcular el volumen de V de forma sencilla. La región V se transforma en $V' = \{(\rho,\theta,w) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le w \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \sqrt{1-w^2} \le \rho \le \sqrt{1+w^2}\}$ y, por el teorema del cambio de variables, el teorema de Fubini y la regla de Barrow,

$$\text{Volumen}(V) = \iiint_V dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dw =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{1-w^2}}^{\sqrt{1+w^2}} \rho\, d\rho\right] dw\right] d\theta = 2\pi \int w^2\, dw = 2\pi\, \frac{w^3}{3}\Big|_{w=0}^{w=1} = \frac{2\pi}{3}\,.$$



ii) El campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (F_1,F_2,F_3) = (2x,2y,z)$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$. Su divergencia es un campo escalar constante:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2+2+1 = 5\,.$$

V es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos. Por el teorema de la divergencia y el cálculo realizado en el apartado i),

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{F})\, dx\, dy\, dz = 5\cdot \text{Volumen}(V) = \frac{10\,\pi}{3}\,.$$

iii) Una parametrización de la curva Γ es $\overline{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \theta \mapsto (\sqrt{2}\cos(\theta), \sqrt{2}\,\text{sen}(\theta), 1)$, la cual induce la orientación antihoraria (positiva) en Γ. La circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ siguiendo esta orientación es entonces

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\overline{\gamma}(\theta)))\cdot\overline{\gamma}'(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (2\sqrt{2}\cos(\theta), 2\sqrt{2}\,\text{sen}(\theta), 1)\cdot(-\sqrt{2}\,\text{sen}(\theta), \sqrt{2}\cos(\theta), 0)\, d\theta = 0\,.$$

Al mismo resultado se llega al observar que $\text{rot}(\boldsymbol{F}) = 0$ en $\mathbb{R}^3$. Basta entonces aplicar el teorema de Stokes a una superficie conveniente cuya frontera sea Γ. También el lema de Poincaré asegura en este caso que existe un campo escalar f de clase C^∞ tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$ en $\mathbb{R}^3$ (abierto estrellado) y, por ser Γ una curva cerrada, el resultado se deduce de la regla de Barrow.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Se considera la función f dada por

$$f(x, y) = x^3 + 4xy - x^2y + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Calcular los máximos y mínimos relativos de f. *9 puntos*
ii) Probar que la ecuación $f(x, y) = 3x + 2y$ define x como función implícita de y en un entorno del punto $y = 1$ con $x(1) = 1$. *3 puntos*
ii) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $x = x(y)$ en el punto $(1, 1)$. *5 puntos*

Solución: **i)** Los posibles extremos relativos se hallan en los puntos que anulan a las derivadas primeras de f, por lo que habremos de resolver el siguiente sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4y - 2xy = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - x^2 + 2y = 0.$$

Despejando y en la segunda ecuación se obtiene $y = \dfrac{x^2 - 4x}{2}$, y sustituyendo en la primera se llega a la ecuación $x^3 - 9x^2 + 8x = 0$, cuyas raíces son 0, 1 y 8, por lo que los puntos buscados son $(0, 0)$, $(1, -\frac{3}{2})$ y $(8, 16)$. Las derivadas segundas de f son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4 - 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

por lo que las matrices hessianas en cada uno de los tres puntos críticos hallados son:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(1, -\frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(8, 16) = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

La primera y la tercera tienen determinante negativo, luego corresponden a puntos de silla. La segunda es la matriz de una forma definida positiva, y en consecuencia el punto $(1, -\frac{3}{2})$ es un mínimo relativo.
ii) Pongamos $g(x, y) = f(x, y) - 3x - 2y$, y veamos que se verifican las hipótesis para aplicar el teorema de la función implícita. En primer lugar, la ecuación $g(x, y) = 0$ se satisface para $(x, y) = (1, 1)$. Además, $g(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ por ser un polinomio. Por último, $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 + 4y - 2xy - 3$, cuyo valor en el punto $(1, 1)$ es $2 \neq 0$. Concluimos por tanto que existen sendos entornos U de 1 y V de 1 tales que para cada $y \in U$ existe un único $x = x(y) \in V$ de manera que $g(x(y), y) = 0$. La función $x(y)$ así definida verifica que $x(1) = 1$.
iii) Calculemos la derivada de la función $x(y)$ en el punto $y = 1$. A partir de la ecuación $g(x(y), y) = 0$, es decir, $(x(y))^3 + 4yx(y) - y(x(y))^2 + y^2 - 3x(y) - 2y = 0$, se obtiene al derivar respecto de y:

$$3(x(y))^2x'(y) + 4x(y) + 4yx'(y) - (x(y))^2 - 2yx(y)x'(y) + 2y - 3x'(y) - 2 = 0.$$

Despejando $x'(y)$ resulta:

$$x'(y) = \frac{2 - 2y + (x(y))^2 - 4x(y)}{3(x(y))^2 + 4y - 2yx(y) - 3}$$

Para $y = 1$ es $x(1) = 1$, de modo que $x'(1) = -\dfrac{3}{2}$, y la ecuación de la recta tangente es $x - 1 = -\dfrac{3}{2}(y - 1)$, o bien $2x + 3y - 5 = 0$.

Los problemas 2 y 3 del examen de toda la asignatura son los problemas 1 y 3, respectivamente, del examen del segundo parcial.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telemática)
Soluciones del examen de 9 de septiembre de 2009

1ª Parte — CUESTIONES

1.- Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}\operatorname{sen}(x) - \dfrac{x}{1+x}}{x^3}$.

Solución: El límite propuesto es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Puesto que en el denominador la menor potencia de x que aparece es de exponente 3, obtendremos los desarrollos de Taylor de grado 3 de la función que aparece en el numerador. Se tiene así:

$$e^{-x}\operatorname{sen}(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x), \quad \lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0,$$

con lo cual

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x) - \dfrac{x}{1+x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x - x^2 + \dfrac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x)) - x}{(1+x)x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{3} + (1+x)x^3\epsilon_1(x))}{(1+x)x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{2}{3} + \dfrac{x}{3} + (1+x)\epsilon_1(x)}{1+x} = -\frac{2}{3}.$$

Alternativamente, se puede optar por aplicar la regla de l'Hôpital tres veces, con el riesgo de cometer errores de cálculo según se va complicando la expresión al ir derivando.

2.- Estudiar la existencia del límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y + xy^2}{2x^2 - xy + 2y^2}$.

Solución: Los límites iterados existen y valen 0, de forma que, de existir el límite, este debe ser 0. Haciendo el cambio a coordenadas polares (ρ, θ) la función se escribe

$$\frac{\rho^3(\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta))}{\rho^2(2\cos^2(\theta) - \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + 2\operatorname{sen}^2(\theta))} = \frac{\rho(\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta))}{2 - \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}.$$

Ahora, $|\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta))| \le 2$ y $|2 - \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)| \ge 1$ cualquiera que sea $\theta \in [0, 2\pi]$. Por consiguiente,

$$\left|\frac{\rho(\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta))}{2 - \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}\right| \le 2\rho.$$

Puesto que esta expresión (independiente de θ) tiende a 0 cuando $\rho \to 0$, el límite pedido existe y vale 0.

3.- Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ las funciones dadas por $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ y $g(u, v) = (u + v, uv, u - v)$. Escribir la matriz jacobiana de la función $F = f \circ g$ en el punto $(1, 1)$.

Solución: La matriz jacobiana de la función f en un punto genérico (x, y, z) es $\begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \end{pmatrix}$, y la de g en un punto (u, v) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $g(1, 1) = (2, 1, 0)$, la matriz jacobiana de f en $g(1, 1)$ es $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, y la de g en (1,1) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana de la función compuesta es, según la regla de la cadena,

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.- Hallar el gradiente de la función $F(x, y) = \displaystyle\int_x^{2y+x^2} e^{-t^2}\,dt$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en el punto $(0, 0)$.

Solución: El gradiente de F tiene como componentes las derivadas parciales de la función respecto de x y de y evaluadas en el punto (0,0). Las derivadas se obtienen aplicando el teorema fundamental del Cálculo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xe^{-(2y+x^2)^2} - e^{-x^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2e^{-(2y+x^2)^2}.$$

Evaluando estas derivadas en (0,0) se llega a que el gradiente es el vector (-1,2).

5.- Estudiar el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty x^{1/2}\big(\cos\big(\frac{1}{x}\big)-1\big)dx$.

Solución: El integrando, al que denominamos f, es una función continua en $[1,\infty)$, y por ello localmente integrable. Es claro que $f(x)\le 0$ para todo $x\ge 1$, de modo que f es de signo constante y es lícito aplicar los criterios de comparación para el estudio de la integral. Puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = 0$, se verifica la equivalencia

$$\cos\big(\frac{1}{x}\big)-1 \sim -\frac{1}{2}\big(\frac{1}{x}\big)^2 = -\frac{1}{2x^2}, \qquad x\to\infty,$$

lo que sugiere que f se comporta en ∞ como $-1/x^{3/2}$. De hecho, según la equivalencia anterior,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{-1/x^{3/2}} = -\lim_{x\to\infty} x^2\Big(\cos\big(\frac{1}{x}\big)-1\Big) = \frac{1}{2}.$$

El criterio de comparación permite concluir que la integral bajo estudio tiene el mismo carácter que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$, que converge.

6.- Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\iint_S xye^{-(x^2+y^2)^2}\,dxdy,$$

donde $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le y\}$. En caso de ser convergente, hallar el valor de la integral.

Solución: El integrando es una función continua en $\mathbb{R}^2$, por lo que la integral impropia tiene perfecto sentido. Para su estudio conviene aplicar el cambio φ a coordenadas polares, dado por $(x,y)=\varphi(\rho,\theta)=\big(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta)\big)$, y cuyo jacobiano es ρ. Según el teorema del cambio de variables, la integral propuesta tiene el mismo carácter y, si converge, el mismo valor, que la integral

$$\iint_{\varphi^{-1}(S)} \rho\cos(\theta)\rho\operatorname{sen}(\theta)e^{-\rho^4}\rho\,d\rho\,d\theta = \iint_{\varphi^{-1}(S)} \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)e^{-\rho^4}\rho^3\,d\rho\,d\theta, \tag{1}$$

donde, salvo conjuntos de medida nula,

$$\varphi^{-1}(S)=\{(\rho,\theta): 0<\rho, \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\}$$

(obsérvese que los puntos de S están en el primer cuadrante y por encima de su bisectriz, de ecuación $y=x$ y para cuyos puntos se tiene que $\theta=\pi/4$). Dado que el integrando en (1) es positivo, calculamos la integral iterada correspondiente,

$$\int_0^\infty e^{-\rho^4}\rho^3\,d\rho\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta = -\frac{1}{4}e^{-\rho^4}\Big|_0^\infty \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(\theta)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{16}.$$

Por ser este valor finito, se deduce por el criterio de Tonelli-Hobson que la integral doble converge, y el teorema de Fubini nos permite asegurar que su valor es $1/16$.

7.- Sea $\boldsymbol{H}$ el campo vectorial $\boldsymbol{H}(x,y,z)=\big(z-y,z-x,x+y\big)$. Comprobar que $\boldsymbol{H}$ es un gradiente en $\mathbb{R}^3$ y obtener un campo escalar h tal que $\boldsymbol{H}=\nabla h$ en $\mathbb{R}^3$. Calcular la integral curvilínea $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r}$, donde Γ es la curva parametrizada por

$$\gamma(t)=(e^{\cos(t)},t,t^2),\quad t\in[0,1].$$

Solución: Es inmediato que $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\equiv\boldsymbol{0}$ en el abierto estrellado $\mathbb{R}^3$, de modo que el lema de Poincaré garantiza que $\boldsymbol{H}$ es un gradiente. Si $\boldsymbol{H}=\nabla h$, se ha de satisfacer el sistema

$$\frac{\partial h}{\partial x}=z-y,$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}=z-x,$$
$$\frac{\partial h}{\partial z}=x+y,$$

una de cuyas soluciones es $h(x,y,z)=xz-xy+yz$. Con este dato, el cálculo de la integral pedida se reduce a aplicar la regla de Barrow:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = h(\gamma(1))-h(\gamma(0)) = h(e^{\cos(1)},1,1)-h(e,0,0)=1-0=1.$$

2ª Parte — PROBLEMAS

1. Sea $a > 0$. Se considera la función $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_a(x) = e^{ax}\big(a^2x^2 - 1\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos de f_a en función de los valores del parámetro a. *8 puntos*

ii) Comprobar que el valor que toma la función f_a en sus extremos relativos no depende del valor de a. *3 puntos*

iii) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$, y determinar los puntos en que f_a se anula. *5 puntos*

iv) Realizar un esbozo de la gráfica de f_1 a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *3 puntos*

Solución: **i)** Para cada $a > 0$, la función f_a es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, por lo que procedemos al estudio de su derivada:

$$f_a'(x) = ae^{ax}\big(a^2x^2 - 1\big) + e^{ax}2a^2x = ae^{ax}\big(a^2x^2 + 2ax - 1\big).$$

Puesto que ae^{ax} no se anula para ningún $x \in \mathbb{R}$, los puntos críticos de la función se encuentran en las soluciones de $a^2x^2 + 2ax - 1 = 0$, es decir, en $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{a}$ y $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{a}$. Teniendo en cuenta el signo de f_a' se deduce que f_a es monótona creciente en $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, mientras que es monótona decreciente en (x_1, x_2). Por tanto, f_a posee un máximo relativo en x_1 y un mínimo relativo en x_2.

ii) Se tiene que

$$f_a(x_1) = e^{a((-1-\sqrt{2})/a)}\big(a^2(\frac{-1-\sqrt{2}}{a})^2 - 1\big) = e^{-1-\sqrt{2}}\big((-1-\sqrt{2})^2 - 1\big) = e^{-1-\sqrt{2}}\big(2 + 2\sqrt{2}\big)$$

y

$$f_a(x_2) = e^{a((-1+\sqrt{2})/a)}\big(a^2(\frac{-1+\sqrt{2}}{a})^2 - 1\big) = e^{-1+\sqrt{2}}\big((-1+\sqrt{2})^2 - 1\big) = e^{-1+\sqrt{2}}\big(2 - 2\sqrt{2}\big),$$

que no dependen del valor de a.

iii) Se tiene que

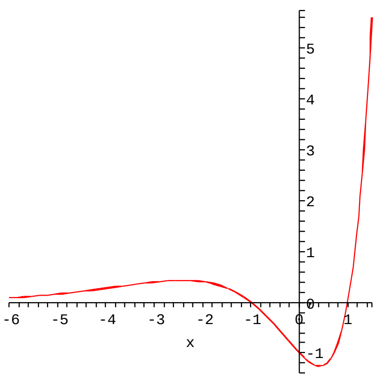
$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{ax}\big(a^2x^2 - 1\big) = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{ax}\big(a^2x^2 - 1\big) = 0.$$

El primer límite es inmediato mientras que el segundo se puede resolver, bien aplicando los órdenes de infinitud, o bien a partir de la regla de L'Hopital. Los puntos en los que f_a se anula son aquellos en que $a^2x^2 - 1 = 0$, es decir, son los puntos $x = \dfrac{1}{-a}$ y $x = \dfrac{1}{a}$.

iv) De los apartados anteriores, particularizando al caso $a = 1$ se tiene que f_1 es una función monótona creciente en $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty)$ y monótona decreciente en $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$, teniendo un máximo relativo en $-1-\sqrt{2}$ y un mínimo relativo en $-1+\sqrt{2}$, siendo $f_1(-1-\sqrt{2}) = e^{-1-\sqrt{2}}\big(2+2\sqrt{2}\big)$ y $f_1(-1+\sqrt{2}) = e^{-1+\sqrt{2}}\big(2-2\sqrt{2}\big)$. Además, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$. La función f_1 se anula en los valores $x = -1$ y $x = 1$. Con esos datos se dibuja la gráfica que sigue.



2. Se considera la ecuación $\cos(z) = x^2 + ze^y + 1 + y^2$. Se pide:
i) Demostrar que dicha ecuación define z como función implícita de x e y en un entorno de $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$. *3 puntos*
ii) Calcular el plano tangente a la gráfica de la función así definida en el punto $(0,0)$. *7 puntos*
ii) Determinar el valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *4 puntos*

Solución: **i)** Definamos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y,z) = x^2 + ze^y + 1 + y^2 - \cos(z).$$

Se tiene que f es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$. Además, $f(0,0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$, con lo que basta aplicar el teorema de las funciones implícitas para concluir lo pedido en el enunciado.

ii) La ecuación del plano tangente a la gráfica de $z(x,y)$ en el punto $(0,0)$ es

$$z = z(0,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) \cdot y.$$

Dado que en un entorno de $(0,0)$ se verifica que

$$\cos(z(x,y)) = x^2 + z(x,y)e^y + 1 + y^2,$$

bastará calcular las correspondientes parciales respecto a x y respecto a y en la expresión anterior y evaluar en $(0,0)$ para obtener los valores de $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$, respectivamente. Por una parte se tiene que

$$-\operatorname{sen}(z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 2x + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)e^y,$$

de donde $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0$. Por otro lado,

$$-\operatorname{sen}(z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)e^y + z(x,y)e^y + 2y,$$

de donde $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$. Como $z(0,0) = 0$, sustituyendo en la expresión del plano tangente en $(0,0)$ se tiene que dicho plano es el dado por $z = 0$.

iii) A partir del desarrollo de Taylor de orden 1 para la función z en el punto $(0,0)$ se tiene que $z(x,y) = \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$, con (x,y) en un entorno adecuado de $(0,0)$ y $\varepsilon(x,y)$ una función verificando que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0} \varepsilon(x,y) = 0$. De aquí se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0.$$

3.- Sea V la región acotada de $\mathbb{R}^3$ situada en el primer octante y determinada por los planos coordenados y el plano $x + y = 1$ e interior a la esfera centrada en el origen y de radio unidad; es decir,

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x,\, 0 < y,\, x + y < 1,\, 0 < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}.$$

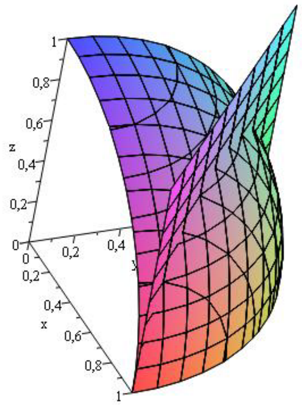
i) Calcular el flujo entrante en V, a través de su frontera ∂V, del campo vectorial $\boldsymbol{F}$ dado por

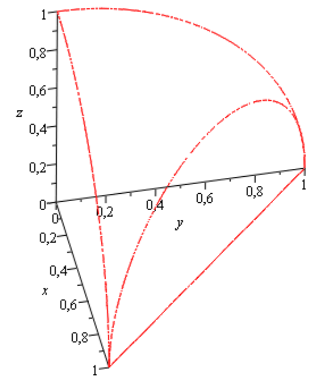
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(\operatorname{Ch}(yz) + x^2y, \operatorname{Sh}(xz) - xy^2, \operatorname{Sh}(xy) + z^2\big). \qquad \textit{9 ps}$$

ii) Sea S la parte de ∂V que satisface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcular la circulación a lo largo de ∂S, indicando la orientación escogida en ∂S, del campo $\boldsymbol{G}$ definido por

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \big(-xy, \operatorname{sen}(y), x^2 + y^2 + \operatorname{sen}(z)\big). \qquad \textit{9 ps}$$

Solución: Como se puede ver en los dibujos abajo, la región V es el interior de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 (condición $z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}$), excepto la parte que queda a la derecha (en el dibujo) del plano vertical $x+y=1$ (condición $x+y<1$), en el primer octante (condiciones $0<x$, $0<y$, $0<z$):





i) La frontera de V, ∂V, consta de cuatro superficies planas, tres de ellas contenidas en los planos cartesianos $x=$, $y=0$, $z=0$, y la cuarta contenida en el plano $x+y=1$, más una superficie curva contenida en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$. Calcular directamente el flujo entrante en V a través de ∂V del campo vectorial $\boldsymbol{F}$ implica entonces sumar los flujos correspondientes a cada una de las cinco superficies que conforman ∂V. Los cálculos se simplifican notablemente al utilizar el teorema de la divergencia. Puesto que V es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos y $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, el teorema de la divergencia asegura que

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_i\, d\sigma = -\iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{F})\, dx\, dy\, dz,$$

donde $\boldsymbol{n}_i$ denota el vector unitario normal a ∂V e interior a V en cada punto de ∂V. Ahora,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z} = 2xy-2xy+2z = 2z$$

y, por el teorema de Fubini,

$$\iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{F})\, dx\, dy\, dz = \iiint_V 2z\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x}\Big[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2z\, dz\Big]\, dy\Big]\, dx =$$
$$= \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x} (1-x^2-y^2)\, dy\Big]\, dx == \int_0^1 \Big[(1-x^2)(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3}\Big]\, dx = \frac{1}{3}.$$

ii) La frontera de la superficie S, ∂S, es unión de las tres curvas regulares que resultan de la intersección, en el primer octante, de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ con cada uno de los tres planos verticales $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Al ser S una superficie orientable con borde y $\boldsymbol{G}$ un campo vectorial de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, por el teorema de Stokes,

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{G}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

donde en ∂S se considera la orientación inducida por S. Tenemos que

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{G}) = \Big(\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\Big) = (2y,-2x,x).$$

Una parametrización de S es

$$\psi : D \to \mathbb{R}^3 : (x,y)\mapsto (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}), \quad D=\{(x,y\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1,\ 0<y<1-x\},$$

con vectores tangentes y vector normal

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \Big(1,0,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\Big), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \Big(0,1,\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\Big),$$
$$\mathbf{n} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\times\frac{\partial\psi}{\partial y} = \Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\Big).$$

La orientación en S asociada a ψ induce en ∂S la que implica recorrerla de $(0,0,1)$ a $(1,0,0)$, de aquí a $(0,1,0)$, y finalmente a $(0,0,1)$. Al aplicar el teorema de Fubini,

$$\iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,1-x]} (2y,-2x,x)\cdot\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\Big)\, dx\, dy =$$
$$= \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x} x\, dy\Big]\, dx = \int_0^1 x(1-x)\, dx = \Big(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Examen final – 3 de junio de 2010

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1ª Parte. Cuestiones — Duración: de 9:00 a 10:45
(Cada cuestión vale **7 puntos** sobre una nota total de 100 puntos.)

1.- Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

2.- Calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\int_1^x \log(3+e^t)\,dt.$$

3.- Parametrizar la curva dada por la intersección del cono $x^2+z^2=y^2$ y el cilindro $x^2+z^2=1$, con $y>0$.

4.- Determinar el área de la región de $\mathbb{R}^2$ limitada por el eje de ordenadas y la curva definida en coordenadas polares por $\rho(\theta)=e^{2\theta}$, $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$.

5.- Calcular el área de la gráfica de la función $f(x,y)=x+y^2$ definida en el abierto $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0<y<1,\ 0<x<\sqrt{1+2y^2}\}$.

6.- Escribir las dos integrales iteradas correspondientes a la integral múltiple

$$\iint_D f(x,y)dxdy,$$

donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0, y^2<x<2y^2\}$, asumiendo que f es integrable en D.

7.- Comprobar que el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(2\,\cos(x+y)-2x\,\operatorname{sen}(x+y), e^z-2x\,\operatorname{sen}(x+y), y\,e^z)$$

es conservativo y determinar f tal que $\nabla f=F$ en $\mathbb{R}^3$. Calcular la integral de línea $\int_\Gamma F\cdot d\boldsymbol{r}$, siendo Γ la curva intersección de las superficies $2x^2+y^2=1$ y $z+y=1$.

2ª Parte. Ejercicios — Duración: de 11:00 a 13:00

1.- Estudiar, en función del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, el carácter de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x)\,(1-\cos(x))}{x^\alpha(1+x)}\,dx.$$

12 puntos

2.- Calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(\dfrac{-x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ a lo largo del borde del abierto

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4, 0<x<y\}.$$

12 puntos

3.- Sea

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z,\ 0\le y,\ 0\le z,\ x^2+y^2+z\le 1,\ x+y\le 1\}.$$

i) Calcular el volumen de V. *10 puntos*

ii) Calcular el flujo exterior a V a través de ∂V del campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(\operatorname{sen}(xy)+z^2,\ y\,\operatorname{sen}(z),\ \cos(z)-z(y\,\cos(xy)-3)).$$

5 puntos

iii) Si S es la parte de ∂V incluida en el paraboloide $x^2+y^2+z=1$, calcular la circulación

$$\int_{\partial S}(xy, yz^2, x)\cdot d\boldsymbol{r}\,,$$

indicando la orientación considerada. *12 puntos*

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1ª Parte. Cuestiones — Duración: de 9:00 a 10:45
(Cada cuestión vale **7 puntos** sobre una nota total de 100 puntos.)

1.- Probar que existe un punto $x_0 \in (0, \pi)$ tal que

$$\operatorname{sen}(x_0) + \cos(x_0) = \frac{1}{2010}.$$

2.- Estudiar la existencia del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}.$$

3.- Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 24y.$$

4.- Calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_1^x \log(3 + e^t)\, dt.$$

5.- Determinar el área de la región de $\mathbb{R}^2$ limitada por el eje de ordenadas y la curva definida en coordenadas polares por $\rho(\theta) = e^{2\theta}$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

6.- Escribir las dos integrales iteradas correspondientes a la integral múltiple

$$\iint_D f(x, y)dxdy,$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, y^2 < x < 2y^2\}$, asumiendo que f es integrable en D.

7.- Comprobar que el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (2\cos(x + y) - 2x \operatorname{sen}(x + y), e^z - 2x \operatorname{sen}(x + y), y\, e^z)$$

es conservativo y determinar f tal que $\nabla f = F$ en $\mathbb{R}^3$. Calcular la integral de línea $\int_\Gamma F \cdot d\boldsymbol{r}$, siendo Γ la curva intersección de las superficies $2x^2 + y^2 = 1$ y $z + y = 1$.

2ª Parte. Ejercicios — Duración: de 11:00 a 13:00

1. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Estudiar monotonía, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, asíntotas y puntos de corte con los ejes de f. Esbozar su gráfica. *8 puntos*
ii) Determinar el carácter de la integral $\int_0^\infty f(x)dx$ y calcular su valor en caso de que converja. *5 puntos*

2.-
i) Demostrar que la ecuación

$$x^2y + xy^3 + \operatorname{sen}(x - y) + \cos(x + y) = 1$$

define una función $y = y(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto del punto $x = 0$, con $y(0) = 0$. *4 puntos*
ii) Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $y(x)$, definida en i), en el punto $x = 0$. *8 puntos*
iii) Calcular el valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{y(x) - x}{x^2}$. *4 puntos*

3.- Sea
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z,\ 0 \le y,\ 0 \le z,\ x^2+y^2+z \le 1,\ x+y \le 1\}.$$

i) Calcular el volumen de V. *8 puntos*

ii) Calcular el flujo exterior a V a través de ∂V del campo
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen}(xy)+z^2,\ y\operatorname{sen}(z),\ \cos(z) - z(y\cos(xy)-3)).$$
4 puntos

iii) Si S es la parte de ∂V incluida en el paraboloide $x^2+y^2+z=1$, calcular la circulación
$$\int_{\partial S} (xy, yz^2, x)\cdot d\boldsymbol{r}\,,$$
indicando la orientación considerada. *10 puntos*

SOLUCIONES

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

Cuestiones

1.- *Solución:* Haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$ se tiene que
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(t)^2}{(1-\operatorname{sen}(t)^2)^{3/2}}\cos(t)\,dt = \int \frac{\operatorname{sen}(t)^2}{(1-\operatorname{sen}(t)^2)^{3/2}}\cos(t)\,dt \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}(t)^2}{\cos(t)^2}\,dt = \int \operatorname{tg}(t)^2\,dt = \int (1+\operatorname{tg}(t)^2)\,dt - \int 1\,dt \\ &= \operatorname{tg}(t) - t + C = \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(x)) - \operatorname{arcsen}(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2.- *Solución:* La función $F(x) = \int_1^x \log(3+e^t)\,dt$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Para probarlo basta aplicar el teorema fundamental del cálculo integral a la función $f(t) = \log(3+e^t)$. Además, $F'(x) = \log(3+e^x)$, $x \in \mathbb{R}$. Es fácil observar que $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$, puesto que
$$F(x) = \int_1^x \log(3+e^t)\,dt \ge \int_1^x \log(3)\,dt = \log(3)(x-1), \quad x > 1.$$
El límite presenta una indeterminación ∞/∞ que se puede resolver usando la regla de l'Hopital:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\int_1^x \log(3+e^t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(3+e^x)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{3+e^x}}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(3e^{-x}+1)} = \frac{1}{2}.$$

3.- *Solución:* Si usamos coordenadas cilíndricas para representar los puntos de la curva,
$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta), \\ y = w, \\ z = \rho\operatorname{sen}(\theta), \end{cases}$$
teniendo en cuenta que $w = y > 0$ tenemos que
$$\rho^2 = w^2 \Rightarrow \rho = w \quad \text{y} \quad \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$
Por tanto, la aplicación $\boldsymbol{\gamma} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por
$$\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (\cos(\theta), 1, \operatorname{sen}(\theta)),$$
es una parametrización de la curva.

4.- *Solución:* Llamemos D a dicha región, incluyendo las curvas que la limitan. Es claro, por su propia definición, que D es un compacto medible en $\mathbb{R}^2$, y su área viene dada por la integral (de Riemann)
$$A = \iint_D 1\,dx\,dy.$$
Si $(x,y) = \varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta))$ es el cambio a coordenadas polares estándar, salvo conjuntos de medida nula se tiene que
$$\varphi^{-1}(D) = \{(\rho,\theta) : -\pi/2 < \theta < \pi/2,\ 0 < \rho < e^{2\theta}\}.$$

Recordamos que el jacobiano de φ es igual a ρ en cada punto. El teorema del cambio de variables establece que

$$A = \iint_{\varphi^{-1}(D)} \rho \, d\rho \, d\theta,$$

siendo esta integral convergente. Basta aplicar el teorema de Fubini y calcular las integrales inmediatas que aparecen para concluir:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_0^{e^{2\theta}} \rho \, d\rho \Big) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\theta} \, d\theta = \frac{1}{8}(e^{2\pi} - e^{-2\pi}).$$

5.- *Solución:* Es bien conocido que una parametrización de la gráfica de f viene dada por $\boldsymbol{\varphi}(x,y) = (x, y, x + y^2)$, $(x,y) \in D$, cuyo vector normal es

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\Big)(x,y) = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\Big) = (-1, -2y, 1).$$

Entonces el área de la gráfica de f es

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \Big\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\Big)(x,y) \Big\| \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1+2y^2}} \sqrt{2 + 4\,y^2} \, dx \Big) dy = \int_0^1 \sqrt{2} \, (1 + 2\,y^2) \, dy = \frac{5}{3} \sqrt{2} \, . \end{aligned}$$

El cálculo de la integral se ha hecho aplicando el teorema de Fubini.

Nota: Conviene subrayar que el área de la gráfica de f **NO** tiene nada que ver con el cálculo de la integral $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy$. Como f es positiva, esta última proporciona, por ejemplo, el volumen del conjunto $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \, , \ 0 < z < f(x,y)\}$, pero se trata de un problema completamente distinto.

6.- *Solución:* Es muy sencillo dibujar la región D y obtener que, por el teorema de Fubini, se verifica que

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^\infty \Big(\int_{\sqrt{x/2}}^{\sqrt{x}} f(x,y) \, dy \Big) \, dx = \int_0^\infty \Big(\int_{y^2}^{2y^2} f(x,y) \, dx \Big) \, dy.$$

7.- *Solución:* Es inmediato comprobar que el rotacional de $\boldsymbol{F}$, que es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, es idénticamente nulo en el abierto estrellado $\mathbb{R}^3$, por lo que, gracias al lema de Poincaré, el campo es un gradiente. Resolviendo el correspondiente sistema, se obtiene que

$$f(x,y,z) = 2x \cos(x+y) + ye^z$$

es un potencial de $\boldsymbol{F}$. De acuerdo con la regla de Barrow, la integral de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de una curva (suficientemente regular) dependerá sólo de los extremos de la misma y, en particular, será 0 si la curva es cerrada. Este es el caso para la curva Γ dada, pues es el corte de un cilindro elíptico con un plano no paralelo a su eje de revolución (el eje OZ).

Ejercicios

1.- *Solución*: Para todo $\alpha > 0$, el integrando

$$f(x) = \frac{\log(1+x)\,(1-\cos(x))}{x^\alpha(1+x)}$$

está definido y es continuo en $(0,\infty)$ y, por tanto, localmente integrable en dicho intervalo. Además, $f(x) \geq 0$, para todo $x \in (0,\infty)$, lo que nos permite utilizar los criterios de comparación directamente con $f = |f|$. Al ser $\alpha > 0$, la integral es impropia en ambos extremos de integración. Por la aditividad de la integral respecto del intervalo, podemos escribir

$$\int_{\to 0}^{\to\infty} f(x) \, dx = \int_{\to 0}^{1} f(x) \, dx + \int_1^{\to\infty} f(x) \, dx.$$

Las equivalencias en $x_0 = 0$ $\log(1+x) \sim_0 x$ y $1 - \cos(x) \sim_0 x^2/2$ son de sobra conocidas e implican que la función $f(x)$ es equivalente a $1/(2x^{\alpha-3})$ cuando $x \to 0^+$, es decir,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{1/(2x^{\alpha-3})} = 1.$$

El criterio de comparación (Corolario 2.3 del Tema VIII) asegura entonces que las integrales

$$\int_{\to 0}^{1} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{x^{\alpha-3}}\,dx$$

tienen el mismo carácter. La segunda integral corresponde a una de las funciones test y converge si y sólo si $\alpha - 3 < 1$, esto es, $\alpha < 4$.

Por otro lado, puesto que $0 \le 1-\cos(x) \le 2$, tenemos que

$$0 \le f(x) \le \frac{\log(1+x)\,2}{x^\alpha(1+x)}.$$

Además,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\log(1+x)\,2}{x^\alpha(1+x)}}{\frac{\log(x)\,2}{x^{\alpha+1}}} = 1$$

siendo el denominador una función test para la que $\int_1^{\to\infty} \frac{\log(x)\,2}{x^{\alpha+1}}\,dx$ converge si y sólo si $\alpha+1>1$. Las desigualdades anteriores y el criterio de comparación (Teorema 2.1 del Tema VIII) aseguran entonces que $\int_1^{\to\infty} f(x)\,dx$ es convergente para todos los valores permitidos del parámetro $\alpha > 0$.

En conclusión, si $\alpha > 0$, la integral $\int_{\to 0}^{\to\infty} f(x)\,dx$ converge cuando $\alpha \in (0,4)$.

2.- *Solución*: El conjunto D es un dominio de Jordan, siendo el campo a integrar de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, que es un abierto que contiene a $\overline{D}$. Por lo tanto, podemos aplicar la fórmula de Green-Riemann, obteniendo que

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{dr} = \iint_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{y}{x^2+y^2}\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{-x}{x^2+y^2}\big)\Big)dxdy = \iint_D \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy.$$

Teniendo en cuenta la forma del conjunto D parece adecuado realizar un cambio a coordenadas polares. El valor de la integral anterior y el de la integral una vez realizado el cambio a coordenadas polares coincidirá por el teorema del cambio de variables. Tras el cambio, la integral queda

$$\iint_{\varphi^{-1}(D)} \frac{-4\rho\cos(\theta)\rho\,\mathrm{sen}(\theta)}{\rho^4}\rho d\rho d\theta,$$

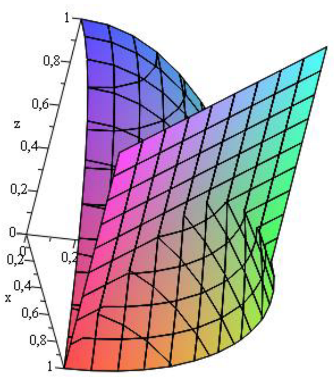
siendo el conjunto $\varphi^{-1}(D) = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 1<\rho<2, \theta\in(\pi/4,\pi/2)\}$.

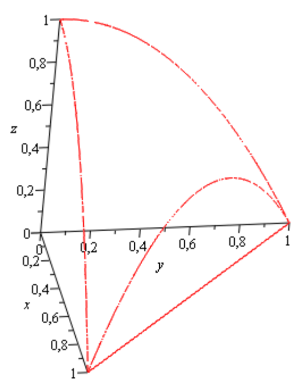
Aplicando el teorema de Fubini, la integral anterior vale

$$-4\int_1^2 \Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)}{\rho}d\rho\Big)d\theta = -4\Big(\int_1^2 \frac{1}{\rho}d\rho\Big)\Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta\Big)$$

$$= (-4)(\log(2)-\log(1))\Big(\frac{-\cos(2\theta)}{4}\Big)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\log(2).$$

3.- *Solución*: La región V está contenida en el primer octante (condiciones $0<x$, $0<y$, $0<z$), interior al paraboloide circular de ecuación $x^2+y^2+z=1$ (condición $x^2+y^2+z\le 1$) e incluida en el semiespacio que contiene el origen de coordenadas y limitado por el plano vertical $x+y=1$ (condición $x+y<1$):





i) El volumen de V es, por el teorema de Fubini,

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x}\Big[\int_0^{1-x^2-y^2} dz\Big]dy\Big]dx =$$

$$= \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x}(1-x^2-y^2)\,dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[(1-x^2)(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3}\Big]dx = \frac{1}{3}.$$

ii) La frontera de V, ∂V, consta de cuatro superficies planas, tres de ellas contenidas en los planos cartesianos $x =$, $y = 0$, $z = 0$, y la cuarta contenida en el plano $x + y = 1$, más una superficie curva contenida en el paraboloide $x^2+y^2+z = 1$. Calcular directamente el flujo saliente de V a través de ∂V del campo vectorial $\boldsymbol{F}$ implica entonces sumar los flujos correspondientes a cada una de las cinco superficies que conforman ∂V. Los cálculos se simplifican notablemente al utilizar el teorema de la divergencia. Puesto que V es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos y $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, el teorema de la divergencia asegura que

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) \, dx \, dy \, dz,$$

donde $\boldsymbol{n}_e$ denota el vector unitario normal a ∂V y exterior a V en cada punto de ∂V. La divergencia de $\boldsymbol{F}$ es constante,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3,$$

y, teniendo en cuenta el apartado (i),

$$\iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \cdot \operatorname{Vol}(V) = 1.$$

iii) La frontera de la superficie S, ∂S, es unión de las tres curvas regulares que resultan de la intersección, en el primer octante, del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$ con cada uno de los tres planos verticales $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Al ser S una superficie orientable con borde y el campo vectorial $\boldsymbol{G}(x, y, z) = (xy, yz^2, x)$ de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, por el teorema de Stokes,

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{G} \, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma,$$

donde en ∂S se considera la orientación inducida por S. Tenemos que

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{G}) = \Big(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\Big) = (x, 0, -z).$$

Una parametrización de S es

$$\psi : D \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, 1 - x^2 - y^2), \quad D = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\},$$

con vectores tangentes y vector normal

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = (1, 0, -2x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = (0, 1, -2y),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} = (2x, 2y, 1)\,.$$

Por tanto, al aplicar el teorema de Fubini,

$$\iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,1-x]} (x, 0, -1 + x^2 + y^2) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x} (3x^2 - 1 + y^2) \, dy\Big] \, dx = \int_0^1 \Big((3x^2 - 1)(1 - x) + \frac{(1 - x)^3}{3}\Big) \, dx = -\frac{1}{6}.$$

La orientación en ∂S inducida por $\boldsymbol{n}$ implica recorrer ∂S de la siguiente forma: de $(0, 0, 1)$ a $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Con esta orientación,

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{G} \, d\boldsymbol{r} = -\frac{1}{6}.$$

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

Cuestiones

1.- *Solución:* Consideremos la función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x).$$

Obviamente f es continua en $[0, \pi]$ y $f(0) = 1 > \frac{1}{2010} > -1 = f(\pi)$, de forma que el resultado es consecuencia del teorema de Darboux.

2.- *Solución:* Si consideramos el límite a través de los subespacios definidos por $y = \lambda x$, para $\lambda \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}} \frac{x^2y^2}{x^6+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\lambda x)^2}{x^6+(\lambda x)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2}{x^2+\lambda^4} = \frac{\lambda^2}{\lambda^4} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

El hecho de que el resultado dependa del supespacio (de λ), implica que el límite no existe.

3.- *Solución:* La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$. Las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -6y^2 + 24 = 0 \end{aligned}\right\}$$

son los puntos críticos de f, que resultan ser $(1,2)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$ y $(-1,-2)$. La matriz hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -12y \end{pmatrix}.$$

En $(1,2)$,

$$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix},$$

que es indefinida, por ser sus autovalores 6 y -24, uno positivo y otro negativo. Así, este punto no es extremo.

En $(-1,2)$,

$$Hf(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix},$$

que es definida negativa, por ser sus autovalores -6 y -24, los dos negativos. Así, este punto es máximo relativo.

En $(1,-2)$,

$$Hf(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva, por ser sus autovalores 6 y 24, los dos positivos. Así, este punto es mínimo relativo.

Por último, en $(-1,-2)$,

$$Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix},$$

que es indefinida, por ser sus autovalores -6 y 24, uno positivo y otro negativo. Así, este punto no es extremo.

4.- *Solución:* Véase la solución de la Cuestión 2 del examen para el segundo parcial.

5.- *Solución:* Véase la solución de la Cuestión 4 del examen para el segundo parcial.

6.- *Solución:* Véase la solución de la Cuestión 6 del examen para el segundo parcial.

7.- *Solución:* Véase la solución de la Cuestión 7 del examen para el segundo parcial.

Ejercicios

1.-*Solución*: **i)** La función es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, por lo que procedemos al estudio de su derivada:

$$f'(x) = (-x^2+2x+3)e^{-x} = -(x+1)(x-3)e^{-x}.$$

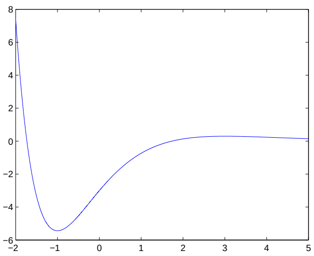
De esta expresión deducimos que f decrece en $(-\infty,-1)$, crece en $(-1,3)$ y decrece en $(3,\infty)$, de forma que la función presenta un mínimo relativo en $x=-1$, con $f(-1)=-2e$, y un máximo relativo en $x=3$ de valor $f(3)=6e^{-3}$. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, realizamos un estudio de la segunda derivada de la función:

$$f''(x) = (x^2-4x-1)e^{-x} = (x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})e^{-x},$$

de donde se tiene que f posee puntos de inflexión en $x=2-\sqrt{5}$ y $x=2+\sqrt{5}$. Además, la función f'' es positiva en $(-\infty, 2-\sqrt{5})\cup(2+\sqrt{5},\infty)$ y negativa en $(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$.

En cuanto a las asíntotas, no hay verticales ya que f es continua en $\mathbb{R}$. Además,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$



asíntota horizontal (para $x \to +\infty$), mientras que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

ncia de asíntotas horizontal ni oblícua cuando $x \to -\infty$. Resolviendo la ıe f corta al eje de abscisas en $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. El corte con el eje $= f(0) = -3$. Con los datos anteriores se puede realizar un esbozo de la

ii) El carácter impropio de la integral es sólo debido a que el intervalo de integración es no acotado. Dado que f es positiva para todo x suficientemente grande y positivo, y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2 e^{-x}} = 1,$$

el criterio de comparación para integrales impropias asegura que la integral del enunciado y $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$ tienen el mismo carácter. Esta última es convergente (el integrando es una función test), por lo que concluimos que la integral del enunciado es convergente.

2.-*Solución*: **i)** La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2 y + \operatorname{sen}(x - y) + \cos(x + y) - 1$$

se anula cuando se verifica la ecuación. Es claro que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, $f(0, 0) = 0$ y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = x^2 - \cos(x - y) - \operatorname{sen}(x + y)|_{(0,0)} = -1 \neq 0,$$

por lo que podemos aplicar el teorema de la función implícita asegurando la existencia de una función $y = y(x)$, definida y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno U de $x = 0$, con $y(0) = 0$ y

$$x^2 y(x) + \operatorname{sen}(x - y(x)) + \cos(x + y(x)) = 1, \quad x \in U.$$

ii) Derivando en la expresión anterior se tiene que

$$2xy(x) + x^2 y'(x) + \cos(x - y(x))(1 - y'(x)) - \operatorname{sen}(x + y(x))(1 + y'(x)) = 0, \quad x \in U.$$

Basta evaluar en $x = 0$ la igualdad precedente concluyendo que $y'(0) = 1$. Derivando la nueva igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} &2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x) - \operatorname{sen}(x - y(x))(1 - y'(x))^2 \\ &- \cos(x - y(x))y''(x) - \cos(x + y(x))[(1 + y'(x))^2 - y''(x)] = 0, \quad x \in U. \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $y''(0) = -4$. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de la función $y = y(x)$ de grado 2 en $x = 0$ viene dado por

$$T_2(y, 0)(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 = x - 2x^2.$$

iii) Teniendo en cuenta el apartado anterior,

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - 2x^2 + \varepsilon(x)x^2 - x}{x^2}$$

para cierta función $\varepsilon(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. Por lo tanto, el límite anterior vale -2.

3.-*Solución*: Véase la solución del Ejercicio 3 del examen para el segundo parcial.

MATEMÁTICAS I (Ing. Téc. Telec., esp. Sistemas de Telecomunicación)
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (Ing. Téc. Telec., esp. Telemática)
Examen extraordinario – 16 de julio de 2010

1ª Parte. Cuestiones — Duración: de 9:00 a 10:45
(Cada cuestión vale **7 puntos** sobre una nota total de 100 puntos.)

1.- Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ de forma que el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right)^a}{(\operatorname{sen}(x) - x)^4}$ tome un valor finito no nulo.

2.- Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \int_0^{y+2x} \cos(t^2)\, dt.$$

3.- Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.- Estudiar el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\big(\operatorname{arctg}(x)\big)^{3/2}}{(x^3+2x)^2(x+5)}\, dx.$

5.- Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -x < y < x\,,\ x^2+y^2 > 1\}$. Estudiar, en función del parámetro real α, el carácter de la integral impropia $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

6.- Calcular el volumen de la región V de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z \leq 2\}.$$

7.- Calcular el área de la gráfica de la función $f(x,y) = x + y^2$ definida en el abierto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < y < 1,\ 0 < x < \sqrt{1+2y^2}\}.$$

2ª Parte. Ejercicios — Duración: de 11:00 a 13:00

1. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Determinar la ecuación de la recta tangente a la función f en $x = 0$. *3 puntos*
ii) Estudiar los puntos de corte con los ejes, paridad, asíntotas, monotonía y extremos relativos de la función f. Esbozar su gráfica. *9 puntos*
iii) Calcular el área determinada por la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,1]$. *7 puntos*

2.- Se considera la ecuación

$$x^2 + y^2 + xy + z + e^z - 1 = 0.$$

i) Demostrar que la ecuación anterior define a z como función implícita de (x,y), $z = z(x,y)$, en un entorno del punto $(0,0)$ con $z(0,0) = 0$. *3 puntos*
ii) Estudiar si la función $z = z(x,y)$ presenta un extremo relativo en $(0,0)$. *12 puntos*

3.- Consideremos el campo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2y, 2z, 2x+1), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

y la superficie $S = S_1 \cup S_2$, siendo

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0\}.$$

Indicando la orientación considerada, calcular $\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma$ mediante:
i) el teorema de la divergencia en un volumen adecuado; *8 puntos*
ii) una integral curvilínea utilizando el teorema de Stokes. *9 puntos*

SOLUCIONES

Cuestiones

1.- Si usamos los conocidos desarrollos de Taylor del seno y el coseno,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_2(x),$$

con $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Big(\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\Big)^a}{(\operatorname{sen}(x) - x)^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\Big(\frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x)\Big)^a}{\Big(-\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_2(x)\Big)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{|x|^{4a}\Big(\frac{1}{4!} + \varepsilon_1(x)\Big)^a}{x^{12}\Big(-\frac{1}{3!} + \varepsilon_2(x)\Big)^4} = \lim_{x\to 0}|x|^{4a-12}\frac{\Big(\frac{1}{4!} + \varepsilon_1(x)\Big)^a}{\Big(-\frac{1}{3!} + \varepsilon_2(x)\Big)^4}.$$

Puesto que $\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{4!} + \varepsilon_1(x)\Big)^a = \frac{1}{(4!)^a}$ y $\lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{3!} + \varepsilon_2(x)\Big)^4 = \frac{1}{(3!)^4}$, se deduce que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Big(\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\Big)^a}{(\operatorname{sen}(x) - x)^4} = \begin{cases} \infty & \text{si } 4a - 12 < 0; \\ \frac{(3!)^4}{(4!)^a} & \text{si } 4a = 12; \\ 0 & \text{si } 4a - 12 > 0. \end{cases}$$

En conclusión, el límite es finito y no nulo si, y sólo si, $a = 3$.

2.- Puesto que la función $g(t) = \cos(t^2)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y $u(x,y) = y + 2x$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, la aplicación combinada del teorema fundamental del cálculo integral y de la regla de la cadena implica que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\cos((y+2x)^2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos((y+2x)^2).$$

Derivando otra vez se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -8(y+2x)\operatorname{sen}((y+2x)^2),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -4(y+2x)\operatorname{sen}((y+2x)^2),\ \text{y}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(y+2x)\operatorname{sen}((y+2x)^2).$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(0,0)$ es

$$T(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)\Big) +$$
$$+\frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)(x-0)(y-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2\Big) = 2x + y.$$

3.- En primer lugar calculamos las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

De manera análoga se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Entonces f es diferenciable en $(0,0)$ si, y sólo si, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y) = 0$, donde

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)\Big)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \frac{x^3y + xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Si hacemos un cambio a coordenadas polares para estudiar el límite, resulta que

$$\varepsilon(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)) = \frac{r^4(\cos(\theta)^3\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)^3)}{(r^2)^{3/2}} = r\,(\cos(\theta)^3\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)^3).$$

Para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que

$$|\varepsilon(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))| \leq 2r,$$

lo que implica que $\lim_{r\to 0^+}\varepsilon(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)) = 0$ uniformemente para $\theta \in [0, 2\pi]$. Esto implica que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y) = 0$ y, por tanto, f es diferenciable en $(0,0)$.

Nota: en realidad la solución es mucho más fácil, puesto que $f(x,y) = xy$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, como se puede ver simplificando la fracción que define la función.

4.- La función integrando, que llamaremos f, es continua en $(0,\infty)$, luego localmente integrable en dicho intervalo. Es necesario realizar el estudio de la convergencia de, por ejemplo, las integrales

$$\int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

En el primer caso tendremos en cuenta la equivalencia $\operatorname{arctg}(x) \sim_0 x$ para deducir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1/x^{1/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/2}x^{3/2}}{x^2(x^2+2)^2(x+5)} = \frac{1}{20} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Se deduce que f tiene signo constante en un entorno de 0, por lo que es válido el criterio de comparación para concluir que $\int_0^1 f(x)\,dx$ y $\int_0^1 dx/x^{1/2}$ tienen el mismo carácter. Como la segunda es conocida y converge, la primera también converge.

Para el estudio en el segundo intervalo basta observar que

$$0 \le f(x) \le \frac{(\pi/2)^{3/2}}{(x^3+2x)^2(x+5)} \le \frac{(\pi/2)^{3/2}}{x^7}, \qquad x > 1;$$

como la integral de la función a la derecha es convergente, la integral de f en $(1,\infty)$ también. En conclusión, la integral propuesta es convergente.

5.- El aspecto de la función integrando y del conjunto aconsejan realizar un cambio a coordenadas polares, $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$. Es sencillo comprobar que la desigualdad $x^2+y^2 > 1$ equivale a $\rho > 1$, mientras que $-x < y < x$ se traduce en $-\cos(\theta) < \mathrm{sen}(\theta) < \cos(\theta)$, de donde ha de ser $-\pi/4 < \theta < \pi/4$ (una representación gráfica del conjunto D puede ser de gran ayuda). Entonces, el estudio de la integral pedida se reduce, por el teorema del cambio de variables, al de

$$\int_{(1,\infty)\times(-\pi/4,\pi/4)} \frac{\rho}{(\rho^2)^\alpha}\,d\rho\,d\theta.$$

El integrando es positivo, por lo realizamos directamente una integral iterada para aplicar el criterio de Tonelli:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\Big(\int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}\Big)d\theta = \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}.$$

Esta última integral es conocida, y converge si, y sólo si, $2\alpha - 1 > 1$, es decir, cuando $\alpha > 1$, en cuyo caso, por el criterio de Tonelli, converge la integral en coordenadas polares.

6.- El conjunto V es cerrado, por estar definido mediante desigualdades no estrictas entre funciones continuas, y acotado, pues está claramente contenido en el paralelogramo $[-1,1]\times[-1,1]\times[0,2]$. Su frontera es una unión finita de curvas y superficies (porciones de cinco planos y de un paraboloide, y sus intersecciones), por lo que V es un compacto medible, y está plenamente justificado el cálculo de su volumen, dado por

$$\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz.$$

El teorema de Fubini permite calcular esta integral como iterada, del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\Big(\int_{-1}^1\Big(\int_0^{2-x^2-y^2} dz\Big)\,dy\Big)\,dx &= \int_{-1}^1\Big(\int_{-1}^1 (2-x^2-y^2)\,dy\Big)\,dx \\ &= \int_{-1}^1 (2y - x^2y - y^3/3)\Big|_{-1}^1\,dx = \int_{-1}^1 (4-2x^2-2/3)\,dx = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

7.- Esta es, sin modificación alguna, la cuestión 5 del examen de junio de 2010 para los alumnos que se examinaban sólo del segundo parcial. Repetimos aquí la solución que se dió entonces.

Es bien conocido que una parametrización de la gráfica de f viene dada por $\boldsymbol{\varphi}(x,y) = (x,y,x+y^2)$, $(x,y)\in D$, cuyo vector normal es

$$\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\Big)(x,y) = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\Big) = (-1,-2y,1).$$

Entonces el área de la gráfica de f es

$$\begin{aligned}A &= \iint_D \Big\|\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\Big)(x,y)\Big\|\,dx\,dy \\ &= \int_0^1\Big(\int_0^{\sqrt{1+2y^2}} \sqrt{2+4\,y^2}\,dx\Big)dy = \int_0^1 \sqrt{2}\,(1+2\,y^2)\,dy = \frac{5}{3}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

El cálculo de la integral se ha hecho aplicando el teorema de Fubini.

Nota: Conviene subrayar que el área de la gráfica de f **NO** tiene nada que ver con el cálculo de la integral $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$. Como f es positiva, esta última proporciona, por ejemplo, el volumen del conjunto $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D\,,\ 0 < z < f(x,y)\}$, pero se trata de un problema completamente distinto.

Ejercicios

1.- i) La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, y en particular es derivable en $x = 0$. Por tanto, la recta tangente tendrá ecuación $y = f(0) + f'(0)(x-0)$. Es claro que $f(0) = 0$ y a partir de la expresión de la primera derivada de f,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^4+1} - x\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} = \frac{x^4+1-2x^4}{(x^4+1)^{3/2}} = \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{3/2}},$$

obtenemos que $f'(0) = 1$. La recta tangente a f en $x = 0$ es la recta de ecuación $y = x$.

ii) Resolviendo la ecuación $f(x) = 0$ es claro que f corta al eje de abscisas en $x = 0$. Se tiene entonces que el corte con el eje de ordenadas se produce para $y = f(0) = 0$. Es inmediato comprobar que $f(-x) = -f(x)$ por lo que la función f presenta simetría impar.

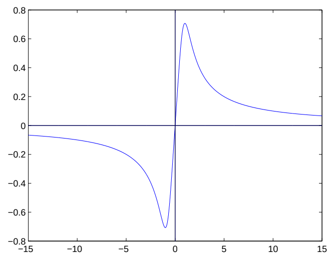
En cuanto a las asíntotas, no hay verticales ya que f es continua en $\mathbb{R}$. Además, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^4+1}} = 0,$$

por lo que concluimos que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (para $x \to +\infty$). El comportamiento de f en $-\infty$ queda determinado teniendo en cuenta la simetría de f. Podemos afirmar entonces que f no presenta asíntotas oblícuas.

De la expresión para $f'(x)$ dada en *i)* y teniendo en cuenta que $1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$, se deduce que f decrece en $(-\infty,-1)$, crece en $(-1,1)$ y decrece en $(1,\infty)$, de forma que la función presenta un mínimo relativo en $x = -1$, con $f(-1) = -\sqrt{2}/2$, y un máximo relativo en $x = 1$ de valor $f(1) = \sqrt{2}/2$.

Con los datos anteriores se puede realizar un esbozo de la gráfica.



iii) De la tabla de primitivas inmediatas se considera

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+1}}dx = \operatorname{ArgSh}\big(u(x)\big) + C = \log\left(u(x) + \sqrt{u^2(x)+1}\right) + C,$$

con $u(x) = x^2$ de donde se deduce inmediatamente que

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{(x^2)^2+1}}dx = \frac{1}{2}\log\left(x^2 + \sqrt{x^4+1}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}).$$

Nota: también se puede razonar como una integral binómica.

2.- i) Definamos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xy + z + e^z - 1.$$

La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$. Además, $f(0,0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = (1+e^z)\big|_{(0,0,0)} = 2 \neq 0$, con lo que basta aplicar el teorema de las funciones implícitas para concluir lo pedido en el enunciado. La función $z = z(x,y)$ será también de clase $\mathcal{C}^\infty$ en el entorno de $(0,0)$ donde está definida.

ii) Puesto que

$$f(x,y,z(x,y)) = x^2 + y^2 + xy + z(x,y) + e^{z(x,y)} - 1 = 0,$$

las derivadas parciales del término de la izquierda son nulas:

$$2x + y + (1+e^z)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0\,,$$

$$2y + x + (1+e^z)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Al evaluar en $(x,y)=(0,0)$, como $z(0,0)=0$, obtenemos que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$. Por tanto, $(x,y)=(0,0)$ es un punto crítico de la función $z=z(x,y)$. Para determinar si $z=z(x,y)$ presenta un extremo relativo en $(0,0)$, debemos estudiar la matriz Hessiana. Derivamos de nuevo las ecuaciones anteriores para obtener las igualdades

$$2+e^z\Big(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\Big)^2+(1+e^z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)=0\,,$$

$$2+e^z\Big(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\Big)^2+(1+e^z)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=0\,,$$

$$1+e^z\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+(1+e^z)\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x,y)=0\,.$$

Al evaluar otra vez en $(x,y)=(0,0)$, llegamos a $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=-1$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(0,0)=-\dfrac{1}{2}$. Además, por el lema de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(0,0)=-\dfrac{1}{2}$. Por tanto, la matriz Hessiana de $z(x,y)$ en $(0,0)$ es

$$Hz(0,0)=\begin{pmatrix}-1 & -1/2\\ -1/2 & -1\end{pmatrix},$$

sus menores son $\Delta_1=-1$ y $\Delta_2=3/4$, y la matriz es definida negativa. En consecuencia, la función $z=z(x,y)$ presenta un máximo relativo en $(0,0)$.

3.- i) Si consideramos el círculo de centro $(0,0,1)$ y radio 1 situado en el plano $z=1$ y lo representamos por S_3, la superficie suma $S+S_3$ es la frontera de un abierto acotado V, $\partial V=S+S_3$. Por el teorema de la divergencia,

$$\iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{F})\,dxdydz=\iint_{\partial V}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_e\,d\sigma=\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_e\,d\sigma+\iint_{S_3}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_e\,d\sigma\,,$$

donde $\boldsymbol{n}_e$ es vector normal a ∂V exterior a V. Puesto que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F})=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=0\,,$$

tenemos la igualdad

$$\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_e\,d\sigma=-\iint_{S_3}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_e\,d\sigma\,.$$

Una parametrización de S_3 es la aplicación $\psi:(0,1)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$(r,\theta)\mapsto(r\cos(\theta),r\operatorname{sen}(\theta),1)\,,$$

con vectores tangentes y vector normal

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta),0),\qquad\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=(-r\operatorname{sen}(\theta),r\cos(\theta),0),$$

$$\boldsymbol{n}_\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\times\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=(0,0,r)=\boldsymbol{n}_e\,,$$

de donde

$$\int_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_e\,d\sigma=-\int_{S_3}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_e\,d\sigma=-\iint_{(0,1)\times(0,2\pi)}(2r\operatorname{sen}(\theta),2,2r\cos(\theta)+1)\cdot(0,0,r)\,drd\theta=$$

$$=-\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}(2r^2\cos(\theta)+r)\,d\theta\Big)\,dr=-\pi\,.$$

ii) S es una superficie orientable cuyo borde ∂S es la circunferencia de centro $(0,0,1)$ y radio 1 situada en el plano $z=1$. Una parametrización de ∂S es la aplicación $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\theta\mapsto(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta),1)$$

con vector tangente $\varphi'(\theta)=(-\operatorname{sen}(\theta),\cos(\theta),0)$. La orientación definida en ∂S por esta parametrización es la opuesta a la inducida por el vector normal $\boldsymbol{n}_e$ a S considerado en el apartado anterior.

Por otro lado, al ser $\operatorname{div}(\boldsymbol{F})=0$ en $\mathbb{R}^3$ (abierto estrellado), existe un campo $\boldsymbol{G}$ tal que

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{G})=\Big(\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z},\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x},\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\Big)=\boldsymbol{F}$$

en $\mathbb{R}^3$. Si suponemos $G_1=0$, una solución obtenida mediante cálculo de primitivas es de la forma

$$\boldsymbol{G}(x,y,z)=(0,x^2+x,-2xz+y^2)\,.$$

Por el teorema de Stokes,

$$
\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e \, d\sigma = \iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n}_e \, d\sigma = \int_{\partial S} \boldsymbol{G} \, d\boldsymbol{r} \\
&= -\int_0^{2\pi} (0, \cos^2(\theta) + \cos(\theta), -2\cos(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) \cdot (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0) \, d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} (\cos^3(\theta) + \cos^2(\theta)) \, d\theta = -\pi \, .
\end{aligned}
$$