Índice general

1. Espacios normados. **1**

1.1. Espacios normados. 1

1.2. Ejemplos. 3

1.2.1. Espacios euclídeos y espacios de sucesiones 3

1.2.2. Espacios de funciones 5

1.2.3. Los espacios L^p 6

1.3. Espacios de Banach. 8

1.4. Ejercicios. 12

2. Aplicaciones lineales continuas. **17**

2.1. Aplicaciones lineales continuas. 17

2.2. Espacios de dimensión finita. 19

2.3. Ejercicios. 22

3. Espacio dual. Teorema de Hahn-Banach **29**

3.1. El espacio dual. 29

3.2. El teorema de Hahn-Banach. 30

3.3. Ejercicios. 33

4. Tres teoremas fundamentales en los espacios de Banach. **36**

4.1. Los teoremas de Baire. 36

4.2. Teorema de la aplicación abierta. 38

4.3. Ejercicios. 38

5. El espacio de las funciones continuas. **44**

5.1. Conjuntos precompactos. 44

5.2. El teorema de Ascoli. 45

5.3. Teorema de Stone. 47
5.4. Ejercicios 48

6. Espacios de Hilbert. 53
6.1. Productos internos. 53
6.2. Ortogonalidad. 55
6.3. Sistemas ortonormales completos. 57
6.4. Ejercicios. 61

7. Aplicaciones. 69
7.1. El teorema espectral. 69
7.1.1. Operadores compactos. 69
7.1.2. El operador adjunto. 70
7.1.3. El teorema espectral. 71
7.2. Series de Fourier. 72
7.2.1. Preliminares. 73
7.2.2. Series de Fourier. 74
7.2.3. Los núcleos de Dirichlet y Fejér. 77
7.2.4. Convergencia puntual de las series de Fourier. 79
7.3. Ejercicios 80

A. Espacios métricos. 91
A.1. Definición y topología en espacios métricos. 91
A.2. Axiomas de numerabilidad y separabilidad. 95
A.3. Compacidad en espacios métricos. 95
A.4. Límites y continuidad en espacios métricos. 96

B. Sumabilidad. 99
B.1. Familias sumables en un espacio normado. 99
B.2. Condición de Cauchy para la sumabilidad. 100
B.3. Fórmula de sumación por paquetes. 101
B.4. Sumabilidad de familias numerables. 102

Capítulo 1

Espacios normados.

Hay problemas en el Análisis Matemático que son más fáciles de abordar si se plantean en un marco abstracto convenientemente elegido. En muchos casos este marco consiste en un espacio vectorial dotado de una topología, donde la estructura lineal y la estructura topológica están relacionadas adecuadamente. El concepto de norma, que ya fue introducido en los espacios euclídeos, proporciona una relación de ese tipo.

1.1. Espacios normados.

A lo largo del curso $\mathbb{K}$ denotará indistintamente el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición 1.1.1 Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación de E en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $\| \ \|$, es una *norma* sobre E si verifica las cuatro propiedades siguientes:

N1. $\|x\| \geq 0$ para cada $x \in E$.

N2. $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

N3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para cada $x \in E$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$.

N4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada $x, y \in E$.

Un *espacio normado* es un par $(E, \| \ \|)$ donde E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\| \ \|$ es una norma sobre E.

Observación 1.1.2 Cuando hablemos de un espacio normado escribiremos E en lugar de $(E, \| \, \|)$, obviando la norma, salvo cuando aparezcan varias y sea necesario distinguirlas. En la misma línea, si M es un subespacio vectorial de E se considerará como un espacio normado provisto de la norma dada por la restricción a M de la norma de E.

Asumiremos que el alumno está familiarizado con los resultados básicos derivados del concepto de distancia y de la topología que ésta define, puesto que los ha estudiado en la asignatura de Topología. Se pueden encontrar resumidos en el apéndice A. Iremos introduciendo a lo largo del curso aquellas definiciones y proposiciones que aún no se han visto en el Grado y que son necesarias para el desarrollo de la asignatura.

Proposición 1.1.3 Si E es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ la aplicación $d : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

es una distancia sobre E.

Dicha distancia se llama la *distancia inducida por la norma*, y la topología asociada a esta distancia se conoce como la *topología de la norma*.

Proposición 1.1.4 Sea E es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Se verifica la *segunda desigualdad triangular*:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \quad \text{para cada } x, y \in E.$$

Proposición 1.1.5 Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Las aplicaciones siguientes son continuas cuando en los espacios $E \times E$ y $\mathbb{K} \times E$ se considera la topología producto correspondiente:

1. $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ en E.

2. $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ en E.

3. $x \mapsto \|x\|$ de E en $\mathbb{R}$.

Observación 1.1.6 Un espacio vectorial dotado de una topología para la cual las operaciones de suma y producto por escalares son aplicaciones continuas se dice que es un *espacio vectorial topológico*. Por tanto, un espacio normado es un espacio vectorial topológico. Sin embargo, hay espacios vectoriales topológicos que no son espacios normados: el espacio de las funciones holomorfas en un abierto del plano complejo dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de dicho abierto (denominada la *topología compacta-abierta*) es un ejemplo de ello.

Corolario 1.1.7 Sean E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, $a \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$. La *traslación* T_a y la *homotecia* D_λ, aplicaciones de E en E dadas por

$$T_a(x) = a + x \quad \text{y} \quad D_\lambda(x) = \lambda x,$$

son homeomorfismos de E en E.

Este resultado, y en particular, la invariancia de la topología por traslaciones (que se deduce por ser T_a un homeomorfismo), permite caracterizar los entornos de cualquier punto a partir de los entornos de 0:

Corolario 1.1.8 Sean E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $a \in E$. Un conjunto V es un entorno de a si, y sólo si, $V = a + U$ donde U es un entorno de 0.

Proposición 1.1.9 Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Si $a \in E$ y $r > 0$ se verifica que:

1. $B(a, r) = a + B(0, r)$ y $\overline{B}(a, r) = a + \overline{B}(0, r)$.
2. $B(0, r) = rB(0, 1)$ y $\overline{B}(0, r) = r\overline{B}(0, 1)$.
3. $\overline{B}(a, r)$ es la adherencia de $B(a, r)$ y $B(a, r)$ es el interior de $\overline{B}(a, r)$.

El resultado anterior no es válido en general en espacios métricos (de hecho, los dos primeros apartados no tienen sentido, a menos que haya una estructura vectorial subyacente).

Proposición 1.1.10 Sean E un espacio normado y M un subespacio de E. Entonces $\overline{M}$ es un subespacio cerrado de E.

1.2. Ejemplos.

1.2.1. Espacios euclídeos y espacios de sucesiones

Lema 1.2.1 Si $x, y > 0$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces

$$x^{\lambda} y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1 - \lambda) y.$$

Además, si $\lambda \in (0, 1)$ se tiene la igualdad si, y sólo si, $x = y$.

Definición 1.2.2 Se dice que dos números reales $p, q \in (1, \infty)$ son un par de *exponentes conjugados* si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

También se considera que 1 e ∞ son exponentes conjugados.

Proposición 1.2.3 (Desigualdad de Hölder en $\mathbb{K}^n$) Sean p y q exponentes conjugados, $p, q \in (1, \infty)$. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}. \tag{1.1}$$

Proposición 1.2.4 (Desigualdad de Minkowski en $\mathbb{K}^n$) Sea $p \in [1, \infty)$. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{1/p}. \tag{1.2}$$

Definición 1.2.5 Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada número real $p \geq 1$ y para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ se define

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Llamamos a $\|x\|_p$ la *p-norma* de x.

Proposición 1.2.6 Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada número real $p \geq 1$ la aplicación $\| \, \|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} \quad \text{si } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

define una norma en $\mathbb{K}^n$.

Definición 1.2.7 Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ se define

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Llamamos a $\|x\|_\infty$ la *norma infinito* o *norma del supremo* de x.

Proposición 1.2.8 Sea $n \in \mathbb{N}$. La aplicación $\| \, \|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \quad \text{si } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

es una norma en $\mathbb{K}^n$.

Definición 1.2.9 Sea $p \geq 1$. Se define $\ell^p = \ell^p(\mathbb{K})$ como el conjunto de las sucesiones $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de $\mathbb{K}$ tales que $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$. Para cada $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^p$ se define

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p}.$$

Llamamos a $\|x\|_p$ la *p-norma* de x.

Definición 1.2.10 Se define $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{K})$ como el conjunto de las sucesiones acotadas de elementos de $\mathbb{K}$. Para cada $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ se define

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Llamamos a $\|x\|_\infty$ la *norma infinito* o *norma del supremo* de x.

Como subconjuntos de ℓ^∞ representaremos por:

(i) c al conjunto de las sucesiones convergentes,

(ii) c_0 al conjunto de las sucesiones que convergen hacia 0, y

(iii) c_{00} al conjunto de las sucesiones con un número finito de términos no nulos.

Las desigualdades de Hölder y Minkowski se pueden extender fácilmente a estos conjuntos de sucesiones, simplemente aplicando el caso finito a las sumas parciales y tomando límites (conviene distinguir los casos $p = 1$ y $p \in (1, \infty)$). Se obtienen entonces los siguientes resultados:

Proposición 1.2.11 (Desigualdad de Hölder) Sean $p, q \in [1, \infty]$ exponentes conjugados. Para cada $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ e $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$, se tiene que $xy = \{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ y

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.3}$$

Proposición 1.2.12 (Desigualdad de Minkowski) Sea $p \in [1, \infty]$. Si $x, y \in \ell^p$, entonces $x + y = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ y

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Proposición 1.2.13 Sea $p \in [1, \infty]$. El conjunto $\ell^p = \ell^p(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y la aplicación $\| \ \|_p : \ell^p \to \mathbb{R}$ define una norma en ℓ^p.

Además, los conjuntos c, c_0 y c_{00} son subespacios vectoriales de ℓ^∞.

Observación 1.2.14 Si $p, q \in (1, \infty)$, $p < q$, se verifican las siguientes contenciones (ver el ejercicio 18)

$$c_{00} \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty.$$

1.2.2. Espacios de funciones

Definición 1.2.15 Sean A un conjunto no vacío e Y un espacio normado. Se denota por $\mathscr{B}(A, Y)$ el conjunto de las funciones $f : A \to Y$ acotadas. Si $f \in \mathscr{B}(A, Y)$, se define

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in A\}.$$

Llamamos a $\|f\|_\infty$ la *norma del supremo* de f. Si $Y = \mathbb{K}$ escribimos $\mathscr{B}(A, \mathbb{K}) = \mathscr{B}(A)$.

Si A es un espacio topológico, se definen:

(i) $\mathscr{B}\mathscr{C}(A, Y)$ como el conjunto de las funciones $f : A \to Y$ continuas y acotadas;

(ii) $\mathscr{C}_0(A, Y)$ como el conjunto de las funciones $f : A \to Y$ continuas que *se anulan en el infinito*, es decir, tales que para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subseteq A$ tal que $\|f(x)\| < \varepsilon$ si $x \notin K$; y

(iii) $\mathscr{C}_c(A, Y)$ como el conjunto de las funciones $f : A \to Y$ continuas y de soporte compacto, es decir, aquellas para las que existe un conjunto compacto $K \subseteq A$ tal que $f(x) = 0$ si $x \notin K$.

Recordemos que

$$\mathscr{C}_c(A,Y) \subseteq \mathscr{C}_0(A,Y) \subseteq \mathscr{BC}(A,Y) \subseteq \mathscr{B}(A,Y)$$

y que si A es compacto, entonces $\mathscr{C}(A,Y) = \mathscr{BC}(A,Y) = \mathscr{C}_0(A,Y) = \mathscr{C}_c(A,Y)$.

Proposición 1.2.16 Sean A un conjunto no vacío e Y un espacio normado. El conjunto $\mathscr{B}(A,Y)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y la aplicación $\|\ \|_\infty : \mathscr{B}(A,Y) \to \mathbb{R}$ es una norma en $\mathscr{B}(A,Y)$.

Si A es un espacio topológico, los conjuntos $\mathscr{C}_c(A,Y)$, $\mathscr{C}_0(A,Y)$ y $\mathscr{BC}(A,Y)$ son subespacios vectoriales de $\mathscr{B}(A,Y)$.

Observación 1.2.17

1. Si $A = \mathbb{N}$ resulta que $\mathscr{B}(\mathbb{N}) = \ell^\infty$.

2. La norma $\|\ \|_\infty$ también recibe el nombre de *norma de la convergencia uniforme* sobre A. La razón es obvia: la convergencia de una sucesión de funciones en $\mathscr{B}(A,Y)$ con esta norma es precisamente la convergencia uniforme de dicha sucesión de funciones en A.

1.2.3. Los espacios L^p

Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y X un subconjunto medible-Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

Recordemos que si f es una función medible en X, para cualquier número real $p > 0$ la función $|f|^p$ es medible.

Proposición 1.2.18 (Desigualdad de Hölder) Sean p y q exponentes conjugados, $p, q \in (1, \infty)$. Si f, g son dos funciones medibles en X no negativas, entonces

$$\int_X fg\, dm \leq \Big(\int_X f^p\, dm\Big)^{1/p} \Big(\int_X g^q\, dm\Big)^{1/q}. \tag{1.4}$$

Proposición 1.2.19 (Desigualdad de Minkowski) Sea $p \in [1, \infty)$. Si f, g son dos funciones medibles en X no negativas, entonces

$$\Big(\int_X (f+g)^p\, dm\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_X f^p\, dm\Big)^{1/p} + \Big(\int_X g^p\, dm\Big)^{1/p}. \tag{1.5}$$

Las demostraciones son análogas a las del caso finito, sustituyendo sumas por integrales.

Definición 1.2.20 Sea p un número real, $0 < p < \infty$. Para cada función compleja f medible en X, se define

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f|^p\, dm\Big)^{1/p}.$$

En principio, $\|f\|_p$ es un elemento de $[0, \infty]$.

Se define $\mathscr{L}^p(X)$ como el conjunto de todas las funciones complejas medibles en X para las que el valor $\|f\|_p$ es finito, es decir,

$$\mathscr{L}^p(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\}.$$

Llamamos a $\|f\|_p$ la *p-norma* o la *norma $\mathscr{L}^p$* de f.

Definición 1.2.21 Una función f compleja medible en X está *esencialmente acotada* en X si existe un número real $\alpha \geq 0$ tal que

$$m(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0.$$

En estas condiciones se dice que la constante α es una *cota superior esencial* de f.

Se define el *supremo esencial* de f por

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{\alpha : \alpha \text{ es una cota esencial de } f\}.$$

Si el conjunto $\{\alpha : \alpha \text{ es una cota esencial de } f\}$ es vacío (es decir, si f no está esencialmente acotada), entonces se define $\|f\|_\infty = \infty$.

Se denota por $\mathscr{L}^\infty(X)$ el conjunto de las funciones esencialmente acotadas en X.

Proposición 1.2.22 Si f es una función esencialmente acotada en X, entonces su supremo esencial $\|f\|_\infty$ es una cota superior esencial de f.

Observación 1.2.23 El alumno debe ser consciente de que no es lo mismo hablar del supremo esencial que del supremo, es decir, que hemos utilizado el símbolo $\|f\|_\infty$ con dos significados diferentes: no representa la mismo en $\mathscr{L}^\infty(X)$ que en $\mathscr{B}(X)$. Por ejemplo, si consideramos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x \neq 0; \qquad f(0) = 1;$$

entonces $\|f\|_\infty = 0$ como elemento de $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ y, sin embargo, $\|f\|_\infty = 1$ como elemento de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. El contexto nos indicará cuál es la elección correcta.

Proposición 1.2.24 El conjunto $\mathscr{L}^p(X)$, $0 < p \leq \infty$, es un espacio vectorial.

Proposición 1.2.25 (Desigualdad de Hölder) Sean $p, q \in [1, \infty]$ exponentes conjugados. Si $f \in \mathscr{L}^p(X)$ y $g \in \mathscr{L}^q(X)$, entonces $fg \in \mathscr{L}^1(X)$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q. \tag{1.6}$$

Proposición 1.2.26 (Desigualdad de Minkowski) Sea $p \in [1, \infty]$. Si f, g son dos funciones de $\mathscr{L}^p(X)$, entonces $f + g \in \mathscr{L}^p(X)$ y

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.7}$$

Proposición 1.2.27 Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para $f, g \in \mathscr{L}^p(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se verifican las siguientes propiedades:

SN1) $\|f\|_p \geq 0$;

SN2) $\|f\|_p = 0$ si, y sólo si, $f = 0$ c.s.;

SN3) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$;

SN4) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

La proposición anterior demuestra que $\|\cdot\|_p$ define una *seminorma* en $\mathscr{L}^p(X)$, es decir, cumple las propiedades SN1, SN3 y SN4, pero un elemento puede tener norma nula sin ser nulo. Por tanto, resulta natural dar la siguiente definición.

Definición 1.2.28 En $\mathscr{L}^p(X)$ se define la siguiente relación de equivalencia:

$$f \sim g \quad \text{si, y sólo si,} \quad \|f - g\|_p = 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad f = g \text{ c.s. en } X.$$

Denotaremos por $L^p(X)$ el espacio cociente definido en $\mathscr{L}^p(X)$ por la relación $\sim$. Si $[f\,]$ es un elemento de $L^p(X)$ se define

$$\|[f\,]\|_p = \|f\|_p$$

siendo f un representante de $[f\,]$. Esta definición es coherente (no depende del representante elegido) y resulta que $\| \ \|_p$ es una norma en $L^p(X)$.

Observación 1.2.29 El alumno sabe que si E es un espacio vectorial y M es un subespacio vectorial, entonces la relación $\sim$ definida por

$$x \sim y \quad \text{si, y sólo si,} \quad x - y \in M,$$

es una relación de equivalencia y el conjunto cociente, que se representa por E/M, tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares definidas mediante los representantes (véase [14]).

Ésta es la situación que nos ocupa, donde $M = \{f \in \mathscr{L}^p(X) : \|f\|_p = 0\} = \{f \in \mathscr{L}^p(X) : f = 0 \text{ c.s.}\}$ es el subespacio de $\mathscr{L}^p(X)$ que se está considerando.

1.3. Espacios de Banach.

Aunque la estructura de espacio normado es bastante rica, veremos que muchos resultados fundamentales requieren una propiedad adicional: la completitud.

Definición 1.3.1 Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X se dice que es *de Cauchy* si verifica la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

para cada par de números naturales $n, m \geq n_0$."

Proposición 1.3.2 Sea (X,d) un espacio métrico. Toda sucesión de Cauchy está acotada.

Proposición 1.3.3 Sea (X,d) un espacio métrico. Si una sucesión es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge.

Proposición 1.3.4 Sea (X,d) un espacio métrico. Toda sucesión convergente de elementos de X es una sucesión de Cauchy.

Las demostraciones de los resultados anteriores son similares a las que se realizan en la recta real, sustituyendo la distancia dada por el módulo por una distancia arbitraria. El recíproco de la proposición 1.3.4, en general, no es cierto, lo que justifica la siguiente definición.

Definición 1.3.5 Se dice que un espacio métrico (X,d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Proposición 1.3.6 Sean (X,d) un espacio métrico e Y un subconjunto de X.

1. Si (Y,d) es completo, entonces Y es cerrado en X.

2. Si (X,d) es completo e Y es cerrado en X, entonces (Y,d) es completo.

Teorema 1.3.7 Si (X,d) es un espacio métrico compacto, entonces es completo.

Definición 1.3.8 Un *espacio de Banach* es un espacio normado que es completo para la métrica de la norma.

Proposición 1.3.9 Para $p \in [1,\infty]$, el espacio $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Proposición 1.3.10 Sean A un conjunto no vacío e Y un espacio normado. El espacio $(\mathscr{B}(A,Y), \|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach si, y sólo si, lo es Y.

La proposición 1.3.6 se enuncia así en el caso particular de los espacios normados:

Proposición 1.3.11 Sean E un espacio normado y F un subespacio lineal de E.

1. Si F es un espacio de Banach, entonces F es cerrado en E.

2. Si E es un espacio de Banach y F es cerrado en E, entonces F es un espacio de Banach.

Aplicaremos este resultado en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.3.12 Los espacios $(c, \|\cdot\|_\infty)$ y $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach, pero $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ no lo es.

Proposición 1.3.13 Si A es un espacio topológico e Y un espacio de Banach, los espacios $(\mathscr{BC}(A,Y), \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathscr{C}_0(A,Y), \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.

Si A es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces $\mathscr{C}_c(A,Y)$ es denso en $\mathscr{C}_0(A,Y)$ y, en particular $(\mathscr{C}_c(A,Y), \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio de Banach si $\mathscr{C}_c(A,Y) \neq \mathscr{C}_0(A,Y)$.

Para probar la completitud de los espacios $L^p(X)$ (ver la proposición 1.3.21) será interesante caracterizar los espacios normados completos como aquellos en los que toda serie absolutamente convergente es convergente (teorema 1.3.20). Esto motiva los siguientes desarrollos.

Definición 1.3.14 Sea E un espacio normado. Una *serie* de elementos de E es un par ordenado de sucesiones de elementos de E

$$(\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{s_n\}_{n=1}^\infty), \tag{1.8}$$

donde

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j, \quad n = 1, 2, \ldots$$

El número a_n se llama *término n-ésimo* de la serie y el número s_n se denomina *suma parcial n-ésima* de la serie. Tradicionalmente se utiliza la notación $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ para representar la serie (1.8).

Definición 1.3.15 Sea E un espacio normado. Se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ de elementos de E es *convergente* si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión convergente. En caso contrario se dice que la serie *no converge*.

Si la serie es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, se llama *suma* de la serie al elemento s y se representa también por $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Es inmediata la siguiente proposición:

Proposición 1.3.16 Sea E un espacio normado. Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y $\sum_{n=1}^\infty b_n$ son convergentes y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, entonces $\sum_{n=1}^\infty (\lambda a_n + \mu b_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^\infty (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^\infty a_n + \mu \sum_{n=1}^\infty b_n$.

La condición de Cauchy aplicada a la sucesión de sumas parciales nos garantiza la siguiente proposición:

Proposición 1.3.17 (Criterio de convergencia de series de Cauchy) Sean E un espacio normado y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de elementos de E.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, verifica la siguiente *condición de Cauchy*: para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} a_k \Big\| < \varepsilon \quad \text{si } m, n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq m \geq N. \tag{1.9}$$

2. Si E es un espacio de Banach y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica la condición de Cauchy (1.9), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Corolario 1.3.18 (Condición necesaria de convergencia) Sean E un espacio normado y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de elementos de E. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definición 1.3.19 Sea E un espacio normado. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de elementos de E es absolutamente convergente, si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ converge.

Teorema 1.3.20 Sea E un espacio normado. Son equivalentes:

1. E es un espacio de Banach.

2. Toda serie absolutamente convergente de elementos de E es convergente.

Proposición 1.3.21 Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y X un subconjunto medible-Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Para $p \in [1, \infty]$, el espacio $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

***Nota**: La convergencia en $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ no implica la convergencia puntual, sin embargo, en la demostración de los dos resultados anteriores está implícita la siguiente proposición.*

Proposición 1.3.22 Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y X un subconjunto medible-Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Para $p \in [1, \infty]$, toda sucesión convergente en $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ tiene una subsucesión que converge puntualmente casi siempre en X.

Terminamos el primer capítulo indicando que todo espacio normado puede verse, de forma esencialmente única, como subespacio denso de un espacio de Banach. Precisamos primero algunos hechos sencillos acerca de las isometrías (ver la definición A.4.11) lineales entre espacios normados.

Proposición 1.3.23 Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre los espacios normados E y F. Son equivalentes:

i) T es una isometría.

ii) Para todo $x \in E$ se tiene que $\|T(x)\| = \|x\|$, es decir, T *conserva la norma.*

Teorema 1.3.24 (Compleción de un espacio normado) Sea E un espacio normado. Existe un espacio de Banach $\widehat{E}$ y una isometría lineal $j : E \to \widehat{E}$ tal que $j(E)$ es denso en $\widehat{E}$. Además, $\widehat{E}$ es único salvo isometrías.

1.4. Ejercicios.

⇨ **Ejercicio 1** Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y d una distancia sobre E. Demostrar que d es una distancia inducida por una norma si, y sólo si, se verifican las dos propiedades siguientes:

1. $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ para cada $x, y, z \in E$.
2. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ para cada $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ejercicio 2 Sean A y B subconjuntos no vacíos de un espacio normado E.

1. Si A y B son compactos, entonces $A + B$ es compacto.
2. Demostrar que $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$.
3. Demostrar que si A es compacto, $A + \overline{B} = \overline{A + B}$. En particular, probar que si A es compacto y B es cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.
4. Dar un ejemplo de dos subconjuntos cerrados A y B de $\mathbb{R}$ tales que $A + B$ no sea cerrado.

Ejercicio 3 Demostrar que todo espacio normado es conexo y localmente conexo.

⇨ **Ejercicio 4** Sea E un espacio normado. Demostrar que si $A \subseteq E$ es un conjunto convexo entonces $\overline{A}$ y $\mathring{A}$ son conjuntos convexos.

⇨ **Ejercicio 5** Sea E un espacio normado. Si M un subespacio vectorial de E *propio* (es decir, $M \neq E$), demostrar que $\mathring{M} = \emptyset$.

⇨ **Ejercicio 6** Sean E un espacio normado y $A \subseteq E$ numerable. Demostrar que la adherencia del subespacio lineal generado por A es separable.

Ejercicio 7 Sea E un espacio normado. Probar que los enunciados siguientes son equivalentes:

1. E es separable.

2. La bola abierta unidad $B = B(0,1)$ es separable.

3. La esfera unidad $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ es separable.

Ejercicio 8 Sean E un espacio normado y $A \subseteq E$ no vacío. Demostrar que los enunciados siguientes son equivalentes:

1. A es un conjunto acotado.

2. Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A y cada sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares que converge hacia 0, la sucesión $\{\lambda_n x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el vector 0.

Ejercicio 9 Sea E un espacio normado y $r > 0$. Probar que E y $B(0,r)$ son homeomorfos.

Ejercicio 10 Sean $\mathscr{B}$ un sistema fundamental de entornos del vector 0 en un espacio normado E y A un subconjunto de E. Demostrar que

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathscr{B}} A + V.$$

⇨ **Ejercicio 11** Sean $(E_1, \| \|_1), (E_2, \| \|_2), \ldots, (E_n, \| \|_n)$, n espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. En el espacio producto $E = E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$ se considera

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sup\{\|x_k\|_k : k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

1. Probar que $\| \|$ define una norma sobre E y que la topología asociada a esta norma es la topología producto.

2. Probar que el espacio normado $(E, \| \|)$ es Banach si, y sólo si, $(E_k, \| \|_k)$ es Banach para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

⇨ **Ejercicio 12** Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios normados no nulos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que la topología producto sobre $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ no procede de una norma sobre E.

⇨ **Ejercicio 13** Sean E y F dos espacios vectoriales y $T : E \to F$ una aplicación lineal e inyectiva. Si $\| \|$ es una norma sobre F, probar que

$$\|x\|_* = \|T(x)\|, \quad x \in E,$$

define una norma sobre E.

Si, además, T es sobreyectiva, probar que $(E, \| \|_*)$ es un espacio de Banach si, y sólo si, lo es $(F, \| \|)$.

Nota: *Obsérvese que si prescindimos de la inyectividad de T lo que se obtiene es una seminorma.*

Si T es inyectiva, pero no es sobreyectiva, en general no podemos relacionar la completitud de E y de F. Por ejemplo, veremos más adelante que si E es de dimensión finita, será de Banach, independientemente de T y de F. Por otro lado, si $T(E)$ es denso en F, entonces E no será de Banach, aunque lo sea F; lo que ocurre por ejemplo si $E = c_{00}$, $F = c_0$ y T es el operador identidad.

⇨ **Ejercicio 14** Estudiar la separabilidad de ℓ^∞, c, c_0 y c_{00}.

Demostrar que c_{00} es denso en c_0.

⇨ **Ejercicio 15** Sea $p \in [1, \infty)$. Demostrar que c_{00} es denso en ℓ^p. Estudiar la separabilidad de ℓ^p.

⇨ **Ejercicio 16** Dar un ejemplo en el espacio normado c_{00} de una serie absolutamente convergente que no sea convergente.

Ejercicio 17 Sea $0 < p < 1$.

1. Demostrar que $(1 + x)^p \leq 1 + x^p$ si $x \geq 0$.

2. Demostrar que $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ si $a, b \geq 0$.

3. Sea ℓ^p el conjunto de las sucesiones $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de $\mathbb{K}$ tales que $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$. Demostrar que ℓ^p es un espacio vectorial, pero $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$ no es una norma en ℓ^p.

4. Si $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^p$ ponemos $d_p(x, y) = \sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p$. Probar que d_p es una distancia en ℓ^p que no proviene de una norma.

5. Demostrar que (ℓ^p, d_p) es un espacio métrico completo.

6. Demostrar que (ℓ^p, d_p) es separable.

Ejercicio 18 Sea $1 \leq p < q < \infty$.

1. Demostrar que $\ell^p \subseteq \ell^q$ y que la inclusión es estricta.

2. Demostrar que ℓ^p no es cerrado en ℓ^q.

3. Demostrar que la topología de ℓ^p es más fina que la topología de subespacio de ℓ^q.

Ejercicio 19 Se designa por E el espacio vectorial de las funciones definidas y continuas en [0,1] con valores en $\mathbb{K}$. Para cada $f \in E$ se define $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Probar que $\| \ \|_1$ es una norma sobre E y que el espacio normado así definido no es un espacio de Banach.

Ejercicio 20 Para $0 < \alpha \leq 1$, se denota por $\mathrm{Lip}(\alpha)$ al conjunto de las funciones complejas f definidas en el intervalo $[a, b]$ para las cuales existe una constante $M > 0$ (que depende de f) tal que

$$|f(s) - f(t)| \leq M|t - s|^\alpha \quad \text{para cada } t, s \in [a, b].$$

1. Probar que $\mathrm{Lip}(\alpha)$ es un espacio vectorial complejo.

2. Si $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ se denota por $M(f)$ al número
$$M(f) = \sup\Big\{\frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} : s, t \in [a, b], s \neq t\Big\}$$
y se definen
$$\|f\| = |f(a)| + M(f) \quad \text{y} \quad \|f\|_* = \sup\{|f(s)| : s \in [a, b]\} + M(f).$$
Demostrar que $\|f\|$ y $\|f\|_*$ son dos normas sobre $\mathrm{Lip}(\alpha)$ y que, provisto con cualquiera de ellas, es un espacio de Banach.

⇨ **Ejercicio 21** Sea E un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado de E. En el espacio vectorial cociente E/M se define la llamada *norma cociente*:

$$|||\hat{x}||| = \text{ínf}\{\|x\| : x \in \hat{x}\}, \quad \hat{x} \in E/M.$$

1. Demostrar que $||| \cdot |||$ define una norma en E/M.

2. Si E es un espacio de Banach, demostrar que $(E/M, ||| \cdot |||)$ es un espacio de Banach.

⇨ **Ejercicio 22** Sea E un espacio normado. Una *base de Schauder* en E es una sucesión $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de E tal que para cada $x \in E$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la sucesión $\mathbf{e}_n = \{\delta_{nm}\}_{m=1}^\infty$, donde $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$ y $\delta_{nn} = 1$. Demostrar que $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$ es una base de Schauder en los espacios c_0 o ℓ^p con $1 \leq p < \infty$.

2. Demostrar que si un espacio normado admite una base de Schauder entonces es separable.

Ejercicio 23 Sean E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y H un subespacio vectorial de E. Se designa por $c_H(E)$ el conjunto de las sucesiones de elementos de E que convergen hacia un elemento de H.

1. Probar que $c_H(E)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones habituales de suma y producto por escalares.

2. Si $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in c_H(E)$ se escribe $||x||_\infty = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Demostrar que la aplicación $x \to ||x||_\infty$ es una norma en $c_H(E)$.

3. Demostrar que el espacio $(c_H(E), \|\ \|_\infty)$ es de Banach si, y sólo si, E es un espacio de Banach y H es cerrado.

4. Probar que E es separable si, y sólo si, lo es $c_H(E)$.

Ejercicio 24 Se denota por cs el espacio vectorial de las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de $\mathbb{K}$ tales que la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es convergente, dotado de la norma del supremo.

1. Probar que c_{00} es denso en cs.

2. Probar que el espacio cs no es completo.

3. Se consideran los subconjuntos de cs,
$$A = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in cs : x_{2n} = 0,\ n = 1, 2, \dots\} \quad \text{y} \quad B = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in cs : x_{2n-1} = 0,\ n = 1, 2, \dots\}.$$
Probar que A y B son subespacios vectoriales cerrados de cs.

4. Demostrar que $A + B$ es un subespacio propio de cs y denso en cs.

⇨ **Ejercicio 25** En el espacio $\mathscr{C}([0, 2], \mathbb{R})$ dotado de la norma del supremo, se considera el subconjunto
$$H = \{f \in \mathscr{C}([0, 2], \mathbb{R}) : f(x) = 0,\ x \in [0, 1] \text{ y } \|f\|_\infty \le 1\}.$$

1. Probar que H es cerrado y acotado en $\mathscr{C}([0, 2], \mathbb{R})$.

2. Demostrar que para cada $f \in H$ se verifica que $\int_0^2 f(x)\, dx < 1$.

3. Determinar $\sup\{\int_0^2 f(x)\, dx : f \in H\}$.

4. Deducir que H no es compacto en el espacio normado $\mathscr{C}([0, 2], \mathbb{R})$.

Capítulo 2

Aplicaciones lineales continuas.

Al estudiar las aplicaciones entre espacios normados la estructura algebraica hace plantearse el estudio de las aplicaciones lineales, mientras que la estructura topológica motiva el estudio de las aplicaciones continuas. Por este motivo la noción de aplicación lineal continua (u operador continuo) de E en F es una de las más importantes de esta teoría. Todo operador lineal entre espacios normados de dimensión finita es continuo. Es más, si un espacio E es de dimensión finita, todo operador lineal T de E en un espacio normado F es continuo. Esto no es cierto si el espacio de origen tiene dimensión infinita y comenzaremos dando propiedades que caractericen a los operadores lineales y continuos.

2.1. Aplicaciones lineales continuas.

Definición 2.1.1 Dados dos espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $T : E \to F$ es *lineal* si

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

para todo $x, y \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Para referirnos a una aplicación lineal, usaremos también las expresiones *operador lineal* o simplemente *operador*.

Como es usual en muchos textos, para cualquier $x \in E$ escribiremos $T(x)$ o Tx indistintamente.

En lo que sigue, si no se dice expresamente, cuando hablemos de aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales E y F, se supondrá que ambos están soportados por el mismo cuerpo.

El siguiente resultado es clave para manejar la continuidad en espacios normados:

Teorema 2.1.2 Sean E y F dos espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : E \to F$ un operador lineal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. T es continuo en E.

2. T es continuo en $0 \in E$.

3. T está acotado en la bola cerrada unidad $\overline{B}(0, 1)$ de E.

4. T transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

5. Existe una constante $M \geq 0$ tal que
$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \text{para cada } x \in E\,. \tag{2.1}$$

6. T es uniformemente continuo en E.

A diferencia de lo que ocurre en ausencia de linealidad o en un espacio métrico arbitrario, la continuidad de un operador T es equivalente a que T transforme conjuntos acotados de E en conjuntos acotados de F. Por este motivo cuando se habla de operadores lineales entre espacios normados es usual utilizar el término *acotado* como sinónimo de continuo.

Definición 2.1.3 Sean E y F dos espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Representaremos por $\mathscr{L}(E, F)$ el conjunto de los operadores lineales y continuos de E en F. Cuando $F = E$ el conjunto $\mathscr{L}(E, E)$ se representa por $\mathscr{L}(E)$.

El extremo inferior de las constantes M que verifican (2.1) recibe el nombre de *norma* del operador T y se representa por $\|T\|$, es decir,
$$\|T\| = \text{ínf}\{M \geq 0 \,:\, \|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \text{para todo } x \in E\}. \tag{2.2}$$

La norma de un operador continuo es, de hecho, la mínima de las constantes que verifican (2.1):

Proposición 2.1.4 Si E y F son espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathscr{L}(E, F)$, se verifica que
$$\|T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\| \quad \text{para cada } x \in E\,.$$

Proposición 2.1.5 Sean E y F dos espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Con las operaciones usuales $\mathscr{L}(E, F)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y la aplicación $\|\ \| : \mathscr{L}(E, F) \to \mathbb{R}$ definida por (2.2) es una norma.

Proposición 2.1.6 Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Entonces
$$\|T\| = \sup\Big\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\Big\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}\,.$$

Proposición 2.1.7 Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$. La convergencia en norma de una sucesión de operadores implica la convergencia puntual, es decir, si $T_n \to T$ en $\mathscr{L}(E,F)$, entonces $T_n(x) \to T(x)$ en F para todo $x \in E$.

No sólo eso, la convergencia en norma es equivalente a la convergencia uniforme en los conjuntos acotados. Dejamos la demostración de este hecho para el alumno (véase el ejercicio 29).

Proposición 2.1.8 Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Si F es un espacio de Banach, entonces $\mathscr{L}(E,F)$ es tambien un espacio de Banach.

Si E es un espacio no trivial el recíproco también es cierto, pero para probarlo necesitamos el teorema de Hahn-Banach (véase el ejercicio 73).

2.2. Espacios de dimensión finita.

Los espacios de dimensión finita son los ejemplos más sencillos de espacios normados y presentan en determinadas cuestiones un comportamiento muy particular: son siempre espacios de Banach y son los únicos para los cuales todas las aplicaciones lineales son continuas, todas las normas son equivalentes y todos los conjuntos cerrados y acotados son compactos.

Definición 2.2.1 Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y T una aplicación lineal de E en F.

- Se dice que T es un *isomorfismo lineal* de E en F si T es biyectiva (recordemos que esto implica que T^{-1} también es lineal). Si llamamos *rango* de T al conjunto imagen de T, $T(E)$, también denotado por
$$\mathrm{Rang}(T) = \{Tx : x \in E\},$$
y si $\ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}$ es el *núcleo* de T, entonces T es isomorfismo lineal si, y sólo si, $T(E) = F$ (es decir, T es sobreyectiva) y $\ker(T) = \{0\}$ (i.e. T es inyectiva).

- Si E y F son espacios normados, se dice que T es un *isomorfismo topológico* de E en F si T es un isomorfismo lineal tal que T y T^{-1} son continuas.

Proposición 2.2.2 Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y T una aplicación lineal de E en F. Entonces T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, T es sobre y existen constantes $M, N > 0$ tales que
$$N\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \text{para cada } x \in E. \tag{2.3}$$

Proposición 2.2.3 Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y T un isomorfismo topológico de E en F. Entonces A es abierto (respectivamente cerrado, compacto, acotado) en E si, y sólo si, $T(A)$ es abierto (respectivamente cerrado, compacto, acotado) en F.

Proposición 2.2.4 Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ topológicamente isomorfos. Si E es un espacio de Banach, entonces F también lo es.

Definición 2.2.5 Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\| \|_1, \| \|_2$ dos normas sobre E.

- Se dice que la norma $\| \|_1$ es *más fina que* la norma $\| \|_2$ si existe una constante $M > 0$ tal que
$$\|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \text{para cada } x \in E.$$
- Se dice que $\| \|_1$ y $\| \|_2$ son *equivalentes* si existen constantes $M, N > 0$ tales que
$$N\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \text{para cada } x \in E,$$
es decir, si $\| \|_1$ es más fina que la norma $\| \|_2$ y $\| \|_2$ es más fina que la norma $\| \|_1$.

Ejemplo 2.2.6 En $\mathbb{K}^n$ las normas $\| \|_1$, $\| \|_2$ y $\| \|_\infty$ son equivalentes (véanse los ejemplos 1.2.5 y 1.2.7). Basta observar que
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty \leq n\,\|x\|_2 \quad \text{para cada } x \in \mathbb{K}^n.$$

Proposición 2.2.7 Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

1. Una norma sobre E es más fina que otra si, y sólo si, la topología asociada a la primera norma es más fina que la topología asociada a la segunda.
2. Dos normas sobre E son equivalentes si, y sólo si, tienen la misma topología asociada en E.

Teorema 2.2.8 Sea E un espacio normado de dimensión finita n. Entonces existe un isomorfismo topológico $T : (\mathbb{K}^n, \| \|_1) \to (E, \| \|)$.

Corolario 2.2.9

1. Dos espacios normados de dimensión finita con la misma dimensión son topológicamente isomorfos.
2. Todas las normas en un espacio normado de dimensión finita son equivalentes.
3. Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.
4. Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.

5. Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en un espacio normado arbitrario es continua.

6. En un espacio normado de dimensión finita un conjunto es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado (teorema de Heine-Borel).

Observación 2.2.10 Si E es un espacio normado de dimensión infinita, existen operadores lineales $T : E \to \mathbb{K}$ y $S : E \to E$ no continuos. Para determinar una aplicación lineal es suficiente con dar las imágenes de los elementos de una base; así, si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema linealmente independiente de elementos de E con norma 1, basta pedir $T(e_n) = n$ y $S(e_n) = ne_n$, por ejemplo. Si, además, S es inyectiva, la aplicación $\| \|_* : E \to \mathbb{R}$, dada por $\|x\|_* = \|S(x)\|$, es una norma sobre E (véase el ejercicio 13) que no es equivalente a $\| \|$.

Para terminar esta sección vamos a caracterizar los espacios de dimensión finita como aquellos que cumplen el teorema de Heine-Borel.

Definición 2.2.11 Sea (E, d) un espacio métrico. Si $x \in E$ y A es un subconjunto no vacío de E, se define la *distancia de x a A* por

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Lema 2.2.12 Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$ y A es un subconjunto de E.

1. $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, $d(x, A) = 0$.

2. Si A es cerrado, entonces $x \in A$ si, y sólo si, $d(x, A) = 0$.

Lema 2.2.13 (de Riesz) Sean E un espacio normado y F un subespacio cerrado de E con $E \neq F$. Si $0 < r < 1$ existe $x_r \in E$ tal que $\|x_r\| = 1$ y $r \leq d(x_r, F) \leq 1$.

Teorema 2.2.14 (F. Riesz, 1918) Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. E tiene dimensión finita.

2. Todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

3. La bola unidad cerrada $\overline{B}(0, 1)$ es compacta (es decir, E es localmente compacto).

2.3. Ejercicios.

Ejercicio 26 Sean E un espacio normado y F un espacio de Banach, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de E y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\mathscr{L}(E,F)$, demostrar que la sucesión $\{T_n(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en F.

⇨ **Ejercicio 27** Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de aplicaciones lineales continuas de un espacio normado E en un espacio de Banach F. Se supone:

1. Existe $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para $n = 1, 2, \ldots$
2. La sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en un subconjunto denso de E.

Demostrar que la sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente hacia una aplicación lineal continua de E en F.

Ejercicio 28 Sean E y F dos espacios normados sobre el mismo cuerpo y sea T una aplicación lineal de E en F. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. T es continua.
2. T transforma sucesiones de Cauchy de E en sucesiones de Cauchy de F.
3. T transforma sucesiones que convergen a 0 en E en sucesiones acotadas de F.
4. Para cada serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente en E, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$ converge en F.

⇨ **Ejercicio 29** Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{L}(E,F)$. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathscr{L}(E,F)$.
2. $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los acotados de E.
3. $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en la esfera unidad de E.

⇨ **Ejercicio 30** Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y T una aplicación lineal continua de E en F. Probar que si existe $c > 0$ tal que $c\|x\| \leq \|T(x)\|$ para cada $x \in E$, entonces T es inyectiva y $T(E)$ es cerrado en F.

***Nota**: Si F es de Banach, el recíproco también es cierto, como veremos en el ejercicio 102 del capítulo 4, pero para demostrarlo usaremos el teorema de la aplicación abierta que se abordará en dicho capítulo.*

⇨ **Ejercicio 31** Sean $p, q \in [1, \infty]$ exponentes conjugados y $g \in L^q(\mathbb{R})$. Se define el operador $T_g : L^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ por

$$T_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx.$$

Probar que T_g es un operador lineal y continuo, y calcular su norma.

⇨ **Ejercicio 32** Sea $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{K})$ con la norma de la convergencia uniforme. Dada $g \in E$, $g \geq 0$, sea $T\colon E \to E$ la aplicación definida por

$$T(f)(x) = \int_0^x g(t)f(t)\,dt.$$

Demostrar que la aplicación T es lineal y continua y calcular su norma.

Nota: *El ejercicio se puede plantear también si g no es positiva y el resultado final es el mismo, pero la demostración es más laboriosa, siendo necesario algún resultado de aproximación de funciones medibles por funciones continuas, como el teorema de Lusin [15].*

Ejercicio 33 Sea $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{K})$ provisto de la norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Se considera la aplicación T de E en $\mathbb{K}$ definida por $T(f) = f(\frac{1}{2})$.

1. ¿Es T continua en E?
2. Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $M_n > 0$ tal que $|T(P)| \leq M_n \|P\|_1$ para cada polinomio P de grado a lo sumo n.

⇨ **Ejercicio 34** Sea $E = \mathscr{C}_c((0,1), \mathbb{K})$ el espacio de las funciones continuas en (0,1) con valores en $\mathbb{K}$ con soporte compacto. Se considera la aplicación $T\colon E \to \mathbb{K}$ dada por $T(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$. Estudiar si T es un operador continuo cuando a $\mathscr{C}_c((0,1), \mathbb{K})$ se le dota de la norma de la convergencia uniforme.

Ejercicio 35 Se define $T\colon \ell^1 \to \mathbb{K}$ por $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ donde $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$. Averiguar si T es una aplicación continua para la norma $\| \,\|_\infty$.

Ejercicio 36 Sea E el espacio vectorial de los polinomios reales de una variable. Se definen en E las normas:

$$\|P\|_\infty = \sup\{|P(t)| : t \in [0,1]\} \quad \text{y} \quad \|P\| = \|P\|_\infty + \|P'\|_\infty.$$

Sea D la aplicación de E en E dada por $D(P) = P'$.

1. Demostrar que la aplicación $D\colon (E, \| \,\|) \to (E, \| \,\|_\infty)$ es continua y calcular $\|D\|$.
2. ¿Es continua la aplicación $D\colon (E, \| \,\|_\infty) \to (E, \| \,\|)$?

⇨ **Ejercicio 37** Sean $p \in [1, \infty]$ y $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$.

1. Probar que para cada $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ se tiene que $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$.

2. Sea $T_a \colon \ell^p \to \ell^p$ dada por $T_a(b) = \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Demostrar que $T_a \in \mathscr{L}(\ell^p, \ell^p)$ y determinar $\|T_a\|$. La aplicación T_a se llama el *operador multiplicación por* a.

3. Demostrar que $T_a \circ T_a = T_a$ si, y sólo si, $a_n = 0$ o $a_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

4. Demostrar que T_a es inyectiva si, y sólo si, $a_n \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots$

5. Dar una condición necesaria y suficiente para que T_a sea biyectiva.

⇨ **Ejercicio 38** Sea $p \in [0, \infty]$. Se consideran en ℓ^p los operadores S y T dados por

$$S(\boldsymbol{x}) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$$

$$T(\boldsymbol{x}) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots), \quad \boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$$

llamados *desplazamiento a la derecha* y *a la izquierda* respectivamente.

Probar que S y T son operadores lineales y continuos. Determinar su norma y calcular los operadores ST y TS.

Ejercicio 39 Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $T \colon \ell^p \to c_0$ dada por $T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\frac{x_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Demostrar que T es lineal continua y no suprayectiva. Calcular $\|T\|$.

Ejercicio 40 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de elementos de ℓ^1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se designa por $e_n = \{\delta_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$. Probar que existe una aplicación lineal y continua $T \colon \ell^1 \to \ell^1$ tal que $T(e_n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Determinar la norma de T.

***Nota**: Es interesante reflexionar sobre posibles generalizaciones de este ejercicio: por ejemplo, ¿bajo qué condiciones se puede sustituir ℓ^1 por ℓ^p? ¿Se puede sustituir ℓ^1 por un espacio de Banach cualquier con base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$?*

Ejercicio 41 Sea $M = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : a_n = 0 \text{ si } n \text{ es par}\}$.

1. Demostrar que M es un subespacio vectorial cerrado de c_0.

2. Demostrar que existe una isometría lineal y sobre de c_0 en c_0/M (véase el ejercicio 21).

Ejercicio 42 Se designa por E el espacio vectorial de los polinomios en una variable con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. Si $P \in E$ es el polinomio $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, se define:

$$\|P\|_\infty = \sup\{|P(t)| : 0 \leq t \leq 1\} \quad \text{y} \quad \|P\| = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

1. Probar que $\| \ \|$ es una norma sobre E.

2. Demostrar que $\|P\|_\infty \leq \|P\|$ para cada $P \in E$.

3. Demostrar que no existe $M > 0$ tal que $\|P\| \leq M\|P\|_\infty$ para cada $P \in E$.

***Nota**: Este ejercicio nos proporciona un ejemplo de dos normas que son comparables, pero no son equivalentes. Como veremos cuando estudiemos el teorema de la aplicación abierta, esto implica que al menos una de las normas no proporciona a E de estructura de espacio de Banach. En este caso es sencillo comprobar que $(E, \| \ \|)$ no es un espacio de Banach.*

⇨ **Ejercicio 43** Sea E el espacio de las funciones de clase $\mathscr{C}^n$ en $[a, b]$ con valores en $\mathbb{K}$. Para cada $f \in E$ ponemos

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \ldots + \|f^{(n)}\|_\infty \quad \text{y} \quad \|f\|_* = |f(a)| + |f'(a)| + \ldots + |f^{(n-1)}(a)| + \|f^{(n)}\|_\infty,$$

donde $\| \ \|_\infty$ es la norma de la convergencia uniforme en $[a, b]$.

1. Probar que las normas $\| \ \|$ y $\| \ \|_*$ son de espacio de Banach sobre E.

2. ¿Son equivalentes las normas $\| \ \|$ y $\| \ \|_*$?

Ejercicio 44 Se consideran en ℓ^1 las normas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_\infty$. ¿Son comparables? La aplicación identidad i de $(\ell^1, \| \ \|_1)$ en $(\ell^1, \| \ \|_\infty)$, ¿es un homeomorfismo?

Ejercicio 45 Sean X e Y dos espacios topológicos compactos homeomorfos. Demostrar que existe una isometría lineal biyectiva de $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ en $\mathscr{C}(Y, \mathbb{K})$.

⇨ **Ejercicio 46** Sean X un conjunto no vacío y $g \in \mathcal{B}(X)$. Se define T_g de $\mathcal{B}(X)$ en $\mathcal{B}(X)$ por $T_g(f) = fg$.

1. Probar que T_g es un operador lineal y continuo y calcular su norma.

2. Si X es un espacio topológico y $g \in \mathcal{B}\mathscr{C}(X)$, probar que $T_g(\mathcal{B}\mathscr{C}(X)) \subseteq \mathcal{B}\mathscr{C}(X)$ y calcular la norma de T_g de $\mathcal{B}\mathscr{C}(X)$ en $\mathcal{B}\mathscr{C}(X)$.

***Nota**: Hay muchas variantes para el operador multiplicación, por ejemplo, cuando X es medible podemos considerar los espacios $L^p(X)$; así, si $g \in L^\infty$ entonces T_g es un operador de $L^p(X)$ en $L^p(X)$; si $g \in L^q$ entonces T_g es un operador de $L^p(X)$ en $L^1(X)$, siendo p y q exponentes conjugados.*

Ejercicio 47 Si $\alpha > 0$ sea C_α el espacio de las funciones $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continuas y tales que

$$\sup \{e^{\alpha t}|f(t)| : t \geq 0\} < \infty.$$

1. Probar que C_α es un espacio vectorial y que la aplicación
$$\|f\|_\alpha = \sup\{e^{\alpha t}|f(t)| : t \geq 0\}, \quad f \in C_\alpha,$$
es una norma sobre C_α.

2. El espacio $(C_\alpha, \|\ \|_\alpha)$, ¿es un espacio de Banach?

3. Si $g \in C_\beta$ se define $T_g\colon C_\alpha \to C_{\alpha+\beta}$ dada por $T_g(f) = g \cdot f$. Demostrar que T_g es lineal y continua. Calcular su norma.

4. Si $\beta > \alpha$ y $f \in C_\alpha$ se define $T_\beta(f)(x) = \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t)\, dt$. Demostrar que $T_\beta \in \mathscr{L}(C_\alpha)$ y calcular su norma.

⇨ **Ejercicio 48** Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n vectores linealmente independientes de un espacio normado E. Probar que existe $M > 0$ tal que cualesquiera que sean los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ se verifica que
$$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\| \geq M \ \text{máx}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

Ejercicio 49 Sean E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n vectores de E.

1. Probar que existe una constante $M > 0$, tal que
$$\|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n\| \leq M \sqrt{\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2},$$
para cada $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

2. Si los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son linealmente independientes, demostrar que existe una constante $L > 0$, tal que para cada $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, se tiene:
$$L\Big(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2\Big)^{1/2} \leq \|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n\|.$$

Ejercicio 50 Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$. Se considera el conjunto E de las sucesiones $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de $\mathbb{K}$, tales que
$$\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n x_n|^2 < \infty.$$

1. Probar que E es un subespacio vectorial del espacio de las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$.

2. Si $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in E$, se define
$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n x_n|^2\right)^{1/2}.$$
Demostrar que la aplicación $x \to \|x\|$ es una norma si, y sólo si, $\alpha_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En lo que sigue se supone que la aplicación anterior es una norma.

3. Probar que el espacio normado $(E, \| \|)$ es de Banach y separable.

4. Si $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada y $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{K})$, probar:

   (i) $\ell^2 \subseteq E$.

   (ii) La inyección canónica $I\colon (\ell^2, \| \|_2) \to (E, \| \|)$ es inyectiva y continua. Determinar su norma.

   (iii) Dar un ejemplo de una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada de elementos de $\mathbb{K}$, de forma que $\ell^2 \neq E$.

   (iv) Demostrar que ℓ^2 es denso en E.

Ejercicio 51 Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$. Se considera el conjunto E de las sucesiones $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{K}$, tales que

$$\sup\{|\alpha_n x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Para cada elemento $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, se define

$$\|x\| = \sup\{|\alpha_n x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

1. Demostrar que la aplicación $x \to \|x\|$ de E en $\mathbb{R}$ es una norma si, y sólo si, $\alpha_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

   En lo que sigue se supone que la aplicación anterior es una norma.

2. Probar que el espacio normado $(E, \| \|)$ es de Banach y no separable.

3. $\ell^\infty(\mathbb{K}) \subseteq E$ si, y sólo si, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty(\mathbb{K})$.

4. Si $\ell^\infty(\mathbb{K}) \subseteq E$, probar que la inyección canónica $I\colon (\ell^\infty(\mathbb{K}), \| \|_\infty) \to (E, \| \|)$, es lineal y continua. Determinar su norma.

5. $\ell^\infty(\mathbb{K}) = E$ si, y sólo si, existen constantes $M > 0$ y $K > 0$, tales que

$$K \leq |\alpha_n| \leq M, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 52 Sean E y F espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, T una aplicación lineal de E en F y A un subconjunto de E. Si E es de dimensión finita y A es acotado, probar que $\overline{T(A)}$ es un subconjunto compacto de F.

Nota: *En otras palabras, todo operador T definido en un espacio de dimensión finita es un operador compacto (véase la definición 7.1.1).*

Ejercicio 53 Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continua. Se considera la aplicación $T\colon \mathscr{C}([0,1], \mathbb{K}) \to \mathscr{C}([0,1], \mathbb{K})$ dada por $T(g) = g \circ f$.

1. Demostrar que T es operador lineal y continuo cuando en $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ se considera la norma del superior. Calcular $\|T\|$.

2. Sea $\mathscr{A}$ un conjunto compacto del espacio $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K}),\|\,\|_\infty)$. Probar que el conjunto $\mathscr{L}=\{g\circ f : g\in \mathscr{A}\}$ es también un compacto del citado espacio.

Ejercicio 54 Sean E un espacio normado y $p\colon E\to\mathbb{R}$ una seminorma, es decir, que verifica:

a) $p(x)\geq 0$ para cada $x\in E$.

b) $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)$ para cada $x\in E$ y para cada $\lambda\in\mathbb{K}$.

c) $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$ para cada par de elementos $x,y\in E$.

Demostrar que:

1. p es continua en E si, y sólo si, p es continua en 0.

2. Si E es de dimensión finita, entonces p es continua en E.

Ejercicio 55 Sea E un espacio normado. Se supone que existe un número real $\alpha>0$ y una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de E tales que

$$\|b_n-b_m\|=\alpha,\quad n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m.$$

1. Probar que el conjunto $\{b_n : n\in\mathbb{N}\}$ es un cerrado de E.

2. ¿Puede ser el espacio E de dimensión finita?

Ejercicio 56 Sea E un espacio normado. Demostrar que los enunciados siguientes son equivalentes:

1. La dimensión de E es finita.

2. La esfera unidad $S=\{x\in E : \|x\|=1\}$ es compacto.

⇨ **Ejercicio 57** Sean $x_0,x_1,\ldots,x_m$ números reales distintos y sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de polinomios de grado menor o igual que m, tal que para cada $j=0,1,\ldots,m$ la sucesión $\{P_n(x_j)\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Demostrar que $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[0,1]$.

Ejercicio 58 Sean $m\in\mathbb{N}$, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que m y $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ integrable tales que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |P_n(t)-f(t)|\,dt=0.$$

Probar que existe un polinomio P tal que $f(t)=P(t)$ casi siempre en $[0,1]$.

Capítulo 3

Espacio dual. Teorema de Hahn-Banach

En este capítulo nos ocupamos de la dualidad entre un espacio normado y el espacio de los funcionales lineales y acotados definidos sobre él.

3.1. El espacio dual.

Definición 3.1.1 Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

- Un *funcional lineal* en E es un operador lineal definido en E con imagen en $\mathbb{K}$. Al espacio de los funcionales lineales en E se le llama el *dual algebraico* de E y se le representa por E^*.
- Si f es un funcional lineal en E, se define el *núcleo* de f como el subespacio $\{x \in E : f(x) = 0\}$ y se representa por $\mathrm{Ker}(f)$.

Recordemos que si $f \neq 0$, entonces $\mathrm{Ker}(f)$ tiene codimensión uno, es decir, existe un elemento $x_0 \in E$ tal que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \langle x_0 \rangle$; o lo que es equivalente, $\mathrm{Ker}(f)$ es un subespacio propio maximal. El recíproco también es cierto: si H es un subespacio propio maximal de E, entonces existe un funcional lineal f en E tal que $H = \mathrm{Ker}(f)$.

Definición 3.1.2 Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Al espacio $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ se le llama *espacio dual* de E o *dual topológico* de E y se le representa por E'. A sus elementos se les llama *funcionales lineales acotados*

En virtud de la proposición 2.1.8, el espacio dual E' dotado de la norma de los operadores,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\} \quad \text{si } f \in E',$$

es siempre un espacio de Banach.

Proposición 3.1.3 Sean E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y f un funcional lineal en E. Entonces f es continuo si, y sólo si, $\mathrm{Ker}(f)$ es cerrado.

Proposición 3.1.4 Sea E un espacio normado y H un hiperplano de E. Entonces H es cerrado o denso.

Observación 3.1.5 Si f es un funcional lineal no idénticamente nulo en E y $\mathrm{Ker}(f)$ es denso en E, entonces f es discontinuo.

Proposición 3.1.6 El dual de $\mathbb{K}^n$ es $\mathbb{K}^n$, es decir, existe un isomorfismo isométrico (una aplicación lineal, biyectiva y que preserva la norma, por lo que tanto ella como su inversa son continuas) entre $\mathbb{K}^n$ y $(\mathbb{K}^n)'$.

Proposición 3.1.7 El dual de c_0 es ℓ^1.

Proposición 3.1.8 El dual de ℓ^1 es ℓ^∞.

Proposición 3.1.9 Sean $p, q \in (1, \infty)$ exponentes conjugados. El dual de ℓ^p es ℓ^q.

Observación 3.1.10 El dual de ℓ^∞ no es ℓ^1 (véase el ejercicio 76).

3.2. El teorema de Hahn-Banach.

El teorema de Hahn-Banach es uno de los resultados más importantes del Análisis Funcional. Tiene dos versiones: la versión geométrica, que no trataremos aquí, aborda el problema de la separación de dos conjuntos convexos disjuntos por un hiperplano cerrado; la versión analítica, que será la que demostraremos, asegura que en un espacio normado es posible extender un operador continuo definido en un subespacio conservando la norma.

Demostraremos primero el teorema para espacios normados reales. Es interesante hacer notar que la versión compleja del teorema fue demostrada unos ocho años después que la versión real.

Comenzaremos recordando el enunciado del lema de Zorn, necesario en la demostración del teorema de Hahn-Banach.

Definición 3.2.1 Sea X un conjunto no vacío dotado de una relación de orden parcial, que denotaremos por $\leq$.

- Se dice que un subconjunto Y de X está *totalmente ordenado* si para todo $x, y \in Y$ se verifica que $x \leq y$ o $y \leq x$.

- Se dice que $m \in X$ es un elemento *maximal* de X si para todo $x \in X$ tal que $x \geq m$ se tiene que $x = m$.
- Se dice que X es *inductivo* si todo subconjunto totalmente ordenado de X admite cota superior.

Lema 3.2.2 (de Zorn) Todo conjunto ordenado, inductivo y no vacío admite un elemento maximal.

Teorema 3.2.3 (Hahn-Banach real) Sean E un espacio vectorial real y $p\colon E \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para cada $x, y \in E$.
2. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para cada $x \in E$ y $\lambda > 0$.

Sean M un subespacio vectorial de E y $f\colon M \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$. Existe $F\colon E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in M$ y $F(x) \leq p(x)$ para cada $x \in E$.

Recordemos la definición de seminorma.

Definición 3.2.4 Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación p de E en $\mathbb{R}$ es una *seminorma* sobre E si verifica las tres propiedades siguientes:

SN1. $p(x) \geq 0$ para cada $x \in E$.

SN2. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ para cada $x \in E$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$.

SN3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para cada $x, y \in E$.

Si p es una seminorma se verifica que $p(0) = 0$, pero puede ocurrir que $p(x) = 0$ para algún vector x no nulo.

Un enunciado del teorema de Hahn-Banach (caso real) en una forma más clásica es el siguiente:

Teorema 3.2.5 (Hahn-Banach) Sean E un espacio vectorial real y p una seminorma en E. Sean M un subespacio vectorial de E y $f\colon M \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in M$. Entonces existe $F\colon E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(x) = F(x)$ si $x \in M$ y $|F(x)| \leq p(x)$ si $x \in E$.

Veamos el teorema anterior cuando el espacio es complejo.

Teorema 3.2.6 (Hahn-Banach complejo) Sean E un espacio vectorial complejo y p una seminorma en E. Sean M un subespacio vectorial de E y $f\colon M \to \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in M$. Entonce existe $F\colon E \to \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que $f(x) = F(x)$ si $x \in M$ y $|F(x)| \leq p(x)$ si $x \in E$.

Teorema 3.2.7 (Bohnenblust-Sobczyk) Sean E un espacio normado, M un subespacio de E y $f \in M'$. Existe $F \in E'$ tal que $f(x) = F(x)$ si $x \in M$ y $\|f\| = \|F\|$.

Proposición 3.2.8 Sean E un espacio normado, M un subespacio de E y $x_0 \in E$ tal que $d = d(x_0, M) > 0$. Entonces existe $f \in E'$ tal que $f(x_0) = d$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Corolario 3.2.9 Sean E un espacio normado y M un subespacio E. Entonces $x_0 \notin \overline{M}$ si, y sólo si, existe $f \in E'$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Proposición 3.2.10 Sean E un espacio normado y $x_0 \in E$ no nulo. Existe $f \in E'$ tal que $f(x_0) = \|x_0\|$ y $\|f\| = 1$.

Proposición 3.2.11 Sea E un espacio normado. Si $x, y \in E$, $x \neq y$, existe $f \in E'$ tal que $f(x) \neq f(y)$ (es decir, E' *separa puntos* de E).

Corolario 3.2.12 Sean E un espacio normado y $x \in E$. Si $f(x) = 0$ para todo $f \in E'$, entonces $x = 0$.

Proposición 3.2.13 Sea E un espacio normado. Para cada $x \in E$ se tiene que

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E',\ \|f\| \leq 1\}.$$

En la demostración de la proposición anterior hemos visto que si E es un espacio normado, para cada $x \in E$ se define el funcional $J_x : E' \to \mathbb{K}$ por

$$J_x(f) = f(x),$$

que verifica que $J_x \in E''$ y $\|J_x\| = \|x\|$. En consecuencia, la aplicación $i : E \hookrightarrow E''$, dada por $i(x) = J_x$, es una isometría lineal, que se llama la *inmersión canónica* de E en E''.

Observemos que a partir de aquí es sencillo demostrar el teorema 1.3.24, pues si consideramos $\widehat{E} = \overline{i(E)}$, éste es un subespacio cerrado del espacio de Banach E'' y, por tanto, $\widehat{E}$ es un espacio de Banach. Además, $i : E \to \widehat{E}$ es una isometría lineal y, obviamente, su imagen $i(E)$ es densa en $\widehat{E} = \overline{i(E)}$.

Definición 3.2.14 Un espacio normado E es *reflexivo* si la inmersión canónica $i : E \hookrightarrow E''$ es sobre (es decir, es una isometría lineal biyectiva).

Proposición 3.2.15 Todo espacio normado reflexivo es un espacio de Banach.

Ejemplo 3.2.16

1. Los espacios de dimensión finita son reflexivos.

2. Los espacios ℓ^p $(1 < p < \infty)$ son reflexivos.

3. Los espacios de Hilbert (que veremos más adelante) son reflexivos.

3.3. Ejercicios.

⇨ **Ejercicio 59** Sea $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{K})$ dotado de la norma del superior. Demostrar que el conjunto

$$\Big\{ f \in E : \int_0^1 f(t)\, dt + f(0) = 0 \Big\}$$

es un hiperplano cerrado de E.

Ejercicio 60 Sean E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $f\colon E \to \mathbb{K}$ lineal. Probar que f no es continua si, y sólo si, para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$ es denso en E.

⇨ **Ejercicio 61** Sean $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados. Si $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \notin \ell^p$, demostrar que el conjunto

$$A = \Big\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^q : \{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0 \Big\}$$

es denso en ℓ^q.

Ejercicio 62 Sean E un espacio normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y T un elemento de E'. ¿Cuántas componentes conexas tiene el conjunto $E \setminus \ker T$?

Ejercicio 63 Sea E el espacio de las sucesiones $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{K}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| < \infty$.

1. Probar que E es un subespacio vectorial de ℓ^1, $E \neq \ell^1$ y E es denso en ℓ^1.

2. Si $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$ se define $\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|$. Probar que la igualdad anterior define una norma sobre E.

3. Determinar una aplicación $T\colon E \to \ell^1$ lineal, biyectiva y que sea una isometría.

4. Probar que $(E, \|\;\|)$ es un espacio de Banach.

5. Identificar el dual topológico de E con un espacio normado de sucesiones.

Ejercicio 64 Sean $E_1, E_2, \dots E_n$ espacios normados sobre el mismo cuerpo. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $T \in (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n)'$.

2. Existen $T_k \in E_k'$, $k = 1, 2, \dots, n$, tales

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} T_k(x_k) \quad \text{si } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n.$$

⇨ **Ejercicio 65** Sea $E = \mathscr{C}^n([a,b],\mathbb{C})$ dotado de la norma $\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty$. Si $T \in E'$, probar que existen $T_0, T_1, \ldots, T_n \in (\mathscr{C}[a,b], \|\;\|_\infty)'$ tales que

$$T(f) = \sum_{k=0}^{n} T_k(f^{(k)}) \quad \text{para cada } f \in E.$$

Ejercicio 66 Sean $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos distintos de $\mathbb{R}$ y sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Dar una condición necesaria y suficiente sobre la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ para que la aplicación $A\colon \mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ dada por $A(f) = \sum_{n=1}^\infty a_n f(x_n)$ sea un elemento del dual topológico de $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{K})$ con la norma del superior.

Nota: *En este ejercicio se puede sustituir $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{K})$ por $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{K})$ o $\mathscr{BC}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ o $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{K})$.*

Ejercicio 67 Sean F es un subespacio vectorial cerrado de un espacio normado E y a un elemento de E tal que $a \notin F$.

1. Demostrar que existe $M > 0$ tal que $|\lambda| \leq M\|\lambda a + x\|$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in F$.

2. Deducir que el espacio vectorial $F \oplus \langle a \rangle$ es cerrado en E.

3. Demostrar que existe $K > 0$ tal que $\|x\| \leq K\|\lambda a + x\|$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in F$.

Ejercicio 68 Demostrar que todo subespacio cerrado propio de un espacio normado E se puede escribir como una intersección de hiperplanos cerrados.

⇨ **Ejercicio 69** Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n vectores linealmente independientes de un espacio normado E.

1. Demostrar que existen n elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ del dual topológico de E, tales que
$$f_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

2. Sea $F = \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker}(f_k)$. Probar que F es un subespacio cerrado de E tal que
$$y - f_1(y)x_1 - f_2(y)x_2 - \ldots - f_n(y)x_n \in F \quad \text{para cada } y \in E.$$

3. Si M es un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio normado E, deducir que existe un subespacio vectorial cerrado F de E tal que $E = M \oplus F$.

Ejercicio 70 Sea E un espacio normado de dimensión infinita y separable. Demostrar que existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de E', con $\|f_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y tal que para cada $x \in E$, la sucesión de escalares $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0.

⇨ **Ejercicio 71** Sean E un espacio normado, F un subespacio vectorial de E y $T\colon F \to \ell^\infty$ lineal y continua. Demostrar que existe $S\colon E \to \ell^\infty$ lineal y continua tal que $\|T\| = \|S\|$ y $T(x) = S(x)$ para cada $x \in F$.

Ejercicio 72 Sea $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{R})$. Demostrar que existe un operador lineal $T\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ tal que para cada sucesión $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ se verifica que $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq T(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

⇨ **Ejercicio 73** Sean E y F espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ con $E \neq \{0\}$. Probar que si el espacio $\mathscr{L}(E,F)$ es de Banach, entonces F es de Banach.

Ejercicio 74 Sea E un espacio normado y A un subconjunto denso de la bola cerrada unidad de E'. Probar que para cada $x \in E$ se verifica que

$$\|x\| = \sup\{|\phi(x)| : \phi \in A\}.$$

Ejercicio 75 Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ elementos de un espacio normado E. Se supone que para cada $\varphi \in E'$ se verifica que

$$|\varphi(x_0)| \leq \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|.$$

Demostrar que x_0 pertenece al subespacio generado por los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

⇨ **Ejercicio 76** Sea E un espacio normado. Demostrar que si el espacio dual E' es separable, entonces E es separable.

***Nota**: Si $(\ell^\infty)'$ fuera isomorfo a ℓ^1, como ℓ^1 es separable lo sería $(\ell^\infty)'$, y también ℓ^∞ según el problema anterior, lo que no ocurre. Por lo tanto, $(\ell^\infty)' \not\simeq \ell^1$.*

⇨ **Ejercicio 77**

1. Si $1 < p < \infty$, el espacio ℓ^p es reflexivo.
2. Demostrar que ℓ^1 no es reflexivo.
3. Demostrar que c_0 con la norma del superior no es reflexivo.

Capítulo 4

Tres teoremas fundamentales en los espacios de Banach.

Este tema pertenece al núcleo del Análisis Funcional. Junto con el teorema de Hahn-Banach, los teoremas de Banach-Steinhaus, del grafo cerrado y de la aplicación abierta forman lo que en algunos textos llaman los cuatro pilares de esta materia.

4.1. Los teoremas de Baire.

"La forma en que frecuentemente se aprovecha el hecho de que un espacio de Banach es completo, depende del siguiente teorema sobre espacios métricos completos, que también tiene muchas aplicaciones en otras partes de las matemáticas" (ver Rudin [16]). Los tres teoremas que hemos citado en la introducción se obtienen a partir del teorema de Baire.

Teorema 4.1.1 (de Baire) Sea X un espacio métrico completo. Si $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de abiertos densos, entonces $G = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso.

Como ejemplo de aplicación del teorema de Baire puede verse la demostración de la existencia de un conjunto G_δ denso en $\mathscr{C}([0,1])$ formado por funciones que no son derivables en ningún punto ([3, p.100]).

El teorema de Baire se denomina a veces el *teorema de categoría*.

Definición 4.1.2 Sean E un espacio topológico y A un subconjunto de E.

- Se dice que A es *raro* o *nunca denso* si su adherencia $\overline{A}$ tiene interior vacío.

- Se dice que A es *de primera categoría* si es unión numerable de conjuntos raros.
- Se dice que A es *de segunda categoría* si no es de primera categoría.

El teorema de Baire, tomando complementarios, se enuncia así:

Teorema 4.1.3 (de Baire) Ningún espacio métrico completo es de primera categoría.

Corolario 4.1.4 Sea X un espacio métrico completo. Si $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cerrados tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$.

Definición 4.1.5 En un espacio topológico se dice que un conjunto es un G_δ si es la intersección de una familia numerable de abiertos y se dice que es un F_σ si es la unión de una familia numerable de cerrados.

Teorema 4.1.6 (de Banach-Steinhaus) Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado. Si $\{T_i\}_{i\in I}$ es una familia de aplicaciones lineales continuas de E en F, se verifica una de las dos alternativas siguientes:

1. Existe $M > 0$ tal que $\|T_i\| \leq M$ para cada $i \in I$.
2. Existe un conjunto G, intersección numerable de abiertos y denso en E, tal que la *órbita* $\{T_i(x)\}_{i\in I}$ de cada punto x de G por la familia $\{T_i\}_{i\in I}$ es no acotada, es decir,
$$\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} = \infty \quad \text{para cada } x \in G.$$

Corolario 4.1.7 Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado. Sea $\mathscr{A}$ un conjunto de operadores lineales y continuos de E en F tal que para cada $x \in E$ la órbita $\mathscr{A}(x) = \{T(x) : T \in \mathscr{A}\}$ es acotada en F. Entonces $\mathscr{A}$ es un conjunto acotado de $\mathscr{L}(E, F)$.

Corolario 4.1.8 Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado. Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de aplicaciones lineales continuas de E en F tal que para cada $x \in E$ existe $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Entonces $T \in \mathscr{L}(E, F)$ y $\|T\| \leq \sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Observación 4.1.9 Al teorema de Banach-Steinhaus también se le conoce como el teorema de la acotación uniforme.

Definición 4.1.10 Sean E un espacio normado y A un subconjunto de E. Se dice que A es *débilmente acotado* si $f(A)$ es acotado de $\mathbb{K}$ para cada $f \in E'$.

Proposición 4.1.11 Sean E un espacio normado y A un subconjunto de E. Entonces A es acotado si, y sólo si, A es débilmente acotado.

4.2. Teorema de la aplicación abierta.

Definición 4.2.1 Sean X e Y dos espacios topológicos. Se dice que una aplicación f de X es Y es *abierta* si $f(U)$ es abierto en Y para cada abierto U de X (es decir, si la imagen de cada abierto en X es un conjunto abierto en Y).

Lema 4.2.2 Sean E y F espacios normados y $T\colon E \to F$ lineal. Entonces T es abierta si, y sólo si, $T(B(0,1))$ es entorno de 0 en F.

Lema 4.2.3 Sean E un espacio de Banach y C un subconjunto de E cerrado, convexo, simétrico ($C = -C$) y tal que $E = \cup_{n=1}^{\infty} nC$. Entonces C es un entorno del origen.

Teorema 4.2.4 (de la aplicación abierta) Sean E y F espacios de Banach. Si $T\colon E \to F$ es una aplicación lineal, continua y suprayectiva, entonces T es abierta.

Corolario 4.2.5 (Teorema del isomorfismo) Sean E y F espacios de Banach. Si $T\colon E \to F$ es una aplicación lineal, biyectiva y continua, entonces T es un isomorfismo topológico.

Corolario 4.2.6 Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $\| \|_1$ y $\| \|_2$ dos normas sobre E tales que $(E, \| \|_1)$ y $(E, \| \|_2)$ son espacios de Banach. Si una es más fina que la otra, ambas son equivalentes.

Recordemos que si E y F son dos espacios de Banach, el espacio producto $E \times F$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

(o cualquier otra equivalente), siendo la convergencia en $E \times F$ la convergencia coordenada a coordenada.

Si T es un operador de E en F, el *grafo* de T es el conjunto

$$G(T) = \{(x, T(x)) : x \in E\}.$$

Es sencillo comprobar que si T es un operador continuo, entonces $G(T)$ es un conjunto cerrado en $E \times F$.

Teorema 4.2.7 (de la gráfica cerrada) Sean E y F espacios de Banach y T una aplicación lineal de E en F. Entonces T es continua si, y sólo si, su grafo $G(T)$ es un conjunto cerrado en $E \times F$.

4.3. Ejercicios.

⇨ **Ejercicio 78 (Teorema de Osgood)** Sean X un espacio métrico completo y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones continuas de X en $\mathbb{C}$. Supongamos que para cada $x \in X$ la familia $\{f_i(x)\}_{i\in I}$ es acotada. Probar que existe un abierto no vacío A de X y $M > 0$ tal que $|f_i(x)| \le M$ para cada $x \in A$ y cada $i \in I$.

⇨ **Ejercicio 79** Sea E un espacio normado de dimensión infinita numerable. Demostrar que E es un conjunto de primera categoría (en E).

Nota: *De este resultado se deduce que si E es un espacio de Banach, por el teorema de Baire, o bien E tiene dimensión finita, o bien tiene dimensión infinita no numerable. En particular, no es posible dar en c_{00} o en el espacio de los polinomios una norma que los dote de estructura de espacio de Banach.*

Ejercicio 80 Dar un ejemplo de un subespacio vectorial A de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ que verifique las siguientes propiedades:

1. A es un conjunto de primera categoría en $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\| \, \|_\infty)$.
2. A es un conjunto denso en $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\| \, \|_\infty)$.

Ejercicio 81

1. Demostrar que $L^2([0,1],\mathbb{K}) \subseteq L^1([0,1],\mathbb{K})$.
2. Para $r > 0$, sea $B_r = \overline{B}(0,r)$ en $L^2([0,1],\mathbb{K})$. Probar que B_r es cerrado en $L^1([0,1],\mathbb{K})$ y deducir que $L^2([0,1],\mathbb{K})$ es un conjunto de primera categoría en $L^1([0,1],\mathbb{K})$.

Ejercicio 82 Demostrar que la bola cerrada unidad $\overline{B}_{\ell^2}(0,1)$ de $(\ell^2, \| \, \|_2)$ es un conjunto raro en el espacio $(c_0, \| \, \|_\infty)$.

Ejercicio 83 Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones lineales y continuas de E en F. Se supone que existe un abierto no vacío V de E, tal que para cada $x \in V$ se verifica que

$$\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} < \infty.$$

Demostrar que existe $M > 0$ tal que para cada $i \in I$ se tiene $\|T_i\| \leq M$.

Ejercicio 84 Construir una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de c'_{00} puntualmente acotada pero no acotada.

Ejercicio 85 Sea E un espacio normado y sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de E. Se supone que para cada $\varphi \in E'$, la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \varphi(x_n)$$

es absolutamente convergente. Demostrar que el conjunto

$$\{ \sum_{i\in F} x_i : F \subseteq \mathbb{N},\ F \text{ finito y no vacío } \}$$

es un acotado de E.

Ejercicio 86 Sea E un espacio normado. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de E se dice que *converge débilmente* hacia un elemento x de E si para cada elemento $\phi \in E'$, la sucesión $\{\phi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $\phi(x)$.

Sea M un subespacio vectorial de E', denso en E'. Probar que son equivalentes:

1. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente hacia x.

2. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y la sucesión $\{\phi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $\phi(x)$ para cada $\phi \in M$.

Ejercicio 87 Sea E un espacio normado. Para cada $\alpha \in (0,1]$ se denota por $\mathrm{Lip}(\alpha, E)$ al espacio vectorial de las funciones $f\colon [a,b] \to E$ tales que $\|f(s) - f(t)\| \leq M|s-t|^{\alpha}$ para todos $s,t \in [a,b]$ y alguna constante $M > 0$. Sea $g\colon [a,b] \to E$. Probar que $g \in \mathrm{Lip}(\alpha, E)$ si, y sólo si, para cada $\Phi \in E'$ se verifica que $\Phi \circ g \in \mathrm{Lip}(\alpha, \mathbb{K})$.

***Nota**: Véase el ejercicio 20.*

⇨ **Ejercicio 88** Sea $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge para cada $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Demostrar que $y \in \ell^1$.

⇨ **Ejercicio 89** Sean $1 < p, q < \infty$ números reales conjugados. Sea $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge para cada $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$. Demostrar que $y \in \ell^q$.

⇨ **Ejercicio 90** Dado un espacio vectorial E sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $B : E \times E \to \mathbb{K}$ se dice que es una *forma bilineal* si

$$B(x + \lambda y, z) = B(x,z) + \lambda B(x,z) \quad \text{y} \quad B(x, y + \lambda z) = B(x,y) + \lambda B(x,z)$$

para cada $x, y, z \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Sean E un espacio de Banach y B una forma bilineal en $E \times E$. Supongamos que:

(a) Para cada $x \in E$ existe $\mu(x) > 0$ tal que $|B(x,y)| \leq \mu(x)\|y\|$ para cada $y \in E$.

(b) Para cada $y \in E$ existe $\nu(y) > 0$ tal que $|B(x,y)| \leq \nu(y)\|x\|$ para cada $x \in E$.

Demostrar que existe $M > 0$ tal que $|B(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|$ para cada $x, y \in E$.

Ejercicio 91 Se designa por E el subespacio de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ formado por las funciones polinómicas en $[0,1]$ con coeficientes reales. Se dota a E de la norma de $L^1([0,1], \mathbb{R})$. Probar que la aplicación $B\colon E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $B(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$ es bilineal, separadamente continua y no continua.

Nota: *Este ejercicio nos proporciona un contraejemplo para el ejercicio anterior si se prescinde de la hipótesis de que E es un espacio de Banach.*

⇨ **Ejercicio 92** Sea X un espacio topológico compacto. Para cada $x \in X$ se designa por T_x la aplicación de $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ definida por

$$T_x(f) = f(x).$$

Sean $A \subseteq X$, denso en X, y $\| \ \|$ una norma en el espacio $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$. Se supone que:

(a) El espacio normado $(\mathscr{C}(X, \mathbb{K}), \| \ \|)$ es un espacio de Banach.

(b) Para cada $x \in A$, la aplicación T_x es continua cuando en $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ se considera la norma $\| \ \|$.

Probar que la norma $\| \ \|$ es equivalente a la norma del superior en $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$.

Ejercicio 93 Para cada número natural m se considera la aplicación lineal $\pi_m \colon \ell^1 \to \mathbb{K}$, definida por

$$\pi_m(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = x_m.$$

Sea $\| \ \|$ una norma en ℓ^1 tal que $(\ell^1, \| \ \|)$ es un espacio de Banach. Demostrar que las proposiciones siguientes son equivalentes:

1. Para cada número natural m la aplicación π_m es continua para la norma $\| \ \|$.

2. La norma $\| \ \|$ es equivalente a la norma $\| \ \|_1$.

Ejercicio 94 Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se considera una forma lineal $f \colon E \to \mathbb{K}$.

1. Probar que la aplicación $p \colon E \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = \|x\| + |f(x)|$ es una norma en E.

2. Demostrar que el espacio (E, p) es de Banach si, y sólo si, f es continua en $(E, \| \ \|)$.

Ejercicio 95 Sea φ una forma lineal sobre ℓ^1. Si $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$, establecer que la igualdad

$$\|a\| = |\varphi(a)| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

es una norma en ℓ^1. Probar que los enunciados siguientes son equivalentes:

1. $(\ell^1, \| \ \|)$ es un espacio de Banach.

2. Existe una sucesión acotada $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que

   $$\varphi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

   para cada $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$.

⇨ **Ejercicio 96** Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales, definidas y continuas en $[a,b]$ que converge uniformemente hacia la función g_0 en $[a,b]$. Sean $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales que convergen hacia α_0 y β_0 respectivamente. Sean $p, q \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ y $x_0 \in [a,b]$. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ se considera el problema de Cauchy

$$(P_n) = \begin{cases} f'' + pf' + qf = g_n \\ f(x_0) = \alpha_n \\ f'(x_0) = \beta_n \end{cases}$$

Sea f_n la única solución de (P_n) para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n''\}_{n=1}^{\infty}$ convergen uniformemente en $[a,b]$ hacia f_0, f_0' y f_0'' respectivamente.

⇨ **Ejercicio 97** Sea $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ provisto de la norma de la convergencia uniforme y sea F el subespacio de E de las funciones de clase $\mathscr{C}^1$ en $[a,b]$.

1. Probar que el subespacio F no es cerrado en E.

2. Demostrar que la aplicación $T\colon F \to E$ dada por $T(f) = f'$ es lineal, no es continua pero su grafo es cerrado.

Ejercicio 98 Sean A un subespacio vectorial cerrado del espacio $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ dotado de la norma del superior y φ una función de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Se supone que para cada $f \in A$ se tiene que $f\varphi \in A$. Demostrar que la aplicación $T\colon A \to A$ dada por $T(f) = f\varphi$ es continua.

Ejercicio 99 Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y f una aplicación de $[0,1]$ en E. Se supone que para cada $\phi \in E'$ se tiene que $\phi \circ f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$. Probar que la aplicación $T\colon E' \to \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ definida por $T(\phi) = \phi \circ f$ es continua.

⇨ **Ejercicio 100** Sean E y F espacios de Banach sobre el mismo cuerpo. Sea $T\colon E \to F$ lineal tal que $\phi \circ T \in E'$ para cada $\phi \in F'$. Probar que T es continua.

Ejercicio 101 Sean E, F y G espacios de Banach sobre el mismo cuerpo. Sean T una aplicación lineal de E en F y $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones lineales y continuas de F en G. Se supone que

(a) $\cap_{i\in I} \operatorname{Ker}(S_i) = \{0\}$.

(b) $S_i \circ T$ es continua para cada $i \in I$.

Probar que T es continua.

⇨ **Ejercicio 102** Sean E y F espacios de Banach sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y T una aplicación lineal y continua de E en F. Probar que existe una constante $c > 0$ tal que $c\|x\| \leq \|T(x)\|$ para cada $x \in E$ si, y sólo si, T es inyectiva y $T(E)$ es cerrado en F.

Ejercicio 103 Sean E un espacio normado y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E. Se supone que para cada elemento $f \in E'$, la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$$

es absolutamente convergente. Demostrar que existe $M > 0$, tal que para cada elemento $f \in E'$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leq M\|f\|.$$

Ejercicio 104 Sea E el espacio de las funciones definidas en $[0, \infty)$ y valoradas en $\mathbb{K}$, continuas y acotadas en $[0, \infty)$ provisto de la norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)| : t \geq 0\}.$$

1. Probar que el espacio normado definido anteriormente es de Banach.

2. Sea el conjunto $F = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{K} : f \text{ continua y } \sup\{(1+t)|f(t)| : t \geq 0\} < \infty\}$. Probar que F es un subespacio vectorial de E.

   En lo que sigue se considera en F la norma $\| \ \|_{\infty}$.

3. Si $f \in F$, se define la función f^* en $[0, \infty)$ por $f^*(t) = tf(t)$. Probar que para cada $f \in F$, se verifica que $f^* \in E$.

4. Si T designa la aplicación de F en E, definida por $T(f) = f^*$, probar que T es lineal y no continua.

5. Demostrar que el grafo de T es cerrado en $F \times E$.

6. ¿El espacio F es de Banach?

⇨ **Ejercicio 105** Demostrar que no existe ninguna aplicación $T : \ell^1 \to \ell^{\infty}$ lineal, biyectiva y continua.

Capítulo 5

El espacio de las funciones continuas.

En este capítulo pretendemos presentar dos resultados fundamentales en los espacios de funciones continuas: el teorema de Ascoli, que aborda el problema de la compacidad, y el teorema de Stone-Weierstrass, que se ocupa de la densidad.

5.1. Conjuntos precompactos.

Necesitamos algunos resultados que complementen los conocimientos del alumno sobre conjuntos compactos en espacios métricos. A eso dedicaremos esta sección.

Definición 5.1.1 Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de E es *relativamente compacto* si su adherencia $\overline{A}$ es un conjunto compacto.

Proposición 5.1.2 Sean (E, d) un espacio métrico y A un subconjunto de E. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. A es relativamente compacto.
2. Todo subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación (no necesariamente en A).
3. Toda sucesión de elementos de A tiene una subsucesión convergente (no necesariamente en A).

Definición 5.1.3 Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de E es *precompacto* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existen un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n$ de A tales que $A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon)$.

Proposición 5.1.4 Sean (E, d) un espacio métrico y A un subconjunto de E.

1. Si A es compacto, entonces A es precompacto.

2. Si A es precompacto, entonces A es acotado (los conjuntos precompactos se llaman también conjuntos *totalmente acotados*).

3. Si A es precompacto y $B \subseteq A$, entonces B es precompacto.

4. Si A es precompacto, entonces $\overline{A}$ es precompacto.

Proposición 5.1.5 Sean (E, d) un espacio métrico y A un subconjunto de E. Entonces A es precompacto si, y sólo si, toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A tiene una subsucesión de Cauchy.

Corolario 5.1.6 Sean E un espacio métrico y $A \subseteq E$. Son equivalentes:

1. A es compacto.

2. A es precompacto y completo.

Proposición 5.1.7 Sean (E, d) un espacio métrico y A un subconjunto de E.

1. Si A es relativamente compacto, entonces A es precompacto.

2. Si (E, d) es completo, entonces A es relativamente compacto si, y sólo si, A es precompacto.

5.2. El teorema de Ascoli.

Es importante saber reconocer cuándo una familia de funciones es un conjunto relativamente compacto. El teorema de Ascoli proporciona un importante criterio en el espacio de las funciones continuas definidas en un espacio topológico compacto.

Definición 5.2.1 Sean X un conjunto no vacío e (Y, d) un espacio métrico. Se denota por $\mathscr{B}(X, Y)$ el espacio de las funciones acotadas de X en Y. Si $f, g \in \mathscr{B}(X, Y)$, se define

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Llamaremos a $d_\infty(f, g)$ la *distancia del supremo* entre f y g. Si $Y = \mathbb{K}$ escribiremos $\mathscr{B}(X, \mathbb{K}) = \mathscr{B}(X)$.

Si X es un espacio topológico, se define $\mathscr{BC}(X, Y)$ como el conjunto de las funciones $f : X \to Y$ continuas y acotadas. Obviamente, $\mathscr{BC}(X, Y) \subseteq \mathscr{B}(X, Y)$ y si X es compacto, entonces $\mathscr{BC}(X, Y) = \mathscr{C}(X, Y)$.

Proposición 5.2.2 Sean X un conjunto no vacío e (Y, d) un espacio métrico. La aplicación $d_\infty : \mathscr{B}(X,Y) \times \mathscr{B}(X,Y) \to \mathbb{R}$ es una distancia en $\mathscr{B}(X,Y)$.

Proposición 5.2.3 Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico.

1. $\mathscr{B}(X,Y)$ es completo si, y sólo si, Y es completo.

2. Si X es compacto e Y un espacio métrico completo, entonces el conjunto $\mathscr{C}(X,Y)$ de las funciones continuas de X en Y es un subconjunto cerrado de $\mathscr{B}(X,Y)$ y, por tanto, es un espacio métrico completo.

La definición y las dos proposiciones anteriores generalizan la definición 1.2.15 y las proposiciones 1.2.16 y 1.3.13. Las demostraciones son similares, con las obvias modificaciones. Aunque demostraremos el teorema de Ascoli en este contexto, lo cierto es que en los ejemplos que vamos a manejar el conjunto Y será siempre un espacio normado.

Definición 5.2.4 Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Un conjunto $\mathscr{A}$ de funciones de X en Y se dice que es *equicontinuo* en un punto $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $V \in \mathscr{E}(x_0)$ tal que

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in V \text{ y para toda } f \in \mathscr{A}.$$

Se dice que el conjunto $\mathscr{A}$ es *equicontinuo* si lo es en cada punto de X.

Observemos que si (X, ρ) e (Y, d) son espacios métricos, un conjunto $\mathscr{A}$ de funciones de X en Y se dice que es *equicontinuo* en un punto $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la condición $\rho(x, x_0) < \delta$ implica que $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ para toda $f \in \mathscr{A}$.

Proposición 5.2.5 Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Si un conjunto $\mathscr{A}$ de funciones de X en Y es equicontinuo en un punto x_0, todas las funciones de $\mathscr{A}$ son continuas en dicho punto.

Teorema 5.2.6 (de Ascoli) Sean X un espacio topológico compacto e (Y, d) un espacio métrico completo. Si $\mathscr{A}$ es un subconjunto de $\mathscr{C}(X,Y)$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $\mathscr{A}$ es relativamente compacto en $\mathscr{C}(X,Y)$.

2. $\mathscr{A}$ es equicontinuo y para cada $x \in X$ el conjunto $\mathscr{A}(x) = \{f(x) : f \in \mathscr{A}\}$ es relativamente compacto en Y.

Corolario 5.2.7 Sea X un espacio topológico compacto y $\mathscr{A}$ un subconjunto de $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$. Entonces $\mathscr{A}$ es relativamente compacto si, y sólo si, $\mathscr{A}$ es equicontinuo y acotado (para la norma $\| \, \|_\infty$).

Corolario 5.2.8 (Teorema de Ascoli-Arzelá) Sea X un espacio topológico compacto y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ equicontinua y uniformemente acotada. Entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en X.

5.3. Teorema de Stone.

El clásico teorema de Weierstrass (1885) afirma que toda función real y continua en un intervalo compacto puede aproximarse uniformemente por una sucesión de polinomios. El teorema que aquí se expone es una generalización de este resultado debida a M. Stone. La demostración que vamos a desarrollar aquí puede encontrarse en [1, p.33] o, con pequeñas variaciones, en [13, p.87].

Definición 5.3.1 Sean X un conjunto no vacío y $\mathscr{A}$ un conjunto de funciones de X en $\mathbb{K}$.

- Se dice que $\mathscr{A}$ es un álgebra de funciones si $\mathscr{A}$ es un espacio vectorial tal que $f \cdot g \in \mathscr{A}$ para cada $f, g \in \mathscr{A}$.
- Se dice que $\mathscr{A}$ separa puntos de X si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

En la demostración del teorema de Stone se utilizará el teorema de Dini, resultado clásico dentro del estudio de la convergencia uniforme de sucesiones funcionales reales.

Teorema 5.3.2 (de Dini) Sea X un espacio topológico compacto. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ tal que:

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona en X, es decir, bien $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es no decreciente para todo $x \in X$, bien $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es no creciente para todo $x \in X$, y
2. converge puntualmente hacia una función $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$.

Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f uniformemente en X.

Teorema 5.3.3 (de Stone-Weierstrass) Sean X un espacio topológico compacto y $\mathscr{A}$ una subálgebra de $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ tal que:

1. $1 \in \mathscr{A}$, es decir, $\mathscr{A}$ contiene a todas las funciones constantes.
2. $\mathscr{A}$ separa puntos de X.
3. Si $f \in \mathscr{A}$, entonces $\bar{f} \in \mathscr{A}$ (obsérvese que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esta condición es superflua).

Entonces $\mathscr{A}$ es densa en $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ con la topología de la convergencia uniforme.

Teorema 5.3.4 (de Weierstrass) Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Si $f \colon X \to \mathbb{K}$ es una función continua, existe una sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de polinomios de n variables con coeficientes en $\mathbb{K}$ que converge hacia f uniformemente en X.

Proposición 5.3.5 El conjunto de los *polinomios trigonométricos*, funciones de la forma $\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ con coeficientes a_k complejos, es denso en $\mathscr{C}_p([0,2\pi],\mathbb{C})$, el espacio de las funciones complejas, continuas en $\mathbb{R}$ y 2π-periódicas.

Corolario 5.3.6 El conjunto de los polinomios trigonométrios $\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ es denso en $L^p([0,2\pi],\mathbb{C})$ para $p \in [1,\infty)$.

5.4. Ejercicios

Ejercicio 106 Sean A y B dos subconjuntos de un espacio normado.

1. Si A es relativamente compacto, entonces $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.
2. Si A y B son relativamente compactos, probar que $A+B$ es relativamente compacto.

Ejercicio 107 Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y sea T una isometría lineal de E en F. Si A es un subconjunto de E tal que $T(A)$ es relativamente compacto en F, pruébese que A es relativamente compacto en E.

⇨ **Ejercicio 108** Sea X un espacio métrico. Una familia no vacía $\mathscr{F}$ de funciones de X en $\mathbb{K}$ se dice que es *uniformemente equicontinua* en X si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para cada $f \in \mathscr{F}$ y para cada par de elementos $x, y \in X$ con $d(x,y) < \delta$.

1. Sean X un espacio métrico compacto y $\mathscr{F}$ una familia no vacía de funciones de X en $\mathbb{R}$. Demostrar que $\mathscr{F}$ es uniformemente equicontinua en X si, y sólo si, $\mathscr{F}$ es equicontinua en X.
2. Dar un ejemplo de una familia $\mathscr{F}$ de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que sea equicontinua en $\mathbb{R}$ pero que no sea uniformemente equicontinua en $\mathbb{R}$.

⇨ **Ejercicio 109** Sean E y F dos espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $\mathscr{A}$ una familia de aplicaciones lineales de E en F. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\mathscr{A}$ es uniformemente equicontinua en E.
2. $\mathscr{A}$ es equicontinua en E.
3. $\mathscr{A}$ es equicontinua en 0.
4. $\mathscr{A}$ es un conjunto acotado en $\mathscr{L}(E,F)$.

Ejercicio 110 Sean E y F espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión equicontinua de aplicaciones lineales de E en F. Se considera el conjunto

$$H = \{x \in E : \{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ es de Cauchy}\}.$$

Demostrar que H es un subespacio vectorial cerrado de E.

⇨ **Ejercicio 111** Sea $M > 0$. Demostrar que el conjunto $\mathscr{A} = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : |f'(x)| \leq M, \ x \in \mathbb{R}\}$ es equicontinuo.

Ejercicio 112 Sea E el espacio de las funciones reales definidas y de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0, 1]$. Se dota a E de la norma $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Probar que $\mathscr{A} \subseteq E$ es relativamente compacto en $(E, \| \ \|)$ si, y sólo si, $\mathscr{A}$ es acotado en $(E, \| \ \|)$ y el conjunto $\{f' : f \in \mathscr{A}\}$ es equicontinuo.

⇨ **Ejercicio 113** Sea $\mathscr{G} = \{g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) : g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ f \in B\}$ donde $B = \overline{B}(0, 1)$ en $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. Demostrar que $\mathscr{G}$ es relativamente compacto en $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.

⇨ **Ejercicio 114** Sea $K\colon [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{K}$ una función continua. Sea $T\colon (\mathscr{C}[a, b], \mathbb{K}) \to (\mathscr{C}[a, b], \mathbb{K})$ el operador dado por

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, t) f(t)\,dt.$$

1. Demostrar que T es lineal y continuo.
2. Demostrar que $T(\overline{B}(0, 1))$ es relativamente compacto de $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Ejercicio 115 Sean $[a, b]$ un intervalo compacto de la recta y K una aplicación continua de $[a, b] \times [a, b]$ en $\mathbb{C}$. Para cada $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ se define la función f^* en $[a, b]$ por:

$$f^*(x) = \int_a^b K(x, t) f(t)\,dt.$$

1. Si $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, probar que f^* es continua en $[a, b]$.
2. Probar que el conjunto $\{f^* : f \in L^2([a, b], \mathbb{C}), \ \|f\|_2 \leq 1\}$, es relativamente compacto en $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{C})$ provisto de la norma del superior.
3. Probar que el conjunto $\{f^* : f \in L^2([a, b], \mathbb{C}), \ \|f\|_2 \leq 1\}$, es relativamente compacto en $L^2([a, b], \mathbb{C})$.
4. Se define la aplicación $T\colon L^2([a, b], \mathbb{C}) \to L^2([a, b], \mathbb{C})$, por $T(f) = f^*$. Demostrar que T es lineal y continua.

Ejercicio 116 Para cada $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ se define la función $f^*\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ por:

$$f^*(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x - t) f(t)\,dt.$$

1. Si $f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, probar que f^* es continua en $[-\pi,\pi]$.

2. Probar que el conjunto $\{f^* \colon f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}),\ \|f\|_2 \leq 1\}$ es relativamente compacto en $\mathscr{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ provisto de la norma del supremo.

3. Se define la aplicación $T \colon L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, por $T(f) = f^*$. Probar que T es lineal y continua.

Ejercicio 117 Sea F una función continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Para cada $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, se considera la función f^* definida en [0,1] por

$$f^*(x) = \int_0^x F(t, f(t))\, dt.$$

Demostrar que f^* es continua en $[0,1]$. Se considera el conjunto

$$\mathscr{A} = \{f^* : f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Probar que $\mathscr{A}$ es un conjunto relativamente compacto en $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ provisto de la norma del superior.

Ejercicio 118 Sea E el conjunto de las funciones continuas $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ tales que los límites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existen y son finitos.

1. Demostrar que E es un subespacio de $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

2. Demostrar que E es cerrado en $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ dotado de la norma del superior.

3. Determinar los conjuntos relativamente compactos del espacio $(E, \|\ \|_\infty)$.

Ejercicio 119 Sean X un espacio topológico y $\mathscr{A}$ un subconjunto no vacío de $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ y equicontinuo en cada punto de X. Para cada $x \in X$ se considera el conjunto $\mathscr{A}_x = \{f(x) : f \in \mathscr{A}\}$.

1. Demostrar que $L = \{x \in X : \mathscr{A}_x \text{ es un acotado de } \mathbb{K}\}$ es un conjunto abierto y cerrado en X.

2. Si X es conexo y compacto y L es no vacío, probar que $\mathscr{A}$ es un conjunto relativamente compacto en $(\mathscr{C}(X,\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$.

Ejercicio 120 Sea $\mathscr{A}$ un subconjunto no vacío de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{K})$. Se supone que:

1. El conjunto $\{f' : f \in \mathscr{A}\}$ es un acotado del espacio normado $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$.

2. Existe $a \in [0,1]$ tal que el conjunto $\{f(a) : f \in \mathscr{A}\}$ es un acotado de $\mathbb{K}$.

Demostrar que $\mathscr{A}$ es un conjunto relativamente compacto en $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$.

⇨ **Ejercicio 121** Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua y tal que existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y es finito. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existen P y Q, polinomios con coeficientes reales tales que grad $P \leq$ grad Q y $Q(x) \neq 0$ para $x \geq 0$, de modo que $|f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}| < \varepsilon$ para cada $x \geq 0$.

⇨ **Ejercicio 122** Demostrar que $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ es separable.

⇨ **Ejercicio 123** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \quad n = 0,1,2,\ldots$. Demostrar que $f = 0$.

⇨ **Ejercicio 124** Sea X un espacio métrico compacto y $\mathscr{A}$ una subálgebra de $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ tal que $1 \in \mathscr{A}$ y tal que $\bar{f} \in \mathscr{A}$ si $f \in \mathscr{A}$. Demostrar que $\mathscr{A}$ es denso en $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ si, y sólo si, $\mathscr{A}$ separa puntos de X.

⇨ **Ejercicio 125** Sea X un espacio topológico compacto. Se supone que existe una aplicación continua e inyectiva $f\colon X \to \mathbb{R}$.

1. Para cada $n = 0,1,2,\ldots$ se define $g_n(x) = f^n(x)$, $x \in X$. Determinar la adherencia en $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ (dotado de la norma del supremo) del subespacio vectorial generado por $\{g_n : n = 0,1,2,\ldots\}$.

2. Sean E un espacio normado y $T\colon \mathscr{C}(X,\mathbb{K}) \to E$ una aplicación lineal continua tal que $T(g_n) = 0$ para $n \geq 0$. ¿Qué puede decirse de T?

3. Si $X = [0,1]$ y $h \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ verifica que
$$\int_0^1 f^n(t)h(t)\,dt = 0$$
para cada $n \geq 0$, probar que $h = 0$.

Ejercicio 126 Sea $I = [0,1]$.

1. Demostrar que no existe una aplicación continua e inyectiva de $I \times I$ en $\mathbb{R}$.

2. Sean $f \in \mathscr{C}(I \times I,\mathbb{R})$ y $\mathscr{A}(f)$ el subespacio lineal generado por $\{1, f, f^2, \ldots\}$. Demostrar que $\mathscr{A}(f)$ no es denso en $\mathscr{C}(I \times I,\mathbb{R})$.

Ejercicio 127 Para cada $n = 0,1,2,\ldots$ se define la función $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por
$$f_n(t) = e^{-nt}.$$

1. Probar que el subespacio lineal generado por el conjunto
$$\{f_n : n = 0,1,2,\ldots\}$$
es denso en el subespacio de Banach de $(\mathscr{C}([0,\infty),\mathbb{R}), \|\,\|_\infty)$ formado por las funciones que tienen límite finito en infinito.

2. Demostrar que si $h \in \mathscr{C}([0,\infty),\mathbb{R})$ tiene límite finito en infinito y
$$\int_0^\infty e^{-nt}h(t)\,dt = 0$$
para cada $n \geq 0$, entonces $h = 0$.

Ejercicio 128 Sean X un espacio topológico compacto, $a \in X$ y $\mathscr{A}$ un álgebra de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Se supone que:

1. $f(a) = 0$ para cada $f \in \mathscr{A}$.

2. $\mathscr{A}$ separa puntos de X.

Probar que para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $g \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ con $g(a) = 0$, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Ejercicio 129 Se considera el conjunto
$$A = \{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}) : |f(x)| = 1 \text{ para cada } x \in [0,1]\}.$$
Probar que el subespacio generado por A es denso en el espacio $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}), \|\,\|_\infty)$. ¿Sigue siendo válido el resultado si se sustituye $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$?

Ejercicio 130 Se designa por $\mathscr{P}$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{R}$, normado por
$$\|P\| = \sup\{|P(x)| : 0 \leq x \leq 1\}, \quad P \in \mathscr{P}.$$
Si a, b son números reales con $a < b$, se considera la aplicación T_{ab} de $\mathscr{P}$ en $\mathbb{R}$, definida por
$$T_{ab}(P) = \int_a^b P(x)\,dx.$$
Si $a \notin [0,1]$ o $b \notin [0,1]$, probar que la aplicación T_{ab} no es continua.

Ejercicio 131 Sea M un subespacio vectorial cerrado de $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}), \|\,\|_\infty)$ formado por funciones lipschitzianas. Si $t, s \in [0,1],\ t \neq s$, se considera la aplicación $T_{ts}\colon M \to \mathbb{C}$ dada por:
$$T_{ts}(f) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

1. Demostrar que T_{ts} es lineal y continua.

2. Demostrar que existe $C > 0$ tal que $\|T_{ts}\| \leq C$ para todos $t, s \in [0,1],\ t \neq s$.

3. Demostrar que M es de dimensión finita.

Capítulo 6

Espacios de Hilbert.

En este tema trabajaremos con espacios normados cuya norma proviene de un producto interno, lo que dota al espacio vectorial de una estructura geométrica ligada a su estructura de espacio métrico. En esta línea el concepto de ortogonalidad es fundamental.

6.1. Productos internos.

Definición 6.1.1 Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno* sobre E es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ en $\mathbb{K}$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todos $x, y, z \in E$.

2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$.

3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todos $x, y \in E$.

4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in E$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si, y solo si, $x = 0$.

Un espacio *prehilbertiano* o *con producto interno* es un par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre E.

Proposición 6.1.2 Sean E un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre E. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$.

2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ para todos $x, y, z \in E$.

3. $\langle x, 0\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$ para todos $x, y \in E$.

4. Si $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in E$, entonces $x = 0$.

Teorema 6.1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea E un espacio prehilbertiano. Si $x, y \in E$ se verifica que

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

La igualdad se da si, y sólo si, el conjunto $\{x, y\}$ es linealmente dependiente.

Proposición 6.1.4 Sea E un espacio prehilbertiano. Para cada $x \in E$ se define

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}. \tag{6.1}$$

1. Para cada $x, y \in E$ se tiene que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle).$$

2. La aplicación $\|\ \|$ de E en $\mathbb{R}$ es una norma sobre E.

Definición 6.1.5 Un *espacio de Hilbert* es un espacio prehilbertiano completo para la norma definida por (6.1).

Ejemplo 6.1.6

1. El espacio $\mathbb{K}^n$ es un espacio de Hilbert cuando se considera el producto interno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y}_k, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n.$$

2. El espacio $\ell^2(\mathbb{K})$ es un espacio de Hilbert cuando se considera el producto interno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y}_n, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{K}).$$

3. Si X es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$, el espacio $L^2(X, \mathbb{K})$ es un espacio de Hilbert cuando se considera el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}\, dt, \quad f, g \in L^2(X, \mathbb{K}).$$

Proposición 6.1.7 Sean E un espacio prehilbertiano y $x, y \in E$. Se verifican las siguientes igualdades:

1. *Identidad del paralelogramo*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

2. *Identidades de polarización*:

i) Si E es real,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

ii) Si E es complejo,

$$\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2).$$

Observación 6.1.8 Si E es un espacio normado en el que se verifica la ley del paralelogramo, entonces existe un producto interno $\langle\,,\rangle$ tal que

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

para cada $x \in E$, es decir, E es de hecho prehilbertiano. La prueba de este hecho puede encontrarse en [20, p.108].

Obsérvese también que, de acuerdo con la identidad de polarización, en un espacio prehilbertiano el producto interno queda determinado por la norma: conocer la norma de cualquier vector permite conocer el producto interno de cualquier par de ellos.

Proposición 6.1.9 Sea E un espacio prehilbertiano. La aplicación $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ de $E \times E$ en $\mathbb{K}$ es continua.

Proposición 6.1.10 Sean E un espacio prehilbertiano y $a \in E$. El funcional $x \mapsto \langle x, a\rangle$ de E en $\mathbb{K}$ es lineal y continuo.

Proposición 6.1.11 La compleción de un espacio prehilbertiano es un espacio de Hilbert.

6.2. Ortogonalidad.

Definición 6.2.1 Sea E un espacio prehilbertiano.

- Se dice que dos elementos x, y de E son *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$ y se representa por $x \perp y$.
- Un subconjunto A de E se dice que es *ortogonal* si $x \perp y$ para todos $x, y \in A$, $x \neq y$. Si además $\|x\| = 1$ para todo $x \in A$ se dice que A es un conjunto *ortonormal*.
- Se dice que un conjunto A es *ortogonal* a un conjunto B si $x \perp y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$, y se representa por $A \perp B$.
- Si A es un subconjunto de E, se define el *conjunto ortogonal* de A por

$$A^{\perp} = \{x \in E : x \perp y \text{ para todo } y \in A\} = \{x \in E : \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in A\}.$$

Proposición 6.2.2 Sea E un espacio prehilbertiano y sean A y B dos subconjuntos de E. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $A \subseteq B$ entonces $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
2. $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.
3. $A \subseteq A^{\perp\perp}$ y $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$.
4. $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$.
5. $E^{\perp} = \{0\}$ y $\{0\}^{\perp} = E$.
6. $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de E.

Teorema 6.2.3 (de Pitágoras) Sean E un espacio prehilbertiano y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto ortogonal finito. Entonces

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Definición 6.2.4 Sean (E, d) un espacio métrico, F un subconjunto de E no vacío y $a \in E$. Una *proyección* de a sobre F es un punto $b \in F$ tal que $d(a, F) = d(a, b)$.

En general un punto no tiene necesariamente proyección sobre un conjunto y si la tiene no es necesariamente única (véanse los ejercicios 148 y 149).

Teorema 6.2.5 (de la proyección) Sean H un espacio de Hilbert y C un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de H. Cada punto de H tiene una única proyección sobre C, es decir, dado $x \in H$ existe un único $y \in C$ tal que $d(x, C) = \|x - y\|$.

***Nota**: Si C un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de H, representaremos por $P_C(x)$ la única proyección de x sobre C.*

Proposición 6.2.6 Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H. Si $x \in H$ y $P_M(x)$ es la proyección de x sobre M, entonces $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

Corolario 6.2.7 Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H. Entonces

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Corolario 6.2.8 Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H, distinto de H. Entonces existe $z \in H$, $z \neq 0$, tal que $z \in M^{\perp}$ (es decir, $M^{\perp} \neq \{0\}$).

Proposición 6.2.9 Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H. Entonces $M = M^{\perp\perp}$.

Corolario 6.2.10 Sean H un espacio de Hilbert y A un subconjunto de H. Entonces $A^{\perp\perp} = \overline{\langle A \rangle}$, donde $\langle A \rangle$ es el subespacio vectorial generado por A.

Corolario 6.2.11 Sean H un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío de H. Entonces $\langle A \rangle$ es denso en H si, y sólo si, $A^{\perp} = \{0\}$.

Proposición 6.2.12 Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de E. La aplicación $P_M\colon H \to H$ que envía cada punto x sobre $P_M(x)$, la proyección ortogonal de x sobre M, verifica que:

1. P_M es un operador lineal continuo tal que $\|P_M\| = 1$, a menos que $M = \{0\}$.

2. $P_M(x) = x$ si, y sólo si, $x \in M$.

3. $P_M(H) = M$ y $P_M(M) = M$.

4. $P_M(M^{\perp}) = \{0\}$, de donde $\mathrm{Ker}(P_M) = M^{\perp}$.

5. $P_M^2 = P_M$ (P_M es *idempotente*).

6. $P_{M^{\perp}} = I - P_M$, donde I es la aplicación identidad.

Teorema 6.2.13 (de representación de Riesz) Sean H un espacio de Hilbert y f un funcional lineal sobre H. Son equivalentes:

1. f es continuo en H.

2. Existe $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$.

Además, en estas condiciones, el punto y es único y $\|f\| = \|y\|$.

6.3. Sistemas ortonormales completos.

Esta sección se dedica a caracterizar los sistemas, maximales respecto de la contención, formados por vectores unitarios y ortogonales dos a dos, denominados sistemas ortonormales completos. Como se verá, dichos sistemas permiten representar los vectores del espacio de Hilbert en *serie de Fourier*, y su numerabilidad caracteriza a los espacios separables.

Proposición 6.3.1 Sean E un espacio prehilbertiano y A un subconjunto ortogonal de E tal que $0 \notin A$. Entonces A es un conjunto linealmente independiente.

Proposición 6.3.2 Sean E un espacio prehilbertiano, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto ortonormal finito y $M = \langle\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}\rangle$. Si $x \in E$, la proyección de x sobre M viene dada por $P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k$.

Observación 6.3.3 En el resultado anterior se ha probado que si M es un subespacio vectorial de dimensión finita, entonces cada punto $x \in E$ tiene una única proyección sobre M, independientemente de que E sea completo o no.

Proposición 6.3.4 (Método de ortonormalización de Gram-Schmidt) Sean E un espacio prehilbertiano y $\{x_n : n = 1, 2 \ldots\}$ un sistema libre de vectores (finito o infinito numerable). Se definen por recurrencia:

$$y_1 = x_1,\ u_1 = y_1/\|y_1\| \quad \text{e} \quad y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, u_k\rangle u_k,\ u_n = y_n/\|y_n\| \text{ para } n \geq 2.$$

Entonces $\{u_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es un conjunto ortonormal y para cada n se verifica que $\langle\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}\rangle = \langle\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\rangle$.

Proposición 6.3.5 (Desigualdad de Bessel) Sean E un espacio prehilbertiano y A un subconjunto ortonormal. Entonces para todo $x \in E$ y $u_1, u_2, \ldots, u_n \in A$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Observación 6.3.6 Si E es un espacio prehilbertiano separable, cualquier conjunto ortonormal tiene que ser necesariamente a lo sumo numerable, lo que nos permitiría en lo que sigue trabajar con series. Sin embargo, hemos preferido no añadir esta restricción, aunque el precio a pagar es que el alumno debe cononer la definición y algunas propiedades de las familias sumables, que puede encontrar en el apéndice B.

Corolario 6.3.7 Sean E un espacio prehilbertiano y $\{u_i\}_{i\in I}$ una familia ortonormal de vectores de E. La familia $\{|\langle x, u_i\rangle|^2\}_{i\in I}$ es sumable y $\sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ para cada $x \in H$.

Corolario 6.3.8 Sean E un espacio prehilbertiano y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto ortonormal numerable. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Proposición 6.3.9 Sean E un espacio prehilbertiano y $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia sumable de elementos de E. Si $x = \sum_{i\in I} x_i$, entonces la familia $\{\langle x_i, y\rangle\}_{i\in I}$ es sumable y $\sum_{i\in I} \langle x_i, y\rangle = \langle x, y\rangle$ para cada $y \in E$.

Teorema 6.3.10 (de Riesz-Fischer) Sean H un espacio de Hilbert, $\{u_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormal y $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ una familia de escalares. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. Existe $x \in H$ tal que $\langle x, u_i \rangle = \lambda_i$ para cada $i \in I$.

2. La familia $\{|\lambda_i|^2\}_{i \in I}$ es sumable.

3. La familia $\{\lambda_i u_i\}_{i \in I}$ es sumable en H.

Análogamente se prueba el teorema de Riesz-Fischer para el caso numerable:

Proposición 6.3.11 Sean H un espacio de Hilbert, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal numerable y $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. Existe $x \in H$ tal que $\langle x, u_n \rangle = \lambda_n$ para cada $n = 1, 2, \dots$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$ converge en H.

Definición 6.3.12 Sea E un espacio prehilbertiano. Un conjunto ortonormal A se dice que es un *sistema ortonormal completo* o una *base ortonormal* de E, si A es maximal para el orden de inclusión, es decir, si no existe ningún conjunto ortonormal que contenga estrictamente a A.

Teorema 6.3.13 Sea E un espacio prehilbertiano y $B \subseteq E$ un conjunto ortonormal. Existe un sistema ortonormal completo A tal que $B \subseteq A$.

Teorema 6.3.14 Sean H un espacio de Hilbert y $B = \{u_i : i \in I\}$ un sistema ortonormal de H. Son equivalentes:

1. B es una base ortonormal de H.

2. $x = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i$ para cada $x \in H$.

3. $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \langle u_i, y \rangle$ para todos $x, y \in H$.

4. $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2$ para cada $x \in H$.

5. $B^{\perp} = \{0\}$.

6. $\langle B \rangle$ es denso en H.

***Nota**: La igualdad 2 del teorema anterior dice que x es igual a la suma de la* serie de Fourier *de x respecto al conjunto ortonormal B. La igualdad 4 se conoce como la* identidad de Parseval.

Proposición 6.3.15 Sea H un espacio de Hilbert y sean A y B dos bases ortonormales de H. Entonces A y B tienen el mismo cardinal.

Proposición 6.3.16 Sea $H \neq \{0\}$ un espacio de Hilbert. Entonces H es separable si, y sólo si, H tiene una base ortonormal a lo sumo numerable.

Definición 6.3.17 Se llama *dimensión ortogonal* de un espacio de Hilbert al cardinal de un sistema ortonormal completo.

En lo que resta del capítulo probaremos que todo espacio de Hilbert es isomorfo a un espacio modelo de familias de cuadrado sumable, $\ell^2(I, \mathbb{K})$, donde el conjunto de índices I tiene como cardinal la dimensión ortogonal del espacio.

Definición 6.3.18 Sea I un conjunto no vacío. Se denota por $\ell^2(I, \mathbb{K})$ al conjunto

$$\ell^2(I, \mathbb{K}) = \{\lambda = \{\lambda_i\}_{i\in I} : \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ y } \{|\lambda_i|^2\}_{i\in I} \text{ es sumable}\}.$$

En $\ell^2(I, \mathbb{K})$ se consideran la suma y producto por un escalar habituales. Veremos que dichas operaciones dan a $\ell^2(I, \mathbb{K})$ estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Proposición 6.3.19 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean $\lambda = \{\lambda_i\}_{i\in I}$ y $\mu = \{\mu_i\}_{i\in I}$ elementos de $\ell^2(I, \mathbb{K})$. Entonces $\{\lambda_i \mu_i\}_{i\in I}$ es sumable y se verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\sum_{i\in I} \lambda_i \mu_i|^2 \leq \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 \sum_{i\in I} |\mu_i|^2.$$

Proposición 6.3.20 (Desigualdad de Minkowski) Sean $\lambda = \{\lambda_i\}_{i\in I}$ y $\mu = \{\mu_i\}_{i\in I}$ dos elementos de $\ell^2(I, \mathbb{K})$. Entonces $\lambda + \mu = \{\lambda_i + \mu_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I, \mathbb{K})$ y se verifica la desigualdad de Minkowski:

$$(\sum_{i\in I} |\lambda_i + \mu_i|^2)^{1/2} \leq (\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2)^{1/2} + (\sum_{i\in I} |\mu_i|^2)^{1/2}.$$

La desigualdad de Minkowski demuestra que la suma y producto por escalares en $\ell^2(I, \mathbb{K})$ dotan a este espacio de estructura de espacio vectorial sobre K y que la aplicación

$$\lambda = \{\lambda_i\}_{i\in I} \to \|\lambda\| = (\sum_{i\in K} |\lambda_i|^2)^{1/2}$$

de $\ell^2(I, \mathbb{K})$ en $\mathbb{R}$ es una norma sobre $\ell^2(I, \mathbb{K})$. Es fácil ver que este espacio normado es un espacio de Banach.

Además, si $\lambda = \{\lambda_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I, \mathbb{K})$ se tiene que $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I, \mathbb{K})$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, si $\lambda = \{\lambda_i\}_{i\in I}$ y $\mu = \{\mu_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I, \mathbb{K})$,

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \bar{\mu}_i$$

está bien definido y es un producto interno sobre $\ell^2(I, \mathbb{K})$ cuya norma asociada es la anterior.

Proposición 6.3.21 Sea I un conjunto no vacío. Para cada $i \in I$ sea $\mathbf{e}_i = \{\delta_{ij}\}_{j\in I}$ la familia de elementos de $\mathbb{K}$ dada por $\delta_{ii} = 1$ y $\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$. La familia $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$ es un sistema ortonormal completo para $\ell^2(I,\mathbb{K})$.

Proposición 6.3.22 $\ell^2(I,\mathbb{K})$ es separable si, y sólo si, I es a lo sumo numerable.

Teorema 6.3.23 Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Existen un conjunto I y un operador lineal T de H en $\ell^2(I,\mathbb{K})$, biyectivo y tal que

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{para cada par de elementos } x, y \in H.$$

6.4. Ejercicios.

Ejercicio 132 Demostrar que el completado de un espacio prehilbertiano es un espacio de Hilbert.

Ejercicio 133 Demostrar que si $p \in [1,\infty]$, $p \neq 2$, entonces ℓ^p no es un espacio de Hilbert.

Ejercicio 134 Demostrar que $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ no es un espacio de Hilbert.

⇨ **Ejercicio 135** Sean E y F dos espacios vectoriales y $T : E \to F$ una aplicación lineal e inyectiva. Si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno sobre F, probar que

$$\langle x, y\rangle_* = \langle T(x), T(y)\rangle, \quad x, y \in E,$$

define un producto interno sobre E.

***Nota**: La relación de este ejercicio con el ejercicio 13 es evidente.*

Ejercicio 136 Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $w : I \to \mathbb{R}$ medible con $w(t) > 0$ en I. Se considera el espacio $L^2_w(I,\mathbb{K})$ de las funciones $f \colon I \to \mathbb{K}$ medibles tales que $\int_I |f(t)|^2 w(t)\, dt < \infty$.

1. Demostrar que $L^2_w(I,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial. Se identificarán en $L^2_w(I,\mathbb{K})$ funciones iguales casi siempre en I.
2. Probar que $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)}w(t)\, dt$ es un producto interno en $L^2_w(I,\mathbb{K})$.
3. Demostrar que $L^2_w(I,\mathbb{K})$ dotado de este producto interno es un espacio de Hilbert.

Ejercicio 137 Sea H un espacio de Hilbert.

1. Sean $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones de la bola cerrada unidad de H tales que $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = 1$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

2. Sean $a \in H$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de H. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, a\rangle = \langle a, a\rangle$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|a\|$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = 0$.

Ejercicio 138 Se considera el conjunto $E = \{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) : \int_0^1 \frac{f(t)^2}{t}\, dt < \infty\}$.

1. Demostrar que E es un subespacio vectorial de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. Probar que si $f \in E$ entonces $f(0) = 0$.
3. Demostrar que si $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y f es derivable en 0, entonces $f \in E$.
4. Si $f, g \in E$ se define $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{t}\, dt$. Demostrar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en E.
5. Aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la sucesión $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$, determinar explicitamente los tres primeros polinomios obtenidos.

⇨ **Ejercicio 139** Sean H un espacio de Hilbert, $x_0 \in H$ y M un subespacio vectorial cerrado de H. Demostrar que

$$\min\{\|x - x_0\| : x \in M\} = \max\{|\langle x_0, y\rangle| : y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\}.$$

⇨ **Ejercicio 140** Calcúlese

$$\min\Big\{\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2\, dx : a, b, c \in \mathbb{C}\Big\}.$$

⇨ **Ejercicio 141** Hállese

$$\max\Big|\int_{-1}^{1} x^3 g(x)\, dx\Big|,$$

donde $g \in L^2([-1,1],\mathbb{C})$ está sujeta a las condiciones

$$\int_{-1}^{1} g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} xg(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)\, dx = 0; \quad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2\, dx = 1.$$

Ejercicio 142

1. Sean H un espacio de Hilbert, $a \in H$, $a \neq 0$, y $M = \{x \in H : \langle x, a\rangle = 0\}$. Probar que para cada elemento y de H se tiene que $d(y, M) = \|a\|^{-1}|\langle y, a\rangle|$.
2. Sea $L = \{f \in L^2([0,1],\mathbb{C}) : \int_0^1 f(t)\, dt = 0\}$. Si $g(t) = e^t,\ 0 \le t \le 1$, determinar $d(g, L)$ en $L^2([0,1],\mathbb{C})$.
3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ medible y de medida finita. Probar que la aplicación $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ dada por $T(f) = \int_A f(x)\, dx$ es lineal y continua. Calcular la norma de T. Determinar la relación que existe entre $d(f, \mathrm{Ker}(T))$ y $T(f)$ para $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 143 Sea $L_n = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$. Si $a = (1, 0, 0, \dots)$, determinar $d(a, L_n)$ en ℓ^2.

⇨ **Ejercicio 144** En c_{00} se considera la norma inducida por la de ℓ^2. Sea $f\colon c_{00} \to \mathbb{K}$ dada por
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_{00}.$$

1. Probar que f es un funcional lineal y continuo.
2. Demostrar que no existe $y \in c_{00}$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$ para cada $x \in c_{00}$.
3. Sea $F = f^{-1}(0)$. Demostrar que $F^{\perp} = \{0\}$ y que $c_{00} \neq F + F^{\perp}$.

Ejercicio 145 Sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $(0, 1]$.

1. Probar que para cada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |x_n|^2$ es convergente.
2. Demostrar que la igualdad
$$\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |x_n|^2)^{1/2}, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$$
define una norma en ℓ^2 que proviene de un producto interno.
3. Si $n \in \mathbb{N}$ se designa por z_n el elemento de ℓ^2 dado por $z_n = (1, \overset{n}{\ldots}, 1, 0, 0, \ldots)$, donde el último 1 está en el lugar n-ésimo. Demostrar que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(\ell^2, \|\ \|)$ si, y solo si, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$.
4. Dar un ejemplo de una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de (0,1] tal que el espacio prehilbertiano anterior no sea un espacio de Hilbert.

⇨ **Ejercicio 146** Sea H un espacio de Hilbert real. Se supone que $h_1, h_2, \ldots, h_n$ son n elementos linealmente independientes del espacio de Hilbert H. Se designa por M el subespacio vectorial de H generado por $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ y por P la proyección de H sobre M.

1. Si $f \in H$ y $g \in M$, demostrar la equivalencia de los enunciados siguientes:
   (a) $P(f) = g$.
   (b) $\langle f - g, h\rangle = 0$ para cada $h \in M$.
   (c) $\langle f - g, h_i\rangle = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Dado $f \in H$ se considera la función $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \|f - \sum_{k=1}^{n} x_k h_k\|^2.$$
Probar que F es de clase $\mathscr{C}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$.

   Para $g = \sum_{k=1}^{n} a_k h_k$ un elemento de M, probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $P(f) = g$.

(b) Para cada $k = 1, 2, \ldots n$ se tiene que $\frac{\partial F}{\partial x_k}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$.

⇨ **Ejercicio 147** Minimizar

$$\Big\{\|f\|_2 : f \in L^2([0,1], \mathbb{C}),\ \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt = 1,\ \int_0^1 f(t)\overline{h(t)}\, dt = 2\Big\},$$

donde g y h son las funciones definidas en $[0,1]$ por $g(t) = t$ y $h(t) = t^2$.

⇨ **Ejercicio 148** Sea M el conjunto de las funciones $f \in L^1([0,1])$ tales que

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 1.$$

Demostrar que M es un subconjunto cerrado y convexo de $L^1([0,1])$ que contiene infinitos elementos de norma mínima.

⇨ **Ejercicio 149** Sea

$$M = \Big\{f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{K}) : \int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^1 f(t)\, dt = 1\Big\}.$$

Demostrar que M es un subconjunto cerrado y convexo del espacio $(\mathscr{C}([0,1], \mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$ que no contiene ningun elemento de norma mínima.

Ejercicio 150 Sea $H = L^2([0,1], \mathbb{R}) \times L^2([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de Hilbert provisto del producto escalar

$$\langle (x_1, u_1), (x_2, u_2) \rangle = \int_0^1 (x_1(t)x_2(t) + u_1(t)u_2(t))\, dt.$$

Sean α, β, λ números reales no nulos. Demostrar que

$$E = \Big\{(x, u) \in H : x(t) = e^{\alpha t}\Big(\lambda + \beta \int_0^1 e^{-\alpha s} u(s)\, ds\Big),\ 0 \le t \le 1\Big\}$$

tiene un único elemento de norma mínima.

Ejercicio 151 Sea n un número natural. Se designa por $\mathscr{P}_n$ al espacio vectorial de los polinomios en una variable con coeficientes reales y de grado menor o igual que n.

1. Demostrar que el conjunto

$$M_n = \{P \in \mathscr{P}_n : \int_0^1 P(t)\, dt = 0\}$$

es un subespacio vectorial cerrado de $L^2([0,1], \mathbb{R})$. ¿Cuál es su dimensión?

2. Si $f(t) = t^3,\ t \in [0,1]$, determinar el único polinomio $P \in M_2$ tal que

$$\|f - P\|_2 \le \|g - Q\|_2$$

para cada $Q \in \mathscr{P}_2$.

Ejercicio 152 Demostrar que existe un único polinomio P con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2 tal que para cada polinomio Q con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2 se verifica que

$$\int_0^\infty (x^3 - P(x))^2 e^{-x}\, dx \leq \int_0^\infty (x^3 - Q(x))^2 e^{-x}\, dx.$$

Determinar dicho polinomio P.

⇨ **Ejercicio 153** Sean H un espacio de Hilbert, M un subespacio vectorial de H, F un espacio de Banach y $\lambda\colon M \to F$ lineal y continua. Demostrar que existe $\Lambda\colon H \to F$ lineal y continua que prolonga a λ y tal que $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$.

Ejercicio 154 Sea F un subespacio vectorial de $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ denso en $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ que sólo contiene funciones acotadas y cerrado para la conjugación de funciones. Sea M un subespacio vectorial cerrado de $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ tal que si $f \in M$ y $g \in F$, entonces $fg \in M$. Sea P la proyección ortogonal de $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ sobre M. Probar:

1. Si $h \in M^\perp$ y $g \in F$ entonces $gh \in M^\perp$.

2. $P(f) = fP(1)$ para cada función $f \in L^2([-\pi,\pi])$.

3. Existe un conjunto medible $E \subseteq [-\pi,\pi]$, tal que $P(1) = \chi_E$.

4. $M = \{f \in L^2([-\pi,\pi]) : f = 0 \ \text{ c.s. en } \ [-\pi,\pi] \setminus E\}$.

Ejercicio 155 Sean H un espacio de Hilbert, M un subespacio vectorial cerrado de H, P la proyección ortogonal de H sobre M y $x \in H$.

1. Probar que $x \in M$ si, y sólo si, $\|Px\| = \|x\|$.

2. Demostrar las igualdades
$$\langle Px, x\rangle = \langle x, Px\rangle = \|Px\|^2.$$

3. Sean M_1 y M_2 dos subespacios vectoriales cerrados de H. Se denotan por P_1 y P_2 las proyecciones ortogonales de H sobre M_1 y M_2 respectivamente. Demostrar la equivalencia de los siguientes enunciados:

   (i) $\langle P_1 x, x\rangle \leq \langle P_2 x, x\rangle$ para cada $x \in H$.

   (ii) $\|P_1 x\| \leq \|P_2 x\|$ para cada $x \in H$.

   (iii) $M_1 \subseteq M_2$.

   (iv) $P_2 P_1 = P_1$.

(v) $M_2^{\perp} \subseteq M_1^{\perp}$.

(vi) $P_1P_2 = P_1$.

Ejercicio 156 Sea M un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H. Se designa por P la proyección ortogonal de H sobre M y por Q la proyección ortogonal de H sobre $M^{\perp}$. Sea T una aplicación lineal de H en H.

1. Probar que son equivalentes los enunciados siguientes:

   (i) $T(M) \subseteq M$ y $T(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$.

   (ii) $PT = TP$.

   (iii) $QT = TQ$.

2. Se supone que T verifica la siguiente propiedad:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \text{para cada par de elementos } x, y \in H. \tag{6.2}$$

   Demostrar la equivalencia de los enunciados siguientes:

   (a) $T(M) \subseteq M$.

   (b) $T(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$.

Nota: *Como veremos en el capítulo 8, un operador que verifica la propiedad (6.2) se dice que es* autoadjunto.

Ejercicio 157 Sean H un espacio de Hilbert, M un subespacio vectorial de H cerrado y P la proyección ortogonal de H sobre M. Demostrar que los enunciados siguientes son equivalentes:

1. La dimensión algebraica de M es finita.

2. $P(\{x \in H : \|x\| \leq 1\})$ es un compacto de H.

⇨ **Ejercicio 158** Dado $b \in \mathbb{C}$ con $|b| < 1$, se define $T\colon \ell^2 \to \mathbb{C}$ por

$$T(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n, \quad a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2.$$

Probar que T es un operador lineal y continuo, y calcular su norma.

Ejercicio 159 Sea E el espacio de las funciones polinómicas reales, de grado menor o igual a n. Demostrar que existe un único $P \in E$ tal que

$$\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)P(t)\,dt \quad \text{para cada } f \in E.$$

Determinar P en el caso que $n = 2$.

⇨ **Ejercicio 160** Sea $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ medible, acotada en cada compacto de $(0,1]$ y tal que $g \notin L^2([0,1],\mathbb{C})$. Probar que $\{f \in L^2([0,1],\mathbb{C}) : fg \in L^1([0,1],\mathbb{C})$ y $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0\}$ es denso en $L^2([0,1],\mathbb{C})$.

Ejercicio 161

1. Sea H un espacio de Hilbert y $\Phi \in H'$. Probar que existe $a \in H$ con $\|a\| \leq 1$ y tal que $\|\Phi\| = |\Phi(a)|$.

2. Se define la aplicación $T\colon c_0 \to \mathbb{K}$ por
$$T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$
Probar que T es lineal y continua. Determinar $\|T\|$. ¿Existe algún elemento $a \in c_0$ con $\|a\|_\infty \leq 1$ y tal que $\|T\| = |T(a)|$?

⇨ **Ejercicio 162** Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormal de un espacio de Hilbert H. Probar que
$$\text{Card}\ \{i \in I : |\langle x, e_i\rangle| > \beta\} \leq \beta^{-2}\|x\|^2 \quad \text{para cada } \beta > 0 \text{ y } x \in H\,.$$

Nota: *Este resultado nos proporciona una demostración sencilla de que el cardinal del conjunto de los índices para los cuales el correspondiente coeficiente de Fourier es no nulo es numerable a lo más, como puede deducirse también de la proposición B.4.3.*

⇨ **Ejercicio 163** Sean H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base hilbertiana de elementos de H y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortogonal de elementos de H. Probar que los enunciados siguientes son equivalentes:

1. Existe un único operador lineal y continuo $T\colon H \to H$ tal que $T(e_n) = a_n,\ n \in \mathbb{N}$.

2. La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en H.

3. Para cada $x \in H$, la sucesión $\{\langle a_n, x\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathbb{K}$.

Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada en H y T es el operador anterior, determinar $\|T\|$.

Sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares, y pongamos $a_n = \lambda_n e_n$ para cada $n \in N$. Demostrar que si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, el operador T correspondiente es un homeomorfismo si, y sólo si, $\inf\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Nota: *Es interesante comparar este ejercicio con el ejercicio 37.*

⇨ **Ejercicio 164** Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H. Sean A y B bases hilbertianas de M y $M^\perp$ respectivamente. Demostrar que $A \cup B$ es una base hilbertiana de H.

⇨ **Ejercicio 165** Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se considera la función $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$. Probar que $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$.

Ejercicio 166 Sean $(H, \| \ \|)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base hilbertiana de H y $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{K})$ con $\alpha_n \neq 0$ para $n = 1, 2, \ldots$

1. Demostrar que para cada $x \in H$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, e_n \rangle$ converge absolutamente.

2. Probar que la igualdad
$$\|x\|_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle x, e_n \rangle|, \quad x \in H,$$
define una norma en H.

3. Demostrar que la sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en el espacio normado $(H, \| \ \|_\alpha)$. La sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, ¿converge en el espacio de Hilbert $(H, \| \ \|)$?

4. Demostrar que la identidad $I\colon (H, \| \ \|) \to (H, \| \ \|_\alpha)$ es continua. ¿Es continua $I\colon (H, \| \ \|_\alpha) \to (H, \| \ \|)$?

5. Probar que $(H, \| \ \|_\alpha)$ no es un espacio de Banach.

6. Sea $\beta = \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una nueva sucesión de elementos de $\ell^2(\mathbb{K})$ con $\beta_n \neq 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ Demostrar que la identidad $I\colon (H, \| \ \|_\beta) \to (H, \| \ \|_\alpha)$ es continua si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que
$$|\alpha_n| \leq M|\beta_n| \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 167 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de un espacio de Hilbert H tal que, para cada $x \in H$, la sucesión numérica $\{\langle x, a_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{K})$. Probar que la aplicación T de H en $\ell^2(\mathbb{K})$ definida por
$$T(x) = \{\langle x, a_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$$
es continua.

⇨ **Ejercicio 168** Sea H un espacio de Hilbert y $T\colon H \to H$ lineal, tal que
$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$$
para cada par de elementos $x, y \in H$. Demostrar que T es continua.

Ejercicio 169 Sea E un espacio normado y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E. Se supone que para cada $f \in E'$ se tiene que $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{K})$. Demostrar que existe $M > 0$ tal que para cada $f \in E'$ se tiene que
$$\|\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_2 \leq M\|f\|.$$

Nota: *Obsérvese que si E es un espacio de Hilbert y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia ortornormal, el ejercicio es consecuencia de la desigualdad de Bessel.*

Capítulo 7

Aplicaciones.

Dedicaremos este último capítulo a introducir dos temas de gran importancia en la que se pone de manifiesto la utilidad de los resultados que hemos estudiado anteriormente: el teorema espectral y las series de Fourier.

7.1. El teorema espectral.

Esta sección está dedicada al estudio de unas aplicaciones lineales, los llamados operadores compactos, cuyo comportamiento es mejor que el de las aplicaciones lineales y continuas arbitrarias en el sentido de que sus propiedades se asemejan más a las de los operadores lineales en espacios de dimensión finita. También hablaremos del adjunto de un operador continuo entre espacios de Hilbert, que es el análogo a hablar de la matriz transpuesta conjugada en el caso de dimensión finita. Es interesante observar cómo se puede obtener información sobre el operador original a partir de las propiedades de su operador adjunto.

Tomaremos como referencia [10] y [13].

7.1.1. Operadores compactos.

Los operadores acotados de rango finito (ver la definición 7.1.3) pueden verse como una generalización de las matrices finitas. Pero estos operadores tienen una importancia limitada en cuanto que su límite puede no ser de rango finito. En esta sección introducimos los operadores compactos, que son una generalización natural de los operadores de rango finito, igual que los conjuntos compactos son una generalización natural de los conjuntos finitos desde un punto de vista topológico.

Sean E y F espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Denotaremos por B la bola cerrada unidad (de centro 0 y radio 1) en E y por U la bola abierta unidad de E.

Definición 7.1.1 Un operador $T\colon E \to F$ se dice que es un operador *compacto* si para cualquier conjunto acotado A de E, el conjunto $T(A)$ es relativamente compacto de F.

Claramente si T es un operador compacto, entonces $T \in \mathscr{L}(E, F)$. El recíproco no es cierto pues si E es un espacio normado de dimensión infinita e I es el operador identidad en E, se tiene que $I(B) = B$ no es compacto por el teorema de Riesz.

Proposición 7.1.2 Sea $T\colon E \to F$ un operador. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. T es compacto.
2. Para cada sucesión acotada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de E, la sucesión $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en F.
3. Si B es la bola cerrada unidad de E, entonces $T(B)$ es relativamente compacto en F.
4. Si U es la bola abierta unidad de E, entonces $T(U)$ es relativamente compacto en F.

Definición 7.1.3 Sea T un operador lineal de E en F. Se dice que T es de *rango finito* si $T(E)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.

Proposición 7.1.4 Sea $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Si T es de rango finito, entonces T es compacto y $T(E)$ es cerrado. El recíproco es cierto si E y F son espacios de Banach.

Recordemos que los conjuntos relativamente compactos son siempre precompactos y que los conjuntos precompactos en espacios métricos completos son relativamente compactos.

Proposición 7.1.5 Si F es un espacio de Banach y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de operadores compactos que converge hacia un operador T en $\mathscr{L}(E, F)$, entonces T es un operador compacto.

7.1.2. El operador adjunto.

En esta sección H designará un espacio de Hilbert no nulo sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Teorema 7.1.6 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$. Existe un operador $T^* \in \mathscr{L}(H)$ único tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \text{para todos } x, y \in H.$$

Definición 7.1.7 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$. Se llama *adjunto* de T al único operador T^* que verifica que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para todos $x, y \in H$.

Definición 7.1.8 Se dice que un operador $T \in \mathscr{L}(H)$ es *autoadjunto* si $T = T^*$.

7.1.3. El teorema espectral.

En esta sección se hace un detallado análisis del espectro de un operador compacto y autoadjunto sobre un espacio de Hilbert y se prueba que es similar al espectro de un operador en un espacio normado de dimensión finita, excepto para el caso especial del cero. Muchos de los resultados que siguen a continuación son ciertos con hipótesis menos restrictivas, pero su demostración es más laboriosa.

Definición 7.1.9 Sean E un espacio normado y $T \in \mathscr{L}(E)$.

- Un escalar λ es un *autovalor* de T o un *valor propio* de T si $T - \lambda I$ no es inyectiva, es decir, si existe $x \in E$, $x \neq 0$, tal que $(T - \lambda I)x = 0$ o, lo que es lo mismo, $Tx = \lambda x$.
- Si λ es un autovalor, al subespacio vectorial $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \emptyset$ se le llama *autoespacio* asociado al autovalor λ y a sus elementos no nulos se les llama *autovectores* de T correspondientes al autovalor λ.
- Al conjunto de los autovalores de T se le llama *espectro puntual* de T y se representa por $\sigma_p(T)$.

Teorema 7.1.10 Si $T \in \mathscr{L}(H)$ un operador autoadjunto, entonces $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$.

Teorema 7.1.11 Sean $T \in \mathscr{L}(H)$ un operador autoadjunto y $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ con $\lambda \neq \mu$. Entonces

$$\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \perp \mathrm{Ker}(T - \mu I),$$

es decir, si x_λ y x_μ son autovectores correspondientes a λ y μ, respectivamente, entonces $x_\lambda \perp x_\mu$.

Teorema 7.1.12 Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$ compacto y autoadjunto. Entonces el conjunto de los autovalores de T es numerable a lo más y 0 es su único punto de acumulación posible.

Teorema 7.1.13 Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathscr{L}(H)$ compacto y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Entonces $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 7.1.14 Sea $T \in \mathscr{L}(H)$. El *rango numérico* de T es el subconjunto de $\mathbb{K}$ dado por

$$w(T) = \{\langle Tx, x\rangle : x \in H,\ \|x\| = 1\}.$$

Observemos que si T es autoadjunto, entonces $w(T) \subseteq \mathbb{R}$, pues para cada $x \in H$ con $\|x\| = 1$ se tiene que

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

Se puede probar que el recíproco es cierto si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Además, en general $w(T) \subseteq \overline{B}(0, \|T\|)$, pues si $\|x\| = 1$,

$$|\langle Tx, x\rangle| \le \|Tx\|\|x\| = \|Tx\| \le \|T\|\|x\| = \|T\|.$$

Teorema 7.1.15 Sea $T \in \mathscr{L}(H)$ autoadjunto. Entonces

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Proposición 7.1.16 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$.

1. Si $\lambda \in \sigma_p(T)$ entonces $|\lambda| \le \|T\|$.

2. Si T es compacto y autoadjunto, existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$.

Proposición 7.1.17 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Si $x \perp \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $x = 0$.

Teorema 7.1.18 (espectral) Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$ compacto y autoadjunto no nulo. Sea $\{\lambda_n : n \in N\}$ una numeración de $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ y sea $\{u_{n1}, u_{n2}, \ldots, u_{nr_n}\}$ una base ortonormal de $\operatorname{Ker}(T - \lambda_n I)$ (que tiene dimensión finita). Sea P_n la proyección ortogonal de H sobre $\operatorname{Ker}(T - \lambda_n I)$ y P_0 la proyección ortogonal de H sobre $\operatorname{Ker} T$. Entonces

1. Si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una base ortonormal de $\operatorname{Ker} T$, entonces

$$\{u_{nk} : n \in N,\ k = 1, \ldots, r_n\} \cup \{v_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$$

es una base ortonormal de H formada por autovectores de T.

2. Para cada $x \in H$ se tiene que

$$x = P_0 x + \sum_{n\in N} P_n x \quad \text{y} \quad Tx = \sum_{n\in N} \lambda_n \sum_{k=1}^{r_n} \langle x, u_{nk}\rangle u_{nk}.$$

Más aún,

$$T = \sum_{n\in N} \lambda_n P_n \text{ en } \mathscr{L}(H),$$

donde, si $n \ne m$, se tiene que $P_n P_m = 0$.

7.2. Series de Fourier.

En el libro de Análisis Matemático de Apostol [2, p.373] podemos leer: "En 1807, Fourier sorprendió a algunos de sus contemporáneos al afirmar que una función 'arbitraria' se podía expresar como combinación lineal de senos y cosenos. Estas combinaciones lineales, llamadas hoy día *series de Fourier*, se han convertido en un instumento indispensable en el análisis de ciertos fenómenos periódicos (tales como vibraciones, movimientos ondulatorios y planetarios) que son estudiados en Física e Ingeniería. Muchos problemas importantes de naturaleza puramente matemática han surgido en relación con la teoría de las series de Fourier, y es un hecho histórico notable que gran parte del desarrollo del Análisis Matemático moderno ha sido profundamente influenciado por la búsqueda de respuestas a tales problemas".

7.2.1. Preliminares.

Definición 7.2.1 Una función compleja f definida en $\mathbb{R}$ se dice que es *periódica de periodo* 2π o que es 2π*–periódica* si

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,.$$

Observación 7.2.2 Si f es una función compleja definida c.s. y medible en $\mathbb{R}$ y tal que

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{casi siempre}\,,$$

entonces existe una función compleja g definida en $\mathbb{R}$, medible y 2π-periódica tal que $f = g$ c.s.

Definición 7.2.3 Un *polinomio trigonométrico* (de periodo 2π) es una combinación lineal de funciones de la familia

$$\mathscr{E} = \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}\,,$$

es decir, es cualquier función de la forma

$$\sum_{k=m}^{n} c_k\, e^{ikx}\,, \text{donde } n, m \in \mathbb{Z}\,, m \leq n\,,\ c_k \in \mathbb{C}\,.$$

Se denotará por PT al conjunto de los polinomios trigonométricos.

Es obvio que los polinomios trigonométricos son ejemplos de funciones 2π–periódicas.

Observación 7.2.4 Es usual identificar funciones definidas en $[-\pi,\pi]$ con funciones 2π-periódicas definidas en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera: dada una función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ se identifica con $f_{|[-\pi,\pi]} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{K}$, su restricción al intervalo $[-\pi,\pi]$; recíprocamente, una función $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{K}$ se identifica con la función $g^{\natural} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, 2π-periódica, definida por

$$g^{\natural}(x) = g(x - 2\pi k) \quad \text{si } x \in [-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

De esta manera, aunque se desarrolle la teoría de series de Fourier en el espacio $L^1([-\pi,\pi])$, se pueden considerar sin ningún comentario adicional las funciones de este conjunto como definidas en $\mathbb{R}$ y 2π-periódicas siempre que sea necesario.

En esta misma línea, si $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ se identifican el espacio $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ de las funciones continuas en $\mathbb{T}$ con el espacio $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi])$ de las funciones continuas en $\mathbb{R}$ y 2π-periódicas mediante la aplicación Φ de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ sobre $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi])$ dada por

$$\Phi(f)(x) = f(e^{ix}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es sencillo comprobar que Φ es una isometría lineal y biyectiva, cuando se considera en los dos espacios la norma de la convergencia uniforme. Recordemos que así el polinomio $p(z) = \sum_{k=m}^{n} c_k\, z^k$ se identifica con el polinomio trigonométrico $\Phi(p)(x) = \sum_{k=m}^{n} c_k\, e^{ikx}$, y el teorema de Stone-Weierstrass ($\mathbb{T}$ es un compacto de $\mathbb{C}$) nos permite probar los siguientes resultados de densidad.

Proposición 7.2.5

1. PT es denso en $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi])$.

2. $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi])$ es denso en $L^p([-\pi,\pi])$ para $1 \le p < \infty$.

3. PT es denso en $L^p([-\pi,\pi])$ para $1 \le p < \infty$.

Para concluir esta sección observemos que para funciones 2π-periódicas podemos elegir libremente el intervalo de integración siempre que su longitud sea 2π.

Lema 7.2.6 Sea f una función medible 2π-periódica. Entonces $f \in L^1([-\pi,\pi])$ si, y sólo si, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $f \in L^1([a, a+\pi])$. Además, en este caso se tiene que

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

7.2.2. Series de Fourier.

Es sencillo comprobar que el conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, donde

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{int}, \quad t \in \mathbb{R},$$

es un sistema ortonormal de $L^2([-\pi,\pi])$ cuando se considera el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx\,, \quad f, g \in L^2([-\pi,\pi])\,.$$

De hecho, la proposición 7.2.5 nos permite decir algo más.

Teorema 7.2.7 El conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal completo para $L^2([-\pi,\pi])$.

Las propiedades que se enuncian a continuación se obtienen como un caso particular de los resultados que se han visto para espacios de Hilbert.

Teorema 7.2.8 Si $f \in L^2([-\pi,\pi])$, entonces

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n\rangle\, e_n \quad \text{en } L^2([-\pi,\pi])\,.$$

Teorema 7.2.9 (Identidad de Parseval) Si $f \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \, .$$

Teorema 7.2.10 Si $\{\lambda_n\}_{-\infty=\infty}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos de $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, entonces existe una única función $f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \, e_n \quad \text{en } L^2([-\pi, \pi]) \, .$$

Para cada $f \in L^2([-\pi, \pi])$ se tiene que

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt.$$

Observemos, sin embargo, que para que estas integrales estén bien definidas sólo es necesario que las funciones pertenezcan al espacio $L^1([-\pi, \pi])$. Recordemos que, aplicando la desigualdad de Hölder, se prueba que $L^p([-\pi, \pi]) \subset L^1([-\pi, \pi])$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Todo lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 7.2.11 Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se llama *coeficiente n-ésimo de Fourier* de f al número

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt.$$

La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$ se llama *serie de Fourier* de f y para indicarlo escribiremos

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \, e^{inx} \, .$$

Si $x \in \mathbb{R}$ y n es un entero no negativo se define la *suma parcial n-ésima* de la serie de Fourier de f en el punto x como

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \, e^{ikx}.$$

Proposición 7.2.12 (Linealidad)

Sean $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces $\lambda f + \mu g \in L^1([-\pi, \pi])$ y

$$(\lambda f + \mu g)(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(\lambda \widehat{f}(n) + \mu \widehat{g}(n)\big) \, e^{inx} \, ,$$

es decir, $(\widehat{\lambda f + \mu g})(n) = \lambda \widehat{f}(n) + \mu \widehat{g}(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Puesto que $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, e_n \rangle$, con esta notación los resultados relativos a $L^2([-\pi, \pi])$ que hemos mencionado anteriormente se enuncian de la siguiente manera:

Teorema 7.2.13 Si $f \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} \quad \text{en } L^2([-\pi, \pi]) \, .$$

Observación 7.2.14

1. El problema clave de la teoría de series de Fourier consiste en obtener condiciones para que la serie de Fourier de una función converja hacia dicha función. De una manera más general, se trata de estudiar cuándo una función queda determinada por sus coeficientes de Fourier. Como hemos visto, si $f \in L^2([-\pi, \pi])$ la serie de Fourier converge en la norma $\| \cdot \|_2$ hacia la función f. En particular se tiene que $f = \lim_{n\to\infty} s_n(f, x)$ en $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Lo que implica que $\{s_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge hacia $f(x)$ casi siempre en $[-\pi, \pi]$.

2. El problema de la convergencia de las series de Fourier sigue sin estar resuelto satisfactoriamente. Todavía no se conocen condiciones necesarias y suficientes para que una serie de Fourier sea convergente.

   La continuidad no es condición necesaria ni suficiente para la convergencia de una serie de Fourier, pues hay funciones continuas no desarrollables en serie de Fourier. Una función puede ser continua y su serie de Fourier divergir en algún punto: en 1966 Katznelson y Kahane probaron que para cualquier conjunto de medida nula existe una función continua cuya serie de Fourier es divergente precisamente en ese conjunto.

   Por otra parte, entre las funciones integrables existen algunas cuya serie de Fourier diverge en todo punto. Kolmogorov, en 1926, construyó una función que prueba esta afirmación.

   En 1966 Carleson demostró que todas las series de Fourier de funciones de $L^2(I)$, siendo I un intervalo acotado, convergen en casi todo punto de I, probando de esta forma la hipótesis de Luzin que databa de 1915. Al año siguiente R. Hunt probó que el resultado también es cierto en $L^p(I)$ para $p > 1$.

Teorema 7.2.15 (Identidad de Parseval) Si $f \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 .$$

Proposición 7.2.16 La aplicación Φ de $L^2([-\pi, \pi])$ en $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, dada por

$$f \to \Phi(f) = \sqrt{2\pi}\{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty},$$

es una isometría lineal suprayectiva.

Este último resultado tienen interés, aparte desde el punto de vista matemático, por su interpretación física en relación con la *energía* trasportada por una onda, señal, etc., concepto que viene dado en términos de la integral del cuadrado del módulo.

Lema 7.2.17 Si $f \in L^1([-\pi, \pi])$ se tiene que

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 7.2.18 (Lema de Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1([-\pi,\pi])$ se tiene que $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Corolario 7.2.19 Si $f \in L^1([-\pi,\pi])$ se tiene que

$$\lim_{|n|\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{|n|\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\text{sen}\,nt\,dt = 0.$$

Definición 7.2.20 Se denota por $c_0(\mathbb{Z})$ el espacio vectorial

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{\sigma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \lim_{|n|\to\infty} \sigma(n) = 0\}.$$

Este espacio con la norma $\| \ \|_\infty$ es un espacio de Banach.

Como es habitual, para referirnos a una aplicación $\sigma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ escribiremos

$$\{\sigma(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} \qquad \text{o} \qquad \{\sigma(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Teorema 7.2.21 La aplicación $\Lambda\colon L^1([-\pi,\pi]) \to c_0(\mathbb{Z})$ dada por $\Lambda(f) = \{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es lineal y continua.

En la próxima sección veremos que podemos decir algo más: se trata de una aplicación inyectiva, aunque no es suprayectiva.

7.2.3. Los núcleos de Dirichlet y Fejér.

Definición 7.2.22 Sea n un entero no negativo.

- Se define el *núcleo de Dirichlet* por
$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}.$$

- Se define el *núcleo de Fejér* por
$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t).$$

Una forma más cómoda de dar estos núcleos viene dada por el siguiente resultado:

Proposición 7.2.23 Se verifican las siguientes igualdades:

1. $D_n(t) = \dfrac{\text{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\text{sen}\,\frac{1}{2}t}$ si $e^{it} \neq 1$ y $D_n(t) = 2n+1$ si $e^{it} = 1$.

2. $K_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=-n}^{n}(n+1-|j|)e^{ijt} = \dfrac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} e^{ijt}\Big|^2$, lo que implica que
$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\text{sen}(\frac{n+1}{2}t)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\right)^2 \quad \text{si } e^{it} \neq 1 \quad \text{y} \quad K_n(t) = n+1 \text{ si } e^{it} = 1.$$

Proposición 7.2.24 Si $f \in L^1([-\pi,\pi])$, para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt.$$

En consecuencia, las *medias aritméticas de las sumas de Fourier* se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt = \sum_{j=-n}^{n}\Big(1-\frac{|j|}{n+1}\Big)\widehat{f}(j)e^{ijx}.\end{aligned}$$

Teorema 7.2.25

1. Para cada $n = 0,1,2,\dots$ el núcleo de Dirichlet D_n es un polinomio trigonométrico y
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1.$$

2. Se verifica que
$$\lim_{n\to\infty}\|D_n\|_1 = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt = \infty.$$

Teorema 7.2.26

1. Para cada $n = 0,1,2,\dots$ el núcleo de Fejér K_n es un polinomio trigonométrico y
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1.$$

2. Para todo $\delta > 0$ se tiene que
$$\lim_{n\to\infty}\sup\{K_n(t) : t \in [-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]\} = 0.$$

3. Si f es una función continua en $[-\pi,\pi]$ y 2π-periódica, entonces la sucesión $\{\sigma_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ de las medias aritméticas de las sumas de Fourier converge hacia $f(x)$ uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

4. Si $f \in L^1([-\pi,\pi])$ entonces $\{\sigma_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en $L^1([-\pi,\pi])$.

Corolario 7.2.27 (Teorema de unicidad) Sean $f,g \in L^1([-\pi,\pi])$. Si $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = g$ c.s.

Teorema 7.2.28 La aplicación $\Lambda\colon L^1([-\pi,\pi]) \to c_0(\mathbb{Z})$ dada por $\Lambda(f) = \{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es lineal, continua e inyectiva, pero no es suprayectiva.

7.2.4. Convergencia puntual de las series de Fourier.

Teorema 7.2.29 Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Si la serie de Fourier de f converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$, entonces la suma de la serie de Fourier coincide con f c.s., es decir,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{inx} \quad \text{para casi todo } x \in [-\pi,\pi]\,.$$

En particular, bajo esas condiciones se da la igualdad en todos los puntos donde f es continua.

Proposición 7.2.30 Sea f una función de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}$, 2π–periódica. Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente hacia f en $\mathbb{R}$. Además, se tiene que

$$\widehat{f'}\,(n) = in\widehat{f}(n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in \mathscr{C}_p([-\pi,\pi])$, ¿su serie de Fourier converge hacia f en todo punto de $\mathbb{R}$? En general la respuesta es negativa como se demuestra en el siguiente teorema que puede verse, por ejemplo, en [15, p.114].

Teorema 7.2.31 Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un conjunto E_x contenido en $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi])$, que es un G_δ denso en $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi])$, tal que

$$\sup\{|s_n(f,x)| : n \in \mathbb{N}\} = \infty \quad \text{para cada } f \in E_x.$$

En particular, para cada $f \in E_x$ su serie de Fourier no converge en x.

Observación 7.2.32 Recordemos que $e^{ikx} = \cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)$. Este hecho nos permite escribir la serie de Fourier de una función $f \in L^2([-\pi,\pi])$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,x} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \big(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)\big) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \big(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)\big) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \big(\cos(kx) - i\operatorname{sen}(kx)\big) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k + c_{-k})\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} i(c_k - c_{-k})\operatorname{sen}(kx) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\operatorname{sen}(kx)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_k &= c_k + c_{-k} \quad k = 0,1,2,\dots, \\
b_k &= i(c_k - c_{-k}) \quad k = 1,2,\dots,
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad k = 1,2,\dots$$

Así podemos escribir

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\operatorname{sen}(kx)\,,$$

expresión que llamaremos *forma real* de la serie de Fourier de f, donde

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad k = 0,1,2,\ldots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx \quad k = 1,2,\ldots. \end{aligned}$$

La mayor parte de los resultados que hemos visto hasta ahora se pueden enunciar sin dificultad en terminos de la forma real de la serie de Fourier. Por ejemplo, la igualdad de Parseval sería

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right).$$

7.3. Ejercicios

Ejercicio 170 Sean E y F espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y T una aplicación lineal de E en F. Probar que son equivalentes los enunciados siguientes:

a) T es compacta.

b) Existen $a \in E$ y $r > 0$ tales que el conjunto $T(\{x \in E / \|x - a\| = r\})$ es un conjunto relativamente compacto de F.

⇨ **Ejercicio 171** Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$ y $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E'. Se supone que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ converge absolutamente en E'. Sea T la aplicación de E en $(\ell^1, \|\ \|_1)$ definida por

$$T(x) = \{a_n\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

1. Pruébese que T está bien definida.

2. Pruébese que T es un operador compacto.

Ejercicio 172 Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$, infinito dimensional y separable, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal completo y $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de escalares.

1. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n$ converge en H para cada $x \in H$.

2. Sea $T\colon H \to H$ dada por
$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in H.$$
Demostrar que el operador T es lineal y continuo y que $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$.

3. Probar que T es compacto si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

4. Determinar el operador TT^* y comprobar que $\|TT^*\| = \|T\|^2$.

5. Determinar $\sigma_p(T)$.

Nota: *El operador T considerado aquí ya ha aparecido en el ejercicio 163 (especialmente en su último apartado), pues es precisamente el único operador lineal y continuo de H en H tal que $T(e_n) = \lambda_n e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Ejercicio 173 Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de elementos de $\mathbb{K}$ y p un elemento de $[1, \infty]$. Se define la aplicación T de ℓ^p en ℓ^p por

$$T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

1. Demostrar que son equivalentes los enunciados siguientes:

   a) El operador T es compacto.

   b) La sucesión numérica $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

2. Sean $A = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ y λ un elemento de $\mathbb{K}$ tal que $\lambda \notin \overline{A}$ (adherencia de A en $\mathbb{K}$). Probar que la aplicación T_λ de ℓ^p en ℓ^p definida por

$$T_\lambda(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{(a_n - \lambda)x_n\}_{n=1}^{\infty},$$

   es lineal, continua y biyectiva.

3. Demostrar que la aplicación T_λ^{-1} es un elemento de $\mathscr{L}(\ell^p)$. Determinar $\left\|T_\lambda^{-1}\right\|$.

Nota: *Véase el ejercicio 37.*

⇨ **Ejercicio 174** Sean E, F, G espacios normados sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, $T \in \mathscr{L}(E, F)$ y $S \in \mathscr{L}(F, G)$. Probar que si T o S es compacto, también lo es $S \circ T$.

⇨ **Ejercicio 175** Sea $p \in [0, \infty]$. Se consideran en ℓ^p los operadores R y L, desplazamiento a la derecha y a la izquierda respectivamente, definidos en el ejercicio 38 por

$$R(\boldsymbol{x}) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$$
$$L(\boldsymbol{x}) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots), \quad \boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$$

Estudiar la compacidad de R y L.

Ejercicio 176 Sea E un espacio de Banach. Se supone que existe una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{L}(E)$ verificando:

a) Para cada $n = 1, 2, \ldots$, T_n es un operador de rango finito.

b) Para cada $x \in E$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - x\| = 0.$$

Sea T un operador compacto de $\mathscr{L}(E)$. Demostrar que la sucesión $\{T_n \circ T\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia T en el espacio $\mathscr{L}(E)$. Deducir que todo operador compacto es límite en $\mathscr{L}(E)$ de una sucesión de operadores de rango finito.

Ejercicio 177 Dar ejemplos de espacios de Banach para los que exista una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{L}(E)$ verificando a) y b) del problema anterior.

Ejercicio 178 Sean E un espacio de Banach y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores compactos de E que converge hacia el operador T en el espacio $\mathscr{L}(E)$. Si A es un conjunto acotado de E probar que el conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(A)$$

es relativamente compacto en E.

Ejercicio 179 Sean E y F espacios de Banach y sea $T\colon E \to F$ un operador compacto. Demostrar que $\mathrm{Rang}(T)$ es separable.

Ejercicio 180 Sean E y F dos espacios de Banach y M un subespacio vectorial de E denso en E.

Si T es un operador compacto de M en F, probar que existe un único operador compacto S de E en F que prolonga a T.

Ejercicio 181 Sean E y F dos espacios normados sobre $\mathbb{K}$, y $T : E \to F$ un operador compacto.

1. Si G es un subespacio vectorial de E, demuéstrese que $T_{|G} : G \to \overline{T(G)}$ es un operador compacto.

2. Pruébese con un ejemplo que $T : E \to T(E)$ no es, necesariamente, un operador compacto.

Ejercicio 182 Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Si T es una isometría lineal de E en E (en general no biyectiva), entonces T no es un operador compacto.

Ejercicio 183 Sean E un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ de dimensión algebraica no finita y P un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ tal que $P(0) \neq 0$. Si $T \in \mathscr{L}(E)$ y $P(T) = 0$, probar que T no es compacto.

Ejercicio 184 Sean E un espacio de Banach y T un elemento de $\mathscr{L}(E)$ tal que $T^2 = T$. Demostrar que son equivalentes los enunciados siguientes:

a) T es compacto.

b) Rang(T) es de dimensión finita.

Ejercicio 185 Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathscr{L}(H)$ y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H. Se supone que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$$

es convergente. Probar que T es compacto.

***Nota**: Los operadores que verifican la hipótesis del enunciado se denominan* operadores de Hilbert-Schmidt *(véase [10, p.507]).*

Ejercicio 186 **Proposición 7.3.1** Sea $T : H_1 \to H_2$ una aplicación lineal entre los espacios prehilbertianos H_1 y H_2. Son equivalentes:

i) T es una isometría.

ii) Para todos $x, y \in H_1$ se tiene que $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, es decir, T *conserva el producto interno.*

Ejercicio 187 Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathscr{L}(H)$. Probar que existen dos únicos operadores autoadjuntos B y C tales que

$$T = B + iC.$$

Ejercicio 188 Sean H un espacio de Hilbert. Un operador $T \in \mathscr{L}(H)$ es *positivo* si es autoadjunto y

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H.$$

1. Si $T \in \mathscr{L}(H)$ es positivo, probar que
$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq \langle Tx, x\rangle \langle Ty, y\rangle, \quad x, y \in H.$$

2. Si $T \in \mathscr{L}(H)$ es positivo, probar que
$$\|Tx\|^2 \leq \|T\| \langle Tx, x\rangle, \quad x \in H.$$

3. Si $T \in \mathscr{L}(H)$ es positivo, probar que $\langle Tx, x\rangle = 0$ si, y sólo si $Tx = 0$.

4. Si $T \in \mathscr{L}(H)$ probar que T y $-T$ son positivos a la vez si, y sólo si, $T = 0$.

5. Dados dos operadores $S, T \in \mathscr{L}(H)$ autoadjuntos, se dice que $S \leq T$ si $T - S \geq 0$. Probar que la relación $\leq$ así definida es una relación de orden (parcial) en el espacio de los operadores de H autoadjuntos.

Ejercicio 189 Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$ autoadjunto.

1. Sea $x \in H$, con $Tx \neq 0$. Probar que $T^n(x) \neq 0$ para cada $n \geq 0$.

2. Sea $x \in H$, con $Tx \neq 0$. Probar que para cada número natural $n \geq 1$ se tiene que
$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \leq \frac{\|T^3x\|}{\|T^2x\|} \leq \ldots \leq \frac{\|T^nx\|}{\|T^{n-1}x\|}.$$

3. Deducir que para cada número natural $n \geq 1$, se tiene que $\|T^n\| = \|T\|^n$.

Ejercicio 190 Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $g \in L^\infty(I)$.

1. Si $f \in L^2(I)$, probar que $gf \in L^2(I)$.

2. Sea T_g la aplicación de $L^2(I)$ en $L^2(I)$ definida por
$$T_g(f) = gf.$$
Probar que T_g es lineal y continua. Calcular $\|T_g\|$.

3. Determinar T_g^*.

4. Probar que T_g es autoadjunto si, y sólo si, g es una función real.

5. Pruébese que $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : m(g^{-1}(\lambda)) > 0\}$.

***Nota**: El alumno puede repasar el ejercicio 46.*

Ejercicio 191 Sea $T \in \mathscr{L}(H)$. Probar que:

1. $\text{Ker}(T) = \text{Rang}(T^*)^\perp$.

2. T es inyectiva si, y sólo si, $T^*(H)$ es denso.

3. $\text{Ker}(T)^\perp = \overline{\text{Rang}(T^*)}$.

Ejercicio 192 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$ autoadjunto. Probar que los enunciados siguientes son equivalentes:

a) T es invertible.

b) Existe una constante $M > 0$ tal que $\|Tx\| \geq M\|x\|$ para todo $x \in H$.

c) T es inyectiva y $\text{Rang}(T)$ es un subespacio cerrado.

Ejercicio 193 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$. Un subespacio cerrado F de H se dice que es *invariante* para T si $T(F) \subseteq F$. Demuéstrese que un subespacio cerrado F de H es invariante para T si, y sólo si, $F^{\perp}$ es invariante para T^*.

Ejercicio 194 Sean H un espacio de Hilbert complejo y T una isometría lineal de H en H con $T(H) \neq H$.

1. Probar que existe un elemento $a_0 \in H$ con $\|a_0\| = 1$ y tal que para cada $x \in H$ se tiene que
$$\langle Tx, a_0 \rangle = 0.$$
Para cada número entero $n \geq 1$, se define el vector a_n por
$$a_n = T^n(a_0).$$
2. Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal.
3. Determinar $T^*(a_n)$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$
4. Probar que cada número complejo λ con $|\lambda| < 1$ es autovalor de T^*.

Ejercicio 195 Se considera el espacio de Hilbert complejo ℓ^2 con el producto interno definido de la forma usual. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números complejos.

1. Probar que para cada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ se tiene que la sucesión $\{a_n x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$.

   Se define la aplicación T de ℓ^2 en ℓ^2 por
$$T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_n x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}.$$
2. Probar que T es lineal y continua. Determinar $\|T\|$.
3. Calcular T^*.
4. Dar una condición necesaria y suficiente sobre $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ para que el operador T sea compacto.

⇨ **Ejercicio 196** Sea $\{a_{nk}\}_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ una sucesión doble de números complejos de cuadrado sumable, es decir, tal que
$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} |a_{nk}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < \infty.$$

1. Para cada $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ y cada $n \in \mathbb{N}$, probar que la sucesión $\{a_{nk} x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$. Pongamos $x_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$.
2. Si $x \in \ell^2$ y $x^* = \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, probar que $x^* \in \ell^2$.

3. Demostrar que la aplicación $T\colon \ell^2 \to \ell^2$, definida por $T(x) = x^*$, es lineal y continua.

4. Demostrar que existe una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de aplicaciones lineales continuas de ℓ^2 en ℓ^2, tal que T_n es de rango finito para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia T en $\mathscr{L}(\ell^2)$.

Ejercicio 197 Sean H un espacio de Hilbert, M un subespacio vectorial cerrado de H y P la proyección ortogonal de H sobre M.

1. Determinar P^*.

2. Determinar $\sigma_p(P)$.

3. Dar una condición necesaria y suficiente sobre M para que P sea un operador compacto.

Ejercicio 198 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(H)$.

1. Si T es compacto y B es la bola cerrada unidad en H, demuéstrese que dado $\varepsilon > 0$ existe un subespacio M de H de dimensión finita tal que
$$\operatorname{dist}(Tx, M) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x \in B.$$

2. Demuéstrese que T es compacto en H si, y sólo si, existe una sucesión de operadores de rango finito que converge hacia T en $\mathscr{L}(H)$.

Ejercicio 199 Sea $K \in L^2([a,b] \times [a,b], \mathbb{K})$.

1. Sea $f \in L^2([a,b])$. Demostrar que existe $A \subseteq [a,b]$ de medida nula tal que para cada $x \in [a,b] \setminus A$ existe
$$f^*(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt.$$

2. Demostrar que si $f \in L^2([a,b])$, entonces $f^* \in L^2([a,b])$.

3. Sea $f \in L^2([a,b])$. Si Tf es el elemento de $L^2([a,b])$ clase de equivalencia de la función f^*, demostrar que el operador T de $L^2([a,b])$ en $L^2([a,b])$ así definido es continuo y
$$\|T\| \leq \|K\|_2.$$

4. Demostrar que T es un operador compacto.

Ejercicio 200 Sean a y b números reales con $a < b$ y K una aplicación de $[a,b] \times [a,b]$ en $\mathbb{K}$ de cuadrado integrable (en $[a,b] \times [a,b]$). Se supone que para cada par de elementos x, t de $[a,b]$ se tiene que
$$K(x,t) = \overline{K(t,x)}.$$
Probar que el operador integral T de $L^2([0,1], \mathbb{K})$ en $L^2([0,1], \mathbb{K})$ asociado al núcleo K es autoadjunto.

Ejercicio 201 Sea $K : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$K(x,t) = x + t + 2xt.$$

Se considera el operador T de $L^2([-1,1],\mathbb{C})$ en $L^2([-1,1],\mathbb{C})$ definido por

$$Tf(x) = \int_{-1}^{1} K(x,t)f(t)\,dt.$$

1. Probar que T es autoadjunto.

2. Determinar la dimensión del rango de T.

3. Determinar $\sigma_p(T)$.

4. Calcular $\|T\|$.

5. Resolver en $L^2([-1,1],\mathbb{C})$ la ecuación

$$f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} K(x,t)f(t)\,dt = 1 + 3x.$$

Ejercicio 202 Sea $E = (L^2([0,1],\mathbb{K}), \| \ \|_2)$. Si $f \in E$, se define

$$(Tf)(x) = \int_0^{1-x} f(t)\,dt, \quad x \in [0,1].$$

1. Calcular $\|T\|$.

2. Demostrar que

$$Tf(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(4k+1)\pi}\int_0^1 f(t)\cos\Big(\frac{(4k+1)\pi}{2}\,t\Big)\,dt\cos\Big(\frac{(4k+1)\pi}{2}\,x\Big).$$

⇨ **Ejercicio 203** Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Fijado $t_0 \in \mathbb{R}$ se considera la función

$$g(t) = f(t - t_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Comprobar que $g \in L^1([-\pi,\pi])$ y calcular sus coeficientes de Fourier en función de los de f.

⇨ **Ejercicio 204** Se considera el conjunto $\mathscr{P}_{\mathbb{K}}$ de las funciones $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ del tipo

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k\,\mathrm{sen}(kt)$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$.

1. Demostrar que $\mathscr{P}_{\mathbb{K}}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi],\mathbb{K})$.

2. Demostrar que $\mathscr{P}_{\mathbb{K}}$ es denso en $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi],\mathbb{K})$, cuando en $\mathscr{C}_p([-\pi,\pi],\mathbb{K})$ se considera la norma del superior.

3. Si $1 \leq p < \infty$, probar que $\mathscr{P}_{\mathbb{K}}$ es denso en $L^p([-\pi,\pi],\mathbb{K})$.

   Se considera el conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K}$
$$\mathscr{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{\operatorname{sen}(nt)}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

4. Demostrar que $\mathscr{B}$ es un sistema ortonormal completo del espacio $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{K})$

   Si $f \in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{K})$, se consideran los elementos de $\mathbb{K}$ siguientes
$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad n = 0,1,\dots$$
   y
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)\,dt, \quad n = 1,2,\dots$$
   La serie funcional
$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\operatorname{sen}(nt)),$$
   recibe el nombre de *serie de Fourier de f en el sistema $\mathscr{B}$*. Los elementos del conjunto
$$\{a_0(f), a_1(f), a_2(f), \dots, b_1(f), b_2(f), \dots\}$$
   se llaman los coeficientes de Fourier de f en el sistema $\mathscr{B}$.

5. Sea $f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{K})$. Demostrar que la serie de Fourier de f en el sistema $\mathscr{B}$ converge hacia f en el espacio de Hilbert $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{K})$.

6. Demostrar que
$$\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \quad \text{para cada } f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{K}).$$

7. Si $f \in L^1([-\pi,\pi])$ demostrar que:

   (a) Si f es par ($f(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$), entonces
$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\cos(k\,x)\,dx\,,\ k \geq 0\,, \quad \text{y} \quad b_k(f) = 0\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$
   (b) Si f es impar ($-f(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$), entonces
$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen}(k\,x)\,dx\,,\ k \in \mathbb{N}\,, \quad \text{y} \quad a_k(f) = 0\,,\ k \geq 0\,.$$

Ejercicio 205 Sea $[a,b]$ un intervalo compacto de la recta real. Determinar un sistema ortonormal maximal de $L^2([a,b],\mathbb{K})$.

Ejercicio 206 Sea a un número real. Determinar las series de Fourier de las siguientes funciones definidas en $[-\pi,\pi)$ por:

1. $f(x) = e^{i\,a\,x}\,, \quad a \notin \mathbb{Z}.$
2. $f(x) = \operatorname{sen}(a\,x)\,, \quad a \notin \mathbb{Z}.$
3. $f(x) = \cos(a\,x)\,, \quad a \notin \mathbb{Z}.$
4. $f(x) = \operatorname{Sh}(a\,x)\,, \quad a \neq 0.$
5. $f(x) = \operatorname{Ch}(a\,x)\,, \quad a \neq 0.$

⇨ **Ejercicio 207** Hallar la serie de Fourier de la función $f(x) = \mathbf{1}_{(0,\pi)}$. Deducir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ejercicio 208 Sean f una función 2π-periódica integrable en $[-\pi, \pi]$ y k un número natural.

1. Si f es de clase $\mathscr{C}^k$ en $\mathbb{R}$, probar que los coeficientes de Fourier de f verifican que
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k \widehat{f}(n)|^2 < \infty.$$
2. Supongamos que los coeficientes de Fourier verifican que $|\widehat{f}(n)| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$ para algún $C > 0$ y $\alpha > 1$. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^k$.
3. ¿Cuántas derivadas se puede garantizar que tienen las siguientes funciones?
$$\textbf{a)}\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{int}}{n^{13,2} + 2n^6 - 1}; \quad \textbf{b)}\ f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{2^n}; \quad \textbf{c)}\ f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2^n t)}{2^n}.$$

⇨ **Ejercicio 209** Sean $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$.

1. Probar que la función $t \mapsto f(x-t)g(t)$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ para casi todo $x \in [-\pi, \pi]$.
2. Si escribimos
$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt,$$
probar que $f * g \in L^1([-\pi, \pi])$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
3. Probar que $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 210 Sea $g \in L^\infty([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

1. Probar que para cada $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ se tiene que $gf \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.
2. Sea M la aplicación de $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ en $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ definida por $M(f) = gf$. Probar que M es lineal y continua.

3. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, se considera la función $u_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por
$$u_k(t) = e^{ikt}.$$
Si $k, n \in \mathbb{Z}$, determinar $\widehat{M(e_k)}(n)$.

4. Si $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ y $n \in \mathbb{Z}$, determinar $\widehat{M(f)}(n)$ en función de los coeficientes de Fourier de f y de g.

Ejercicio 211 Se considera la función f definida en $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = x$.

1. Demostrar que su serie de Fourier es
$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(k\,x)\,.$$

2. Deducir de la fórmula de Parseval que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejercicio 212 Sea f la función dada por $f(x) = |x|\,,\ x \in [-\pi, \pi]\,$.

1. Demostrar que la serie de Fourier de f converge hacia f uniformemente en $\mathbb{R}$.

2. A partir del valor de $f(0)$ obtener la suma de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,k+1)^2}$.

3. Demostrar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Ejercicio 213 Sea f la función definida en $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$.

1. Demostrar que la serie de Fourier de f es
$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4\,k^2 - 1} \cos(2\,k\,x)\,.$$

2. Probar que esta serie converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ y deducir que su suma coincide con f en dicho intervalo.

3. Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4\,k^2 - 1)^2}$.

Ejercicio 214 Sean a un número real, con $0 < a < \pi$, y f la función definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-a, a)\,; \\ 0 & \text{si } x \in [-\pi, -a] \cup [a, \pi]\,. \end{cases}$$

1. Calcular la serie de Fourier de f.

2. Deducir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(k\,a)}{k^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}$.

Apéndice A

Espacios métricos.

A.1. Definición y topología en espacios métricos.

Definición A.1.1 Sea X un conjunto no vacío. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una *métrica* o una *distancia* en X si verifica las siguientes propiedades:

D1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.

D2. $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

D3. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

D4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Se dice que el par (X, d) es un *espacio métrico*.

Observación A.1.2 El concepto de métrica permite abordar rigurosamente la idea de proximidad. El ejemplo más sencillo es la distancia euclídea de uso habitual en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

No le será difícil al lector comprender la motivación de los conceptos que definimos bajo este epígrafe a partir de los conocimientos que ya posee sobre funciones definidas en un espacio euclídeo.

Definición A.1.3 Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $x \in X$ y $r > 0$, se definen la *bola abierta* de *centro* x y *radio* r como el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\},$$

y la *bola cerrada* de *centro* x y *radio* r como el conjunto

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Definición A.1.4 Sean (X, d) un espacio métrico y E un subconjunto de X.

- Un punto x de X se dice que es un *punto interior a* E si existe una bola abierta de centro x contenida en E.
- El conjunto de todos los puntos interiores de E se denomina *interior* de E y se representa por $\overset{\circ}{E}$.
- El conjunto E es *abierto* si es vacío o si todos sus puntos son interiores a él.

Es sencillo comprobar que $\overset{\circ}{E} \subset E$, de modo que un conjunto es abierto si, y sólo si, $E = \overset{\circ}{E}$.

Proposición A.1.5 Sea (X, d) un espacio métrico. Se verifican las siguientes propiedades:

i) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total X son abiertos.

ii) La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto (es decir, si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos abiertos, entonces la unión $\underset{i\in I}{\cup} G_i$ es un conjunto abierto).

iii) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto (es decir, dada una familia finita $\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ de conjuntos abiertos, la intersección $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_k$ es un conjunto abierto).

Es decir, si denotamos por τ a la familia de todos los conjuntos abiertos de X, el par (X, τ) es un espacio topológico.

Definición A.1.6 Sean (X, d) un espacio métrico y E un subconjunto de X.

- Un punto x de X se dice que es un *punto adherente* a E si cada bola abierta centrada en x tiene intersección no vacía con E.
- El conjunto de todos los puntos adherentes de E se denomina *adherencia* de E y se representa por $\overline{E}$.
- Un conjunto E de X es *cerrado* si todos sus puntos adherentes están en E.

Es sencillo comprobar que $E \subset \overline{E}$, de modo que E es cerrado si, y sólo si, $E = \overline{E}$.

Proposición A.1.7 Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto E de X es abierto (resp. cerrado) si, y sólo si, su complementario $X \setminus E$ es cerrado (resp. abierto).

Proposición A.1.8 Sea (X, d) un espacio métrico. Se verifican las siguientes propiedades:

i) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total X son cerrados.

ii) La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado (es decir, si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos cerrados, entonces la intersección $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ es un conjunto cerrado).

iii) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado (es decir, si $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ es una familia finita de conjuntos cerrados, entonces la unión $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ es un conjunto cerrado).

Definición A.1.9 Sean (X, d) un espacio métrico y E un subconjunto de X.

- Un punto x de X se dice que es un *punto de acumulación* de E si para cada bola abierta $B(x, r)$ centrada en x, la intersección $B(x, r) \cap E$ contiene al menos un punto de E distinto de x.
- El conjunto de todos los puntos de acumulación se denomina *derivado* de E y se representa por E'.
- Un punto x de E se dice que es un *punto aislado* de E si no es un punto de acumulación de E.

Proposición A.1.10 Sean (X, d) un espacio métrico y E un subconjunto de X. Entonces:

i) $\overline{E} = E \cup E'$.

ii) E es cerrado si, y sólo si $E' \subset E$.

iii) Si $x \in X$ es un punto de acumulación de E, entonces cualquier bola abierta $B(x, r)$ de centro x contiene infinitos puntos de E.

iv) Si x es un punto aislado de E, existe una bola abierta $B(x, r)$ de centro x tal que

$$B(x, r) \cap E = \{x\}\,.$$

Definición A.1.11 Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto E de X es *acotado* si está contenido en una bola, es decir, si existen un punto $a \in X$ y un número real $r > 0$ tales que $E \subseteq B(a, r)$.

Definición A.1.12 Sea X un conjunto no vacío. Una *sucesión de elementos de* X es una aplicación del conjunto de los números naturales en X,

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{N} \;&\to\; X \\ n \;&\mapsto\; \sigma(n)\,. \end{aligned}$$

Habitualmente una sucesión se representa de forma más compacta por el símbolo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $x_n = \sigma(n)$ se denomina *término n-ésimo* de la sucesión.

El conjunto imagen de la aplicación σ, es decir $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, se denomina *conjunto de términos* o *rango* de la sucesión.

Definición A.1.13 Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X se dice que es *convergente* si existe un elemento ℓ de X verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene

$$d(a_n, \ell) < \varepsilon."$$

El número ℓ se denomina *límite* de la sucesión, y se dice que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge hacia* ℓ y se escribe

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

Proposición A.1.14 Sea (X, d) un espacio métrico. Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, su límite es único.

Proposición A.1.15 Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $a \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión de elementos de A que converge hacia a.

2. $a \in A'$ si, y sólo si, existe una sucesión de elementos de A y distintos de a que converge hacia a.

Definición A.1.16 Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X se dice que está *acotada* si el conjunto de sus términos está acotado.

Proposición A.1.17 Sea (X, d) un espacio métrico. Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces está acotada.

Definición A.1.18 Sean (X, d) un espacio métrico y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X. Una *subsucesión* de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la composición de una sucesión estrictamente creciente de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ con la sucesión dada,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} & \to & X \\ k & \mapsto & n_k & \mapsto & a_{n_k}, \end{array}$$

y se denota por $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Observemos que siempre se verifica que $k \leq n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposición A.1.19 Sea (X, d) un espacio métrico. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente de elementos de X y su límite es ℓ, entonces cualquier subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es ℓ.

A.2. Axiomas de numerabilidad y separabilidad.

Definición A.2.1 Sean X un espacio topológico.

- Se dice que X verifica el *primer axioma de numerabilidad* si todo punto admite un sistema fundamental de entornos numerable.
- Se dice que X verifica el *segundo axioma de numerabilidad* si admite una base de abiertos numerable (es decir, existe una familia numerable de abiertos de modo que todo abierto de X se puede escribir como unión de abiertos de la familia).
- Se dice que X es *separable* si admite un subconjunto denso y numerable.

La verificación del segundo axioma de numerabilidad implica la del primero y la separabilidad, pero hay espacios topológicos separables que verifican el primer axioma de numerabilidad pero no el segundo. Sin embargo, para espacios métricos se tiene el siguiente resultado.

Proposición A.2.2 Sea (X, d) un espacio métrico. X verifica el segundo axioma de numerabilidad si, y sólo si, X es separable.

Un subconjunto abierto de un espacio topológico separable X es separable, pero un subconjunto arbitrario $S \subset X$ puede no serlo. La situación mejora en el caso métrico.

Proposición A.2.3 Sea (X, d) un espacio métrico separable. Cualquier subconjunto S de X es separable.

A.3. Compacidad en espacios métricos.

En el cálculo diferencial juegan un papel destacado los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. El alumno habrá utilizado esta propiedad, quizá sin ser consciente de ello, en el cálculo de una variable real; por ejemplo al aplicar el hecho de que de toda sucesión acotada de números reales puede extraerse una subsucesión convergente. Esto puede servir para la introducción de esta cuestión.

Definición A.3.1 Sean (X, d) un espacio métrico.

- Dado un subconjunto A de X, un *recubrimiento abierto* de A es una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $A \subset \cup_{i\in I} U_i$. Se dice que $\{U_i\}_{i\in I}$ admite un *subrecubrimiento finito* si existe $J \subset I$ finito tal que $A \subset \cup_{i\in J} U_i$.
- Un subconjunto K de X se dice que es *compacto* si de todo recubrimiento de K formado por conjuntos abiertos es posible extraer un subrecubrimiento finito.

Esta definición no siempre es cómoda de manejar. El teorema que se enuncia a continuación proporciona varios criterios de compacidad:

Teorema A.3.2 Sea K un conjunto de un espacio métrico (E, d). Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. K es compacto.
2. Todo subconjunto infinito de K tiene un punto de acumulación en K.
3. Toda sucesión de elementos de K tiene una subsucesión convergente en K.
4. Para cualquier familia de conjuntos cerrados de K, con intersección vacía, existe una subfamilia finita cuya intersección es también vacía.

Teorema A.3.3 Sea (X, d) un espacio métrico. Si E es un subconjunto compacto de X, entonces E es cerrado y acotado. El recíproco, en general, no es cierto.

A.4. Límites y continuidad en espacios métricos.

Definición A.4.1 Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos. Sean a un punto de acumulación de X y f una aplicación de X en Y. Se dice que $\ell \in Y$ es el *límite* de la aplicación f en el punto a si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho(f(x) - f(a)) < \varepsilon,$$

para cada $x \in X$, con $0 < d(x, a) < \delta$.

En este caso, se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \text{o} \qquad f(x) \to \ell \text{ cuando } x \to a\,.$$

Proposición A.4.2 Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos. Sean a un punto de acumulación de X y f una aplicación de X en Y. Si la aplicación f tiene límite en el punto a, éste es único.

Teorema A.4.3 (Criterio secuencial) Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos. Sean a un punto de acumulación de X y f una aplicación de X en Y. Son equivalentes:

1. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
2. Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X con $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

En caso de que se cumpla una de las afirmaciones siguientes, para cada sucesión como en 2. se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Definición A.4.4 Sean (X,d) e (Y,ρ) dos espacios métricos. Sean a un punto de X y f una aplicación de X en Y. Se dice que f es *continua en* a si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ con $d(x,a) < \delta$ se tiene que

$$\rho(f(x) - f(a)) < \varepsilon.$$

Si f es continua en todos los puntos de A, se dice que f es *continua en* X.

Proposición A.4.5 Sean (X,d) e (Y,ρ) dos espacios métricos. Sean a un punto de X y f una aplicación de X en Y.

i) Si a es un punto aislado de X, entonces f es continua en a.

ii) Si a es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en a si, y sólo si, tiene límite en a y verifica que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Teorema A.4.6 (Criterio secuencial) Sean (X,d) e (Y,ρ) dos espacios métricos. Sean a un punto de X y f una aplicación de X en Y. Son equivalentes:

i) f es continua en a.

ii) Para cada sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos de X con $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, la sucesión $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia $f(a)$.

Teorema A.4.7 Sean X, Y y Z tres espacios métricos. Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ aplicaciones tales que f es continua en $a \in X$ y g es continua en $f(a) \in Y$. Entonces la aplicación compuesta $g \circ f : X \to Z$ es continua en $a \in A$.

Proposición A.4.8 Sean (X,d) e (Y,ρ) dos espacios métricos y f una aplicación de X en Y. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) La aplicación f es continua en X.

ii) Para cada conjunto abierto U de Y se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto de X.

iii) Para cada conjunto cerrado F de Y se tiene que $f^{-1}(Y)$ es cerrado de X.

Ejemplo A.4.9 Sean (X, d) un espacio métrico y f una función real continua en X. Para cualquier número real α los conjuntos

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \quad \text{y} \quad \{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

son abiertos en X; y los conjuntos

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \quad \text{y} \quad \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

son cerrados en X.

Teorema A.4.10 (de Weierstrass) Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos y f una aplicación de X en Y. Si K es un subconjunto compacto de X, entonces $f(K)$ es compacto en Y.

Terminamos recordando el concepto de isometría y la continuidad de tales aplicaciones.

Definición A.4.11 Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos. Se dice que la aplicación $f : E \to F$ es una *isometría* si

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y) \qquad \text{para todos } x, y \in E.$$

El *conjunto imagen* de una aplicación $f : E \to F$ es $f(E) := \{f(x) : x \in E\}$.

Proposición A.4.12 Toda isometría $f : E \to F$ es continua en E, inyectiva, y su inversa $f^{-1} : f(E) \to E$ es continua en $f(E)$ (que es un espacio métrico con la distancia inducida por la de F).

Apéndice B

Sumabilidad.

B.1. Familias sumables en un espacio normado.

Definición B.1.1 Sea E un espacio normado. Una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de E se dice que es *sumable* hacia $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $J_0 \subseteq I$ finito tal que $\| \sum_{i\in J} x_i - x\| < \varepsilon$ para cualquier conjunto J finito, con $J_0 \subseteq J \subseteq I$.

Llamaremos al vector x la *suma* de la familia sumable y escribiremos $x = \sum_{i\in I} x_i$.

Si $I = \emptyset$, por convenio ponemos $\sum_{i\in\emptyset} x_i = 0$.

***Nota**: Una familia sumable es un caso particular de una* red *convergente, la dada por las sumas parciales finitas* $\{\sum_{i\in J} x_i\}_{J\subseteq I, J \mathit{finito}}$.

Proposición B.1.2 Sea E un espacio normado. La suma de una familia sumable de elementos de E es única.

Proposición B.1.3 Sea E un espacio normado. Si $\{x_i\}_{i\in I}$ e $\{y_i\}_{i\in I}$ son familias sumables de elementos de E hacia x e y respectivamente, y λ y μ son escalares, entonces la familia $\{\lambda x_i + \mu y_i\}_{i\in I}$ es sumable hacia $\lambda x + \mu y$.

Proposición B.1.4 Sea E un espacio normado. Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familias sumable de elementos de E. Entonces las sumas finitas de elementos de la familia y, en particular, los elementos de la familia, están acotados.

Proposición B.1.5 Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y T una aplicación lineal y continua de E en F. Si $\{x_i\}_{i\in I}$ es una familia sumable de elementos de E, entonces $\{T(x_i)\}_{i\in I}$ es sumable en F y además

$$\sum_{i\in I} T(x_i) = T(\sum_{i\in I} x_i).$$

Proposición B.1.6 Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de números reales no negativos. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es sumable.

2. El conjunto de las sumas finitas de elementos de la familia es acotado, es decir,

$$\sup\left\{\sum_{i\in J}\alpha_i : J\subset I,\ J \text{ finito}\right\} < \infty.$$

En ese caso, se tiene que

$$\sum_{i\in I}\alpha_i = \sup\left\{\sum_{i\in J}\alpha_i : J\subset I,\ J \text{ finito}\right\}. \tag{B.1}$$

Proposición B.1.7 Sea $\{z_j\}_{j\in I}$ una familia de números complejos. Si $x_j = \mathrm{Re}(z_j)$ e $y_j = \mathrm{Im}(z_j)$ para cada $j\in I$, entonces $\{z_j\}_{j\in I}$ es sumable si, y sólo si, $\{x_j\}_{j\in I}$ e $\{y_j\}_{j\in I}$ son sumables.

B.2. Condición de Cauchy para la sumabilidad.

Definición B.2.1 Una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de un espacio normado E se dice que verifica la *condición de Cauchy para la sumabilidad* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $J_0 \subseteq I$ finito tal que

$$\|\sum_{i\in J} x_i\| < \varepsilon \quad \text{si } J\subseteq I,\ J \text{ finito y } J\cap J_0 = \emptyset.$$

Teorema B.2.2 Sea E un espacio de Banach. Una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de E es sumable si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy para la sumabilidad.

Corolario B.2.3 Sea E un espacio de Banach y $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia sumable de elementos de E. Si $J\subseteq I$, la familia $\{x_i\}_{i\in J}$ es sumable.

Nota: *Obsérvese que si la familia $\{x_i\}_{i\in I}$ verifica la condición de Cauchy (en particular si es sumable) también verifica la siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $J\subseteq I$ finito tal que si $i\notin J$ se tiene que $\|x_i\| < \varepsilon$.*

Definición B.2.4 Una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos del espacio normado E se dice que es *absolutamente sumable* si la familia de números reales $\{\|x_i\|\}_{i\in I}$ es sumable.

Proposición B.2.5 Sea E un espacio normado. Son equivalentes:

(a) E es de Banach.

(b) Toda familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de E absolutamente sumable es sumable.

Si una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ es absolutamente sumable, se tiene que $\|\sum_{i\in I} x_i\| \leq \sum_{i\in I} \|x_i\|$.

Teorema B.2.6 Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de números reales o complejos. Son equivalentes:

1. $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es sumable.

2. Existe $M > 0$ tal que $|\sum_{i\in J} \alpha_i| \leq M$ para cada $J \subseteq I$ finito.

3. $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es absolutamente sumable.

***Nota**: Aunque no lo probaremos, la equivalencia entre sumabilidad y sumabilidad absoluta se verifica precisamente en los espacios normados de dimensión finita. El resultado anterior permite deducir inmediatamente que la finitud de la dimensión es suficiente, siendo más laborioso obtener el recíproco.*

Proposición B.2.7 Sean E y F dos espacios de Banach sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones lineales continuas de E en F. Se supone que para cada $x \in E$ la familia $\{T_i(x)\}_{x\in I}$ es sumable. Entonces, el operador T definido para cada $x \in E$ por $T(x) = \sum_{i\in I} T_i(x)$ es lineal y continuo.

B.3. Fórmula de sumación por paquetes.

Al igual que ocurre con las series, hay que tener cuidado si se quieren agrupar términos dentro de una familia sumable. Los siguientes resultados dan condiciones en las que esto se puede hacer.

Teorema B.3.1 Sean E un espacio de Banach, $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia sumable de elementos de E e $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una partición de I. Si $s_\lambda = \sum_{i\in I_\lambda} x_i$, la familia $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es sumable y

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}(\sum_{i\in I_\lambda} x_i) = \sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda.$$

Teorema B.3.2 Sean E un espacio de Banach, $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de E e $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una partición finita de I. Si la familia $\{x_i\}_{i\in I_\lambda}$ es sumable hacia s_λ, entonces la familia $\{x_i\}_{i\in I}$ es sumable hacia $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$.

Teorema B.3.3 Sean $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia de números reales positivos e $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una partición de I. Si la familia $\{x_i\}_{i\in I_\lambda}$ es sumable hacia s_λ y la familia $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es sumable hacia x, entonces la familia $\{x_i\}_{i\in I}$ es sumable hacia x.

B.4. Sumabilidad de familias numerables.

Incluso aunque el conjunto de índices I sea numerable, el concepto de familia sumable y de serie convergente es diferente. En una serie el conjunto de índices está ordenado y esta ordenación se tiene en cuenta al definir las sumas parciales. En una familia sumable está claro que el orden de los sumandos no juega ningún papel.

Proposición B.4.1 Sean E un espacio normado y $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia numerable de elementos de E. Son equivalentes:

1. $\{x_i\}_{i\in I}$ es absolutamente sumable.

2. Para cada biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to I$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ es absolutamente convergente.

3. Existe una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to I$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ es absolutamente convergente.

Proposición B.4.2 Sean E un espacio de Banach y $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia numerable de elementos de E. Son equivalentes:

1. $\{x_i\}_{i\in I}$ es sumable.

2. Para cada biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to I$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ es convergente.

Nota*: Aunque para series numéricas la convergencia incondicional y la convergencia absoluta son equivalentes, esto no es cierto en general para espacios normados.*

Proposición B.4.3 Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia sumable de elementos de un espacio normado E. Entonces $x_i = 0$ salvo para un conjunto numerable a lo más de índices.

Bibliografía

[1] A. Aizpuru, *Apuntes incompletos de Análisis Funcional* (Servicio de publicaciones de la UCA, 2009).

[2] T. Apostol, *Análisis Matemático* (Reverté, 1981).

[3] G. Bachmann - L. Narici, *Análisis Funcional* (Tecnos, 1981).

[4] H. Brézis, *Análisis Funcional* (Alianza Universidad Textos, 1984).

[5] B. Cascales - J. M. Mira - J. Orihuela - M. Raja, *Análisis Funcional* (Ediciones Electolibris, 2012).

[6] G. Choquet, *Topología* (Toray-Masson, 1971).

[7] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis* (Springer, 1990).

[8] J. Dieudonné, *Fundamentos de Análisis Moderno. Tomo I* (Reverté, 1974).

[9] A. El Kacimi Alaoui, *Introducción al Análisis Funcional* (Reverté, 1994).

[10] B.V. Limaye, *Functional Analysis* (Wiley, 1981).

[11] Y. Katznelson, *An introduction to Harmonic Analysis* (Dover, 1976).

[12] A. Kirillov - A. Gvishiani, *Theorems and Problems in Functional Analysis* (Springer, 1982).

[13] J. D. Pryce, *Basic methods of linear Functional Analysis* (Hutchinson University Library, 1973).

[14] J. Rojo, *Álgebra Lineal* (McGraw-Hill, 2001).

[15] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo* (McGraw-Hill. Madrid, 1990).

[16] W. Rudin, *Functional Analysis* (McGraw-Hill. New York, 1973).

[17] K. R. Stromberg, *Introduction to Real Classical Analysis* (Wadsworth. California, 1981).

[18] A. Tocino García - M. Maldonado Cordero, *Problemas resueltos de Análisis Funcional* (Librería Cervantes. Salamanca, 2003).

[19] V. Trenoguine - B. Pisarievski - T. Sóboleva, *Problemas y Ejercicios de Análisis Funcional* (Mir, 1987).

[20] A. Vera López - P. Alegría Ezquerra, *Un curso de Análisis Funcional* (AVL, 1997).