Sumabilidad de la solución formal de un problema de perturbación singular

Javier Sanz Gil[1]

3 de abril de 2003

Resumen

La teoría de multisumabilidad de series de potencias se ha mostrado fructífera para la construcción de soluciones analíticas de (sistemas de) ecuaciones diferenciales ordinarias meromorfas en puntos singulares irregulares, a partir de soluciones formales que, de hecho, representan asintóticamente a aquéllas. Con la intención de extender este tipo de resultados a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, han aparecido recientemente dos nociones de sumabilidad para series de potencias en varias variables, junto con algunas aplicaciones al estudio de soluciones formales de ciertas clases de problemas. En esta comunicación se utilizará la segunda de estas nociones para el estudio de la sumabilidad de la solución formal de un problema de perturbación singular ya considerado por J. Ecalle y W. Balser.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias meromorfas en un punto singular irregular (que supondremos situado en el origen del plano complejo o de la superficie de Riemann del logaritmo) pueden presentar soluciones formales en forma de serie de potencias que, en general, serán divergentes (es decir, con radio de convergencia igual a cero). No obstante, estas soluciones no están desprovistas de significado, pues, fijado un sector con vértice en el origen y de amplitud convenientemente restringida, es posible probar la existencia de soluciones de la ecuación analíticas en el mismo y cuyo desarrollo asintótico en el vértice es precisamente la serie de potencias formal. La teoría de k-sumabilidad en una variable fue desarrollada por J. P. Ramis [12, 13] con el propósito de proporcionar una técnica que permitiera la construcción efectiva de estas soluciones analíticas a partir de las soluciones formales, al menos bajo determinadas condiciones. Los principales ingredientes que forman parte de esta teoría son los desarrollos asintóticos de tipo Gevrey (caracterizados por limitar de una forma específica el crecimiento de los coeficientes de las series o el de las derivadas de las funciones involucradas) y las tranformadas, tanto formales como analíticas, de Laplace y Borel.

La introducción por J. Ecalle [7, 8] del concepto de multisumabilidad, consistente, por decirlo brevemente, en una "sumabilidad recurrente" (en un número finito de pasos), permitió probar a B. L. J. Braaksma [6] que toda solución en forma de potencias formal de un sistema meromorfo, lineal o no, de ecuaciones diferenciales ordinarias en un punto singular irregular es multisumable. Como referencia para todo lo relativo a estos resultados, podemos citar los excelentes libros de W. Balser [1, 2].

En cuanto al estudio de soluciones formales en el caso de ecuaciones en derivadas parciales, en la última década han aparecido numerosos resultados que prueban el carácter Gevrey de dichas series; más aún, en trabajos muy recientes se ha probado la (multi)sumabilidad uniforme de dichas soluciones para diferentes tipos de ecuaciones, considerando todas las variables salvo una como parámetros, y sumando la serie resultante, de una variable y con coeficientes en un espacio funcional adecuado, uniformemente respecto de los parámetros (en este sentido, véase el trabajo [4] y las referencias que allí se citan). Sin embargo, como han señalado Y. Sibuya [15] y W. Balser [2, Capítulo 13], parece deseable introducir un método que trate todas las variables por igual. El último autor mencionado y el autor del presente trabajo han propuesto, hasta donde sabemos, las primeras dos técnicas (distintas) para abordar este asunto (ver [3, 5] y [14]). La segunda de ellas se basa en la consideración de desarrollos asintóticos fuertes de Gevrey (introducidos por H. Majima [10, 11] e Y. Haraoka [9]), que gozan de las propiedades de estabilidad clásicas en la teoría unidimensional de H. Poincaré (en particular, con respecto de la derivación), y en la introducción de transformadas de Laplace y Borel multidimensionales que actúan adecuadamente sobre las funciones con desarrollo fuerte. El objetivo de esta presentación es indicar cómo se puede aplicar esta herramienta al estudio de la solución formal de un problema de perturbación singular que ha sido estudiado en [7, 8, 3].

Notación

El conjunto de los números naturales es $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Dados $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in (0, \infty)^2$, $A = (A_1, A_2) \in (0, \infty)^2$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2) \in \mathcal{R}^2$ y $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, ponemos

$$\Gamma(1 + \boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{k}) := \Gamma(1 + \alpha_1/k_1)\Gamma(1 + \alpha_2/k_2), \quad A^{\boldsymbol{\alpha}} := A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2}, \quad |\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}} := |z_1|^{\alpha_1} |z_2|^{\alpha_2},$$

donde las Γ'^s a la derecha de la primera igualdad denotan la función Gamma de Euler.

Para $j = 1, 2$, consideremos un *sector (abierto)* (en la superficie de Riemann del logaritmo $\mathcal{R}$) con vértice en el origen,

$$S_j = \angle(d_j, \theta_j, \rho_j) = \{\, z = re^{i\varphi} : 0 < r < \rho_j,\ |\varphi - d_j| < \theta_j/2 \,\},$$

donde $d_j \in \mathbb{R}$, $\theta_j > 0$ y $\rho_j \in (0, \infty]$ son la *dirección bisectriz*, la *amplitud* y el *radio* de S_j, respectivamente. El *polisector* $\prod_{j=1}^{2} S_j \subset \mathcal{R}^2$ se denotará por $S = \angle(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho})$, donde $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ y $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2)$. En el caso de que $\rho_j = +\infty$ para $j = 1, 2$, escribimos $S = \angle(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\theta})$ y decimos que S es *no acotado*.

Un polisector $T = \prod_{j=1}^{2} \angle(d'_j, \theta'_j, \rho'_j)$ en $\mathcal{R}^2$ es un *subpolisector propio y acotado* de $S = \angle(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho})$, denotado por $T \ll S$, si para $j = 1, 2$ se tiene que $\rho'_j < \rho_j$ (de modo que $\rho'_j < +\infty$) y

$$[d'_j - \theta'_j/2, d'_j + \theta'_j/2] \subset (d_j - \theta_j/2, d_j + \theta_j/2). \qquad (1)$$

Si $S = \angle(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\theta})$ es no acotado y $T = \angle(\boldsymbol{d}', \boldsymbol{\theta}')$, no acotado, es tal que se tiene (1), decimos que T es un *subpolisector propio no acotado* de S, representado por $T \prec S$.

Sumabilidad de series de potencias en dos variables

En primer lugar, recopilamos las definiciones y resultados básicos relativos a los desarrollos asintóticos fuertes de Gevrey en el sentido de H. Majima. Sean $\boldsymbol{k} \in (0,\infty)^2$ y S un polisector en $\mathcal{R}^2$.

Definición 1 Una función holomorfa $f\colon S = S_1 \times S_2 \subset \mathcal{R}^2 \to \mathbb{C}$ admite *desarrollo asintótico fuerte de Gevrey de orden* $\boldsymbol{k}$ ($f \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(S)$) si existe una familia $\mathrm{TA}(f) = \{h_m, g_n, a_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$, donde h_m (resp. g_n) es una función holomorfa de S_1 (resp. S_2) en $\mathbb{C}$ y $a_{nm} \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}$, tal que, si se definen las *funciones aproximantes de orden* $\boldsymbol{\alpha} = (n,m) \in \mathbb{N}^2$ mediante

$$\mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{z}) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j(z_2) z_1^j + \sum_{\ell=0}^{m-1} h_\ell(z_1) z_2^\ell - \sum_{j,\ell=0}^{j=n-1,\,\ell=m-1} a_{j\ell} z_1^j z_2^\ell,$$

entonces para todo $T \ll S$, existen $C_T > 0$ y $A_T \in (0,\infty)^2$ de modo que para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^2$,

$$|f(\boldsymbol{z}) - \mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{z})| \leq C_T\,\Gamma(1 + \boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{k}) A_T^{\boldsymbol{\alpha}} |\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \boldsymbol{z} \in T.$$

$\mathrm{FA}(f) := \displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{nm} z_1^n z_2^m$ se llama la *serie de desarrollo asintótico fuerte* de f.

Siempre que $f \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(S)$ se tiene que $\mathrm{FA}(f)$ es *de Gevrey de orden* $\boldsymbol{k}$ ($\mathrm{FA}(f) \in \mathbb{C}[\![\boldsymbol{z}]\!]_{\boldsymbol{k}}$), es decir, existen $C > 0$ y $A \in (0,\infty)^2$ tales que para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^2$, $|a_{\boldsymbol{\alpha}}| \leq C\,\Gamma(1+\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{k}) A^{\boldsymbol{\alpha}}$.

$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(S)$ y $\mathbb{C}[\![\boldsymbol{z}]\!]_{\boldsymbol{k}}$ son álgebras diferenciales (esto es, espacios vectoriales estables por multiplicación y derivación), y la aplicación $\mathrm{FA}\colon \mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(S) \to \mathbb{C}[\![\boldsymbol{z}]\!]_{\boldsymbol{k}}$ es un homomorfismo entre ambas.

Proposición 2 (Lema de Watson [14]) *Sea $S = \angle(d_1, \theta_1, \rho_1) \times \angle(d_2, \theta_2, \rho_2)$ un polisector tal que $\theta_j > \pi/k_j$ para $j = 1, 2$. Entonces,* FA *es inyectiva.*

Este resultado es esencial para garantizar la unicidad de la función suma en el siguiente concepto de sumabilidad para series de potencias en dos variables.

Definición 3 Se dice que una serie de potencias $\widehat{f} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^2} a_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}$ es $\boldsymbol{k}$*-sumable en la dirección* $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^2$ si existen un polisector $S = \angle(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho})$, con $\boldsymbol{\theta} > \boldsymbol{\pi}/\boldsymbol{k}$, y una función $f \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(S)$ tal que $\mathrm{FA}(f) = \widehat{f}$.

En este caso, f se llama la $\boldsymbol{k}$*-suma de* $\widehat{f}$ *en la dirección* $\boldsymbol{d}$, denotada por $f = \mathcal{S}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{d}}\widehat{f}$.

Es interesante saber si el proceso de sumación se puede hacer variable a variable (es decir, si se dispone en este contexto de un resultado similar al teorema de Fubini). Para dar una respuesta afirmativa, es necesario tener en cuenta que tanto la teoría de desarrollos asintóticos fuertes como la de k-sumabilidad en una variable son esencialmente válidas cuando se consideran funciones, respectivamente series, a valores, resp. con coeficientes, en un espacio de Banach complejo (no se puede decir lo mismo en el segundo caso si, por ejemplo, los coeficientes se toman en un espacio de Fréchet). Esto justifica el siguiente desarrollo.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach complejo, y tomemos un polisector $S = S_1 \times S_2$ y $B \in (0,\infty)^2$. Aunque $\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(S,E)$ (con el significado esperado) no es un espacio de Banach, podemos considerar su subespacio

$$\mathcal{W}_{\boldsymbol{k},B}(S,E) := \{f\colon S \to E : \|f\|_{\boldsymbol{k},B} := \sup_{\boldsymbol{z}\in S,\, \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^2} \frac{\|D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z})\|}{\boldsymbol{\alpha}!\,\Gamma(1+\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{k})B^{\boldsymbol{\alpha}}} < \infty\}.$$

Lema 4 *$(\mathcal{W}_{\boldsymbol{k},B}(S,E), \|\cdot\|_{\boldsymbol{k},B})$ es un espacio de Banach, y la restricción a cualquier $T \ll S$ de las funciones en $\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(S,E)$ proporciona elementos de $\mathcal{W}_{\boldsymbol{k},B}(T,E)$ para un vector constante adecuado $B = B(T) \in (0,\infty)^2$. Por otra parte, la aplicación*

$$f \in \mathcal{W}_{\boldsymbol{k},B}(S,E) \to f^* \in \mathcal{W}_{k_1,B_1}(S_1, \mathcal{W}_{k_2,B_2}(S_2,E)),$$

definida para cada $z_1 \in S_1$ mediante $f^*(z_1) = f(z_1,\cdot)$, es un isomorfismo.

Todo lo anterior conduce a la definición y resultado siguientes.

Definición 5 Una serie $\widehat{f} = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m$ es *iterativamente $\boldsymbol{k}$-sumable en la dirección $\boldsymbol{d}$* (en un cierto orden, pero esto será irrelevante) si, al escribir

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}_n z_1^n, \qquad \text{donde} \quad \widehat{g}_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} z_2^m,$$

se tiene que:

(i) Cada $\widehat{g}_n$ es k_2-sumable en la dirección d_2, y la suma g_n pertenece a $\mathcal{A}_{k_2}(S_2)$, donde el sector $S_2 = \angle(d_2, \theta_2, \rho_2)$ no depende de n.

(ii) Existen $T_2 = \angle(d_2, \varphi_2, r_2) \ll S_2$, con $\varphi_2 > \pi/k_2$, y $B_2(T_2) > 0$ tales que $g_n \in \mathcal{W}_{k_2,B_2}(T_2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y la serie $\widehat{g} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z_1^n$ (con coeficientes en el espacio de Banach $\mathcal{W}_{k_2,B_2}(T_2)$) es k_1-sumable en la dirección d_1.

Proposición 6 *Una serie $\widehat{f}$ es $\boldsymbol{k}$-sumable en la dirección $\boldsymbol{d}$ si, y sólo si, es iterativamente $\boldsymbol{k}$-sumable en la dirección $\boldsymbol{d}$ (en cualquier orden).*

Un problema de perturbación singular

Consideremos el problema de perturbación singular

$$\varepsilon\, x'(z,\varepsilon) = x(z,\varepsilon) - \hat{f}(z), \tag{2}$$

donde $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ es una serie formal tal que su transformada formal de Laplace de orden 1,

$$\widehat{\mathcal{L}}_1 \hat{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} n! f_n z^n,$$

es k-sumable en la dirección $d \in \mathbb{R}$, con $k \in (1/2, 1)$. Pongamos $\sigma = 1/k - 1 \in (0,1)$.

Es sencillo comprobar que (2) tiene a

$$\hat{x}(z,\varepsilon)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!}f_{n+m}z^n\varepsilon^m$$

como única solución formal en serie de potencias, que además, en virtud de la fórmula de Stirling, es de Gevrey de orden $(k/(1-k),k)=(1/\sigma,1/(\sigma+1))$. Nuestro objetivo es presentar el siguiente resultado.

Proposición 7 *La solución formal* $\hat{x}$ *de* (2) *es* $(1/\sigma,1/(\sigma+1))$*-sumable en la dirección* $(d,d)\in\mathbb{R}^2$.

Demostración: De acuerdo con la Proposición 6, basta probar que la serie es iterativamente sumable. Escribamos

$$\hat{x}(z,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!}f_{n+m}z^n\Big)\varepsilon^m=\sum_{m=0}^{\infty}\hat{f}_m(z)\varepsilon^m.$$

Es inmediato que para cada $m\in\mathbb{N}$, $\hat{f}_m(z)=\hat{f}^{(m)}(z)$. Ahora bien, puesto que $\widehat{\mathcal{L}}_1\hat{f}$ es k-sumable en la dirección d, un resultado estándar [1, Capítulo 3, Lema 2] asegura que $\hat{f}$ es $1/\sigma$-sumable en la dirección d, y además,

$$f:=\mathcal{S}_{1/\sigma,d}\hat{f}=\mathcal{B}_1(\mathcal{S}_{k,d}\widehat{\mathcal{L}}_1\hat{f}),$$

donde $\mathcal{B}_1$ es la transformada de Borel de orden 1. Entonces, existe un sector no acotado $S=\angle(d,\theta)$, con $\pi>\theta>\pi\sigma$, de modo que:

(i) $f\in\mathcal{A}_{1/\sigma}(S)$, y

(ii) f es de crecimiento exponencial a lo sumo 1 en S.

Tomemos $\theta^1\in(\pi\sigma,\theta)$ y los sectores

$$T^1=\angle(d,\theta^1)\prec S\qquad\text{y}\qquad T^2=\angle(d,\theta^1,1)\ll S.$$

Combinando las afirmaciones (i) y (ii) anteriores, se puede probar que existen constantes $C>0$, $B>0$ y $M>0$, que dependen sólo de T^1, de modo que

$$\frac{1}{j!}|f^{(j)}(z)|\le CB^j\Gamma(1+\sigma j)e^{M|z|},\qquad z\in T^1. \tag{3}$$

Por otra parte, como el álgebra de series sumables en una dirección es estable bajo derivación, se deduce que para todo $m\in\mathbb{N}$, $\hat{f}_m(z)$ es $1/\sigma$-sumable en la dirección d, y además,

$$\mathcal{S}_{1/\sigma,d}\hat{f}_m=f^{(m)}\in\mathcal{A}_{1/\sigma}(S).$$

Denotemos por f_m la restricción a T^2 de $f^{(m)}$, y elijamos constantes

$$C_1=Ce^M>0,\qquad B_1=B\,2^{\sigma+1}>0;$$

a partir de (3) se puede deducir que para cada $m\in\mathbb{N}$,

$$\|f_m\|_{1/\sigma,B_1}\le C_1B_1^m\Gamma(1+(\sigma+1)m). \tag{4}$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} f_m \varepsilon^m$ es una serie de Gevrey de orden $1/(\sigma+1)$ a coeficientes en el espacio de Banach $\mathcal{W}_{1/\sigma,B_1}(T^2)$. Resta comprobar que esta serie es $1/(\sigma+1)$-sumable en la dirección d, lo que equivale a probar que la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_m}{\Gamma(1+(\sigma+1)m)}\,\varepsilon^m,$$

que converge en $\{|\varepsilon| < B_1^{-1}\}$ (de acuerdo con (4)) y define una función F^* holomorfa en ese disco a valores en $\mathcal{W}_{1/\sigma,B_1}(T^2)$, admite prolongación analítica a un sector no acotado $U = \angle(d,\varphi)$ con crecimiento exponencial menor o igual que $1/(\sigma+1)$.

Observemos que si $z, \varepsilon \in T^1$, entonces $z+\varepsilon \in T^1$. Puesto que $T^2 \subset T^1$, tiene sentido considerar para cada $\varepsilon \in T^1$ la función $F_1(\varepsilon)\colon T^2 \to \mathbb{C}$ definida por

$$F_1(\varepsilon)(z) = f(z+\varepsilon), \qquad z \in T^2.$$

Aplicando (3) se obtiene que $F_1(\varepsilon) \in \mathcal{W}_{1/\sigma,B_1}(T^2)$, y de hecho,

$$\|F_1(\varepsilon)\|_{1/\sigma,B_1} \le Ce^M e^{M|\varepsilon|}, \qquad \varepsilon \in T^1,$$

de modo que la función $F_1\colon T^1 \to \mathcal{W}_{1/\sigma,B_1}(T^2)$ está bien definida y es de crecimiento exponencial a lo sumo 1 en T^1. Más aún, F_1 es holomorfa en T^1, y su restricción a T^2 verifica que

$$\|F_1|_{T^2}\|_{1/\sigma,B_1} \le Ce^{2M} < \infty.$$

Por lo tanto, también se tiene que $F_1 \in \mathcal{A}_{1/\sigma}(T^1, \mathcal{W}_{1/\sigma,B_1}(T^2))$, y es sencillo comprobar que el desarrollo asintótico de Gevrey de orden $1/\sigma$ de F_1 es

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_m}{m!}\,\varepsilon^m.$$

Apliquemos ahora el operador de deceleración (de Ecalle) $\mathcal{D}_{1,1/(\sigma+1)}$ a F_1; un resultado clásico (ver [1, §5.2, ejercicio 7]) garantiza que $F := \mathcal{D}_{1,1/(\sigma+1)}F_1$ es holomorfa en la unión de un disco alrededor del origen y del sector no acotado $U = \angle(d, \theta^1 - \pi\sigma)$, y prolonga analíticamente la función F^*. Por último, el hecho de que F_1 sea de crecimiento exponencial a lo sumo 1 en T^1 garantiza que

$$F = \mathcal{B}_{1/(\sigma+1)} \circ \mathcal{L}_1 F_1,$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{L}$ denotan las respectivas transformadas de Borel y Laplace con sus correspondientes órdenes. En esta situación, es conocido que F será de crecimiento exponencial a lo sumo $1/(\sigma+1)$, con lo que se concluye. Cabe mencionar que

$$\mathcal{S}_{(1/\sigma,1/(\sigma+1)),(d,d)}\hat{x} = \mathcal{L}_{1/(\sigma+1)}F.$$

Referencias

[1] W. Balser, *From divergent power series to analytic functions. Theory and application of multisummable power series*, Lecture Notes in Math. 1582, Springer-Verlag, Berlín, 1994.

[2] W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer, Nueva York, 2000.

[3] W. Balser, “Summability of power series in several variables, with applications to singular perturbation problems and partial differential equations”, preprint, Universidad de Ulm (Alemania), 2000.

[4] W. Balser, “Multisummability of formal power series solutions of partial differential equations with constant coefficients”, preprint, Universidad de Ulm (Alemania), 2002.

[5] W. Balser, J. Mozo-Fernández, “Multisummability of formal solutions of singular perturbation problems”, *J. Differential Equations* **183** (2002), 526–545.

[6] B. L. J. Braaksma, “Multisummability of formal power series solutions of nonlinear meromorphic differential equations”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), 517–540.

[7] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes I, II*, Publ. Math. Orsay, Univ. Paris XI, Orsay, 1981; *III*, Publ. Math. Orsay, Univ. París XI, Orsay, 1985.

[8] J. Ecalle, *Introduction à l’Accélération et à ses Applications*, Travaux en Cours, Hermann, París, 1993.

[9] Y. Haraoka, “Theorems of Sibuya-Malgrange type for Gevrey functions of several variables”, *Funkcial. Ekvac.* **32** (1989), 365–388.

[10] H. Majima, “Analogues of Cartan’s Decomposition Theorem in Asymptotic Analysis”, *Funkcial. Ekvac.* **26** (1983), 131–154.

[11] H. Majima, *Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points*, Lecture Notes in Math. 1075, Springer, Berlín, 1984.

[12] J.P. Ramis, “Dévissage Gevrey”, *Astérisque* **59–60** (1978), 173–204.

[13] J.P. Ramis, “Les séries k-sommables et leurs applications”, in: Lecture Notes in Phys. 126, Springer-Verlag, Berlín, 1980, 178-199.

[14] J. Sanz, “Summability in a direction of formal power series in several variables”, *Asymptotic Anal.* **29** (2002), 115-141.

[15] Y. Sibuya, “Convergence of formal solutions of meromorphic differential equations containing parameters”, *Funkcial. Ekvac.* **37** (1994), 395–400.

1 Depto. de Análisis Matemático y Didáctica de la Mat., Universidad de Valladolid.
Facultad de Ciencias. Paseo Prado de la Magdalena s/n, Valladolid 47005.
Correo electrónico: jsanzg@am.uva.es