CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)

11 de Febrero de 2000

1ª Parte: Ejercicios — Duración: de 9:00 a 12:00

1.- Sea $a \in (1,3)$. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recurrentemente por:

$$x_1 = a\,; \qquad x_{n+1} = 5 - \frac{8}{x_n + 1}\,, \quad n \geq 1\,.$$

a) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (1,3)$. *0'5 p.*

b) Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y calcular su límite. *1 p.*

2.- **a)** Sea a un número real. Estudiar el carácter de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n^2 - 4\,n + 5}{n!}\; a^n\,.$$ *0'5 p.*

b) Sumar la serie cuando sea posible. *1 p.*

3.- Sea α un número real con $\alpha > 0$. Demostrar que el polinomio

$$P(x) = x^4 + \alpha\,x - 1$$

tiene exactamente dos raíces reales, una positiva y la otra negativa. *1'5 p.*

4.- Se considera la función f definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = 1 - e^{x/2}$.

a) Demostrar que, para cada $x \in [-1,1]$, se tiene que

$$|f(x)| = |1 - e^{x/2}| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}\,|x|\,.$$ *0'5 p.*

Indicación: Aplicar el teorema de los incrementos finitos de Lagrange.

b) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_n = f(x_{n-1}) = 1 - \exp\left(\frac{x_{n-1}}{2}\right), \qquad n \geq 1\,.$$

Probar que, cualquiera que sea x_0, $x_n \in [-1,1]$ para cada $n \geq 2$. *0'5 p.*

c) Determinar el carácter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. *0'5 p.*

Nota: Se tiene que $2 < e < 3$.

Instrucciones: *Escriba con tinta indeleble. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en el encabezado de cada una de ellas los APELLIDOS y Nombre, en este orden, del alumno/a.*
La puntuación de cada uno de los ejercicios o apartados de estos se indica en cursiva a la derecha.

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)

11 de Febrero de 2000

2ª Parte: Teoría y Cuestiones — Duración: de 12:15 a 14:15

Teoría: (A sorteo)

Tema A: *1 p.*

Tema B: *1 p.*

Cuestiones:

1.- Calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+3}{n^2+2}\right)^n .$$ *0'5 p.*

2.- Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. *0'25 p.*

ii) Si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente. *0'25 p.*

3.- Calcular, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\big(\cos(x)\big)}{x^2} .$$ *0'5 p.*

4.- Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si f es una función real uniformemente continua en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ entonces f es continua en A. *0'25 p.*

ii) Si f es una función real definida y monótona en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, entonces f es derivable en I. *0'25 p.*

Instrucciones: *Las redacciones de los temas han de entregarse en hojas distintas entre si, comenzando en los folios marcados que se proporcionan a tal efecto (las respuestas a las cuestiones pueden presentarse juntas en las mismas hojas).*
Recuerde escribir con tinta y señalar sus Apellidos y Nombre en cada hoja presentada.

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)

Examen Final — 24 de Junio de 2000

1ª Parte: Ejercicios — Duración: de 9:00 a 11:45

1.- Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recurrentemente por:

$$x_1 = 1\,; \qquad x_{n+1} = \frac{3\,x_n + 4}{2\,x_n + 3}\,, \quad n \geq 1\,.$$

a) Probar por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1,2]$. *0'5 p.*

b) Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y calcular su límite. *1 p.*

2.- Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

a) Demostrar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular $f'(0)$. *1 p.*

b) ¿Puede existir $a > 0$ tal que f sea monótona en el intervalo $(-a, a)$? *1 p.*

3.- Se considera la serie de potencias $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ donde

$$a_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{1}{1 + 2 + \ldots + n}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a) Demostrar que el radio de convergencia de la serie es $\varrho = 1$. *0'5 p.*

Denotaremos por f la función suma de esta serie de potencias.

b) Determinar el desarrollo en serie de potencias de x de la función

$$g(x) = x + \log(1 - x)$$ *0'25 p.*

c) Determinar la derivada, $f'(x)$, de la función suma. *0'5 p.*

d) Calcular la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\log(1-x)}{x^2}\,dx$. *0'5 p.*

e) Deducir de lo anterior el valor de la función suma $f(x)$, $x \in (-1, 1)$. *0'75 p.*

Instrucciones: *Escriba con tinta indeleble. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en el encabezado de cada una de ellas los APELLIDOS y Nombre, en este orden, del alumno/a.*
La puntuación de cada uno de los ejercicios o apartados de estos se indica en cursiva a la derecha.

CÁLCULO INFINITESIMAL (1$^{\text{o}}$ de Matemáticas)

Examen Final — 24 de Junio de 2000

2ª Parte: Teoría y Cuestiones — Duración: de 12:00 a 13:45

Teoría: (A sorteo)

Tema A: *1 p.*

Tema B: *1 p.*

Cuestiones:

1.- Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\log\left(\frac{x^3+2}{x^3+5}\right)\right)^{x^3}.$$ *0'7 p.*

2.- Demostrar que

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{-\alpha\, x^2}}{1+x}\,dx\right| \leq \log(2)$$

cualquiera que sea el número real $\alpha > 0$. *0'7 p.*

3.- Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por

$$f_n(x) = e^{-nx}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $(0,\infty)$. *0'7 p.*

Instrucciones: *Las redacciones de los temas han de entregarse en hojas distintas entre si, comenzando en los folios marcados que se proporcionan a tal efecto (las respuestas a las cuestiones pueden presentarse juntas en las mismas hojas).*

Recuerde escribir con tinta y señalar sus Apellidos y Nombre en cada hoja presentada.

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)

Examen Extraordinario — 16 de Septiembre de 2000

1ª Parte: Ejercicios — Duración: de 9:00 a 11:45

1.- **a)** Probar que la ecuación

$$x^3 - 6\,x^2 + 15\,x + 3 = 0$$

tiene una única solución que se encuentra en el intervalo $[-1, 0]$. *0'5 p.*

b) Se considera la función g definida en $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{6\,x^2 - 3}{x^2 + 15}\,.$$

Probar que existe un único número real a tal que $g(a) = a$. *0'5 p.*

c) Demostrar que existe una constante K, con $0 < K < 1$, y tal que

$$|g'(x)| \leq K$$

para cada $x \in [-1, 0]$. *0'5 p.*

d) Dado un punto $x_0 \in [-1, 0]$ se define recurrentemente la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

¿Es convergente dicha sucesión? *0'5 p.*

2.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}\,.$$

Calcular, si existe, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$. *2 p.*

3.- Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}\,x^n.$$

a) Determinar el campo de convergencia de dicha serie. *1 p.*

b) Calcular la función suma de la serie de potencias. *1 p.*

Instrucciones: *Escriba con tinta indeleble. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en el encabezado de cada una de ellas los APELLIDOS y Nombre, en este orden, del alumno/a.*
La puntuación de cada uno de los ejercicios o apartados de estos se indica en cursiva a la derecha.

CÁLCULO INFINITESIMAL (1$^{\text{o}}$ de Matemáticas)

Examen Extraordinario — 16 de Septiembre de 2000

2ª Parte: Teoría y Cuestiones — Duración: de 12:00 a 13:45

Teoría: (A sorteo)

Tema A:	*1 p.*

Tema B:	*1 p.*

Cuestiones:

1.- Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi + 1}{n}\right).$$ *0'7 p.*

2.- Sean f y g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ y tales que $f(0) = g(0) = 0$. Demostrar que no puede suceder que $f(x)\,g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. *0'7 p.*

3.- Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, de término general

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx,$$

es monótona decreciente y convergente hacia 0. *0'7 p.*

Instrucciones: *Las redacciones de los temas han de entregarse en hojas distintas entre si, comenzando en los folios marcados que se proporcionan a tal efecto (las respuestas a las cuestiones pueden presentarse juntas en las mismas hojas).*
Recuerde escribir con tinta y señalar sus Apellidos y Nombre en cada hoja presentada.

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
2 de Febrero de 2001.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:15.

1.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Probar que $a_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. *0'3 puntos*

b) Probar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. *0'8 puntos*

c) Concluir que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, y calcular su límite. *0'6 puntos*

2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$. *0'5 puntos*

b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Dividiendo el intervalo $[0,1]$ en n partes iguales, demostrar que $|f(0) - f(1)| \leq \dfrac{1}{n}$. *0'7 puntos*

c) Deducir que $f(0) = f(1)$. *0'3 puntos*

d) Demostrar que f es constante. *0'4 puntos*

3.- Estudiar, en función del parámetro real a, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(4n-1)^2 - 1}.$$ *1'2 puntos*

4.- Calcular

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^x - 1}{\log(1 - \sqrt{x^2 - 1})}.$$ *1'2 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte equivale a 6 puntos sobre la nota total del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
2 de Febrero de 2001.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:30 a 14:15.

1.- Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales no negativos y que convergen hacia el mismo límite. ¿Se verifica que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$?

2.- Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n\sqrt{n}},$$

donde E denota a la función parte entera.

3.- Estudiar la existencia de $\lim_{x\to+\infty} \Big(x^2(1+\operatorname{sen}(x)) - 2x\Big)$.

4.- Sea $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right|, \qquad x \neq 0.$$

¿Se puede prolongar f al punto $x=0$ por continuidad?

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 1'6 puntos, y el de cada cuestión de 0'6 puntos, todo ello sobre la nota total.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
18 de Junio de 2001.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 8:30 a 11:30.

1.- Sea f la función definida en $[0,\infty)$ por

$$f(x) = e^{-x}\,\mathrm{arctg}(x).$$

Demostrar que f está acotada en $[0,\infty)$ y alcanza su máximo absoluto, que se presenta en un punto $\xi_0 \in (0,\infty)$ tal que

$$(1+\xi_0^2)\,\mathrm{arctg}(\xi_0) = 1.$$ *15 puntos*

2.- Calcular el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\,\mathrm{sen}(x) - \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{2}{3}x^3}{x^4}.$$ *12 puntos*

3.- Sea $F\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_1^{x^3} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt, \qquad x \geq 1.$$

a) Demostrar que F es creciente en $[1,\infty)$. *4 puntos*
b) Demostrar que $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$. *6 puntos*
c) Calcular $\lim_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{e^{x^3}}$. *4 puntos*

4.-
a) Desarrollar en serie de potencias de x la función $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, indicando el intervalo en el que dicha serie representa a f. *6 puntos*
b) Probar que si p es un número entero, con $p \geq 0$, se verifica que

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\,(n+p+1)}.$$ *9 puntos*

c) Sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\,(n+4)}$. 4 puntos

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
18 de Junio de 2001.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 11:45 a 13:45.

1.- Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{arctg}(x)\,dx.$$

8 puntos

2.- Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, definidas en el intervalo $[0,1]$ como

$$f_n(x) = \frac{nx}{x+n+1}.$$

8 puntos

3.- Hallar los números complejos z tales que

$$i\,z = -\overline{z} \qquad \text{y} \qquad |z+i| = 1.$$

8 puntos

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos. Esta segunda parte vale 40 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
29 de Junio de 2001.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por

$$u_1 \in (0, \pi/2), \qquad u_{n+1} = \operatorname{sen}(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Estudiar la convergencia de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y, si procede, hallar su límite. *12 puntos*

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} \right)$. *10 puntos*

2.- Sea $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}, \qquad x > 0.$$

a) Representar gráficamente la función f. *6 puntos*

b) Sea $F\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \int_1^x t\, f'(t)\, dt, \qquad x \geq 1.$$

Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to\infty} \big(F(x+1) - F(x) \big)$. *10 puntos*

3.- **a)** Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $a_n = n(n+1) \displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-n(n+1)x}\, dx$. Probar que $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. *6 puntos*

c) Determinar el campo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$. *6 puntos*

d) Calcular la función suma de la serie del apartado anterior. *10 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
29 de Junio de 2001.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:15.

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{\log(2)+\log(3)+\ldots+\log(n)}$. *8 puntos*

2.- Sea $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ continua y tal que $f(0)=0$ y $f(1)=4$. Demostrar que existe un punto $x_0\in[0,1]$ tal que
$$f\big(x_0+\frac{1}{2}\big)-f(x_0)=2.$$
8 puntos

3.- Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}$ de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por
$$f_n(x)=\frac{n^2\,x}{n^2+x^2},\qquad x\in\mathbb{R}.$$
8 puntos

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos. Esta segunda parte vale 40 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
29 de Junio de 2001.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL EXCLUSIVAMENTE

1.- Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por

$$u_1 \in (0, \pi/2), \qquad u_{n+1} = \operatorname{sen}(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Estudiar la convergencia de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y, si procede, hallar su límite. *12 puntos*

2.- **a)** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{(n+2)!}\,\alpha^n.$$

10 puntos

b) Hallar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{(n+2)!}\,2^n$. *12 puntos*

3.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos(\pi x/2)}$. *12 puntos*

4.- **a)** Probar que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\sqrt{x\,y} \leq (x+y)/2$. *4 puntos*

b) Sean $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series convergentes de términos positivos. Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n\,b_n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ son series convergentes. *10 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
29 de Junio de 2001.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:15.

EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL EXCLUSIVAMENTE

1.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n\log(n)}{\log(2)+\log(3)+\ldots+\log(n)}$. *8 puntos*

2.- Sea $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ continua y tal que $f(0)=0$ y $f(1)=4$. Demostrar que existe un punto $x_0\in[0,1]$ tal que

$$f\big(x_0+\frac{1}{2}\big)-f(x_0)=2.$$

8 puntos

3.- Determinar para qué valores del parámetro real c la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c\,\mathrm{sen}(x)}{x+x^2} & \text{si } x>0,\\ \log(2-x) & \text{si } x\le 0,\end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$. *8 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos. Esta segunda parte vale 40 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
29 de Junio de 2001.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL EXCLUSIVAMENTE

1.- Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$. *10 puntos*

2.- Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}, \qquad x > 0.$$

a) Representar gráficamente la función f. *6 puntos*

b) Calcular el área de la región

$$S = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 1,\ 1 < y < f(x) \,\}.$$ *12 puntos*

c) Sea $F\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \int_1^x t\, f'(t)\, dt, \qquad x \geq 1.$$

Calcular, si existe, $\lim_{x\to\infty}\big(F(x+1) - F(x)\big)$. *10 puntos*

3.- **a)** Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $a_n = n(n+1)\displaystyle\int_0^\infty x e^{-n(n+1)x}\, dx$. Probar que $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. *6 puntos*

c) Determinar el campo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n x^{n+1}$. *6 puntos*

d) Calcular la función suma de la serie del apartado anterior. *10 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
29 de Junio de 2001.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:15.

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL EXCLUSIVAMENTE

1.- Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}$ de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{n^2\, x}{n^2 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

8 puntos

2.- Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}$ de la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, donde

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3 + n^4\, x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

8 puntos

3.- Sean z y w números complejos tales que

$$|z| = 1, \qquad |w| = 1 \qquad \text{y} \qquad z\, w \neq -1.$$

Probar que $\dfrac{z + w}{1 + z\, w}$ es un número real. *8 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos. Esta segunda parte vale 40 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
14 de Septiembre de 2001.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 18:50.

1.- **a)** Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Probar que la ecuación

$$x \operatorname{sen}(x) = n \cos(x)$$

tiene una única solución x_n en el intervalo $[0, \pi/2]$. *8 puntos*

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la función $g_n\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_n(x) = x^n \cos(x).$$

Demostrar que g_n alcanza en $[0, \pi/2]$ su máximo absoluto, M_n, y que lo hace precisamente en el punto x_n del apartado anterior. *10 puntos*

c) Comprobar que $M_n = \dfrac{x_n^{n+1} \operatorname{sen}(x_n)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. *3 puntos*

2.- **a)** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + x^3} - \sqrt{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Obtener el desarrollo limitado de orden 4 de f en $x_0 = 0$. *6 puntos*

b) Comprobar que $f(1/x) = \dfrac{f(x)}{x}$ para cada $x \neq 0$. Deducir de esto y del apartado anterior el valor de

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) + a + \frac{b}{x} \big),$$

donde a y b son constantes reales. *8 puntos*

c) Calcular los valores de a y b para los que converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(f(n) + a + \frac{b}{n} \big).$$ *8 puntos*

3.- **a)** Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} x \big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) \big)$. *5 puntos*

b) Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x) \big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) \big)}{x}\, dx.$ *12 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
14 de Septiembre de 2001.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:00 a 20:50.

1.- Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\, n}{2n+1}\right)}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}$. *8 puntos*

2.- Sea $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\big(\cos(t)\big)^{2001}}, \qquad x \in [0,1].$$

Probar que la ecuación $F(x) = 1$ tiene a lo sumo una solución en $[0,1]$. *8 puntos*

3.- Se considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

a) Calcular su radio de convergencia. *3 puntos*

b) Probar que la función suma de dicha serie, a la que llamamos f, verifica que

$$f'''(x) + f(x) = 0$$

en cada punto x del abierto de convergencia de la serie. *5 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos. Esta segunda parte vale 40 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
8 de Febrero de 2002.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 19:00.

1.- Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por

$$u_1 \in (2,4), \qquad u_{n+1} = \frac{1}{6}\big(u_n^2 + 8\big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Probar que $u_n \in (2,4)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. *6 puntos*

b) Estudiar la monotonía de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. *6 puntos*

c) Concluir que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, y determinar su límite. *4 puntos*

d) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \big(u_n - 1\big)^{2/(u_n-2)}$. *4 puntos*

2.- Sea $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en $(0,\infty)$ y tal que:
(i) Existe $M > 0$ de modo que, para cada $x \in (0,1)$, se verifica que $|f(x)| \leq M\,x$.
(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Se pide:
a) Determinar el valor de $\lim\limits_{x\to 0}(x + f(x))$ y $\lim\limits_{x\to\infty}(x + f(x))$. *7 puntos*
b) Probar que, para cada $a \in (0,\infty)$, existe $x_0 \in (0,\infty)$ tal que

$$x_0 + f(x_0) = a.$$ *9 puntos*

3.- Se considera la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log\big(e^x - x\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Estudiar la monotonía de f y hallar sus extremos. *10 puntos*

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$. *6 puntos*

c) Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$e^{b_n} = e^{a_n} - a_n.$$

c.1) Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que si $a_n > 0$, entonces $b_n > 0$. *2 puntos*

c.2) Se supone que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostrar que también converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$. *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
8 de Febrero de 2002.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:15 a 21:00.

1.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} + \ldots + \sqrt[n]{a}}{n\sqrt{n}}$.

2.- Estudiar, en función del parámetro $p \in \mathbb{R}$, el carácter de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \log\left(\frac{n-1}{n+1}\right).$$

3.- Sea α un número real fijo. Demostrar que la ecuación

$$x = \alpha + \frac{\operatorname{sen}(x)}{2}$$

tiene una única raíz real.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Segundo examen parcial — 18 de Junio de 2002.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 19:00.

1.- **a)** Obtener el desarrollo limitado de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = 2x - \operatorname{sen}(2x)e^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$ *6 puntos*

b) Estudiar, en función del parámetro real α, la convergencia de la integral

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha(1+x)}\,dx.$$ *10 puntos*

2.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n la función dada por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{2nx^{2n}+1}, \qquad x \in [0,\infty).$$

(i) Probar que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge puntual y uniformemente en el intervalo $[0,\infty)$. *10 puntos*

(ii) Estudiar la convergencia puntual de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n$ en $[0,\infty)$. *8 puntos*

Indicación: Distinguir los casos $x \in [0,1)$, $x = 1$ y $x > 1$.

(iii) Sea $a \in (0,1)$. Probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge uniformemente en $[0,a]$. *6 puntos*

3.- Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que existe $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Probar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(t)\,dt = L.$ *7 puntos*

b) Sea $\alpha > 0$ una constante. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^1 f(x^\alpha\, t)\,dt.$ *13 puntos*

Indicación: Se puede realizar un cambio de variable en la integral.

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Segundo examen parcial — 18 de Junio de 2002.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:15 a 21:00.

1.- Determinar los números complejos z tales que $\arg\left(\frac{z+1}{z}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2.- Calcular por integración el área del sector circular limitado en el primer cuadrante por la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ y las rectas $y = 2x$ e $y = x/2$.

3.- Determinar el campo de convergencia y la función suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} x^{2n+1}.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2002.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:30 a 12:00.

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Sea $A > 0$. Se define $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A^2}{x}\right).$$

a) Estudiar la monotonía de f y hallar sus extremos. Hacer un esbozo de la gráfica de f (en su dominio). *8 puntos*

b) Se define la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$u_1 \in [A,\infty), \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A^2}{u_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

b.i) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq A$. *4 puntos*

b.ii) Demostrar que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. *8 puntos*

2.- Sea $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\operatorname{arctg}(t)\,dt.$$

(i) Probar que $0 \leq F(x) \leq \pi/2$ para cada $x \in [0,\infty)$. *6 puntos*

(ii) ¿Converge la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\operatorname{arctg}(t)\,dt$? *4 puntos*

(iii) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x) + \cos(x) - 1}{x^3}$. *10 puntos*

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(i) Determinar el subconjunto A de $[0,\infty)$ en el que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente. *7 puntos*

(ii) Estudiar la convergencia uniforme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en A. *4 puntos*

(iii) Realizar el mismo estudio de (i) y (ii) para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {f_n}'(x)$. *9 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2002.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 13:45.

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{n^3+1}\right)^{1/\log(n^2+1)}$.

2.- Resolver la ecuación $(z-1)^4+z^4=0$.

3.- Probar que la ecuación $\operatorname{sen}(2x)+1=4x$ tiene exactamente una raíz real.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2002.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:30 a 12:00.

EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL

1.- Sea $A > 0$. Se define $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{A^2}{x}\Big).$$

a) Estudiar la monotonía de f y hallar sus extremos. Hacer un esbozo de la gráfica de f (en su dominio). *9 puntos*

b) Se define la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$u_1 \in [A,\infty), \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{A^2}{u_n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

b.i) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq A$. *5 puntos*

b.ii) Demostrar que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. *9 puntos*

2.- **a)** Demostrar que, si $n \geq 3$, $e^{n-2} < n! < n^n$. *6 puntos*

b) Estudiar, en función del parámetro real α, el carácter de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!)}{n^\alpha}.$$

13 puntos

3.- Se inscribe un rectángulo en un semicírculo de radio r, de forma que su base esté sobre el diámetro del mismo y dos vértices consecutivos sean puntos de la semicircunferencia. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que cumpla esas condiciones. *18 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (**1º de Matemáticas**)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2002.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 13:45.

EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL

1.- Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{n^3+1}\right)^{1/\log(n^2+1)}$.

2.- Probar que, si $x \geq 0$, se tiene que

$$\frac{1}{2\sqrt{2+x}} < \sqrt{2+x}-\sqrt{1+x} < \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

3.- Probar que la ecuación $\operatorname{sen}(2x)+1=4x$ tiene exactamente una raíz real.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2002.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:30 a 12:00.

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+2)(n+4)(n+6)\cdots(n+2n)}{n^n}}.$$ *18 puntos*

2.- Sea $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por
$$F(x) = \int_0^x e^{-t} \operatorname{arctg}(t)\, dt.$$

(i) Probar que $0 \le F(x) \le \pi/2$ para cada $x \in [0,\infty)$. *6 puntos*

(ii) ¿Converge la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t} \operatorname{arctg}(t)\, dt$? *4 puntos*

(iii) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)+\cos(x)-1}{x^3}$. *10 puntos*

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por
$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(i) Determinar el subconjunto A de $[0,\infty)$ en el que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente. *8 puntos*

(ii) Estudiar la convergencia uniforme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en A. *4 puntos*

(iii) Realizar el mismo estudio de (i) y (ii) para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$. *10 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2002.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 13:45.

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Calcular el volumen del sólido generado al girar, alrededor de OX, el recinto que limita la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(2x)$ con el eje OX en el intervalo $[0, \pi/2]$.

2.- Resolver la ecuación $(z-1)^4 + z^4 = 0$.

3.- Hallar el campo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^n (n+1)}.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
11 de Septiembre de 2002.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 19:00.

1.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = n^2 x^{n-1}(1-x).$$

a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0,1]$. *12 puntos*

b) Probar que si $a \in (0,1)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[0,a]$. *5 puntos*

c) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$. *4 puntos*

d) Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $[0,1]$ de la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. *6 puntos*

2.- Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, dos veces derivable en (a,b) y tal que el segmento que une los puntos $A(a,f(a))$ y $B(b,f(b))$ corta a la gráfica de f en el punto $C(c,f(c))$, siendo $a < c < b$.

a) Probar que existen dos puntos, $t_1 \in (a,c)$ y $t_2 \in (c,b)$, tales que

$$f'(t_1) = f'(t_2).$$ *12 puntos*

b) Deducir que existe al menos un punto $t \in [a,b]$ tal que $f''(t) = 0$. *3 puntos*

3.- **a)** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que

$$\int_0^{\pi} x\, f\big(\mathrm{sen}(x)\big)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\big(\mathrm{sen}(x)\big)\,dx.$$ *12 puntos*

Indicación: Para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(\pi - x)$.

b) Calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx.$$ *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
11 de Septiembre de 2002.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:15 a 21:00.

1.- Estudiar el carácter de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n^2}.$$

2.- Sean $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$, y $C\in\mathbb{R}$ una constante tales que, para cada $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt \;+\; \frac{x^{16}}{8}+\frac{x^{18}}{9}+C.$$

Determinar f y C.

3.- Determinar los valores del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$ para los cuales

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\cos(3x)}{x^2+x-\operatorname{sen}(\alpha\,x)}$$

es finito y distinto de 0.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos. Esta segunda parte vale 40 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
10 de Febrero de 2003.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 19:00.

1.- Sea $a \in [0,2]$ un número real. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Estudiar la monotonía y la acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *12 puntos*

c) Concluir que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, y determinar su límite. *4 puntos*

d) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2 - x_n)$. *6 puntos*

2.- Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, $a \neq 1$. Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{a}{a-1}\Big)^n.$$ *18 puntos*

Indicación: Analizar por separado los casos $a < 0$, $0 < a < 1$ y $a > 1$.

3.- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se considera la función $f\colon (-\infty, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x & \text{si } x \le 0, \\ \big(1 + \operatorname{sen}(x)\big)^{x^\alpha} & \text{si } x \in (0, \pi/2]. \end{cases}$$

a) Determinar para qué valores de α la función f es continua en $(-\infty, \pi/2]$. *10 puntos*

b) Probar que, dado un número real $\beta < e$, la ecuación $f(x) = \beta$ tiene una única raíz estrictamente negativa. *10 puntos*

Instrucciones:
Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*
El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale **60 puntos** *sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
10 de Febrero de 2003.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:15 a 21:00.

1.- Sea
$$x_n = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n^2+2}\right) + \ldots + \operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n^2+n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$, si existe.

2.- Sean f y φ funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que
$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$
Probar que $\lim_{x\to\infty} f\big(\varphi(x)\big) = \ell$.

3.- Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto $a \in \mathbb{R}$, y definamos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante
$$f(x) = (x-a)g(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Estudiar la derivabilidad de f en a.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones:
Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*
El tema se determinará a sorteo, y debe redactarse en las hojas entregadas al efecto. El valor del **tema** *es de* **16 puntos**, *y el de cada* **cuestión** *de* **8 puntos**, *todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Segundo examen parcial — 7 de Junio de 2003.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:10 a 12:00.

1.- Sea $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,2\} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x(x-2)}.$$

a) Estudiar la monotonía y los extremos relativos de f. *5 puntos*

b) Calcular el área de la superficie limitada por la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[3,\infty)$. *5 puntos*

c) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{8-x} - 2 + \frac{x}{12}\right)\frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. *5 puntos*

2.- Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_x^{x+1} \operatorname{sen}(t^2)\,dt, \qquad x \in (0,\infty).$$

a) Probar que f es derivable en $(0,\infty)$ y hallar su derivada. *7 puntos*

b) Probar que

$$|f(x)| \le \frac{1}{2x}\int_{x^2}^{(x+1)^2} |\operatorname{sen}(t)|\,dt, \qquad x \in (0,\infty).$$ *8 puntos*

3.- Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones definida en $[0,\infty)$ por

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Estudiar la convergencia puntual de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. *5 puntos*

b) Estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[1,\infty)$ y en $[0,1)$. *10 puntos*

4.- Se considera la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+|x|^n), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Probar que para cada $x \in [0,1)$, $\quad 0 \le \log(1+x) \le x$. *3 puntos*

b) Estudiar la convergencia puntual de la serie en $\mathbb{R}$. *6 puntos*

c) Estudiar la convergencia uniforme de la serie en $[a,b] \subset (-1,1)$. *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Segundo examen parcial — 7 de Junio de 2003.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:10 a 13:50.

1.- Dado $z = 2e^{i4\pi/3}$, calcular

$$\frac{z}{1-2i}, \qquad z^{10} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[4]{z},$$

expresando todos los resultados en forma binómica.

2.- Estudiar el dominio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n2^n} x^n.$$

3.- Estudiar, según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 30 de Junio de 2003.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$.

a) Calcular $\lim_{n\to\infty} \Big(\big(\frac{a}{a-1}\big)^n \operatorname{arcsen}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\Big)$. *7 puntos*

Indicación: Estudiar para qué valores de a se tiene que $\left|\frac{a}{a-1}\right| \leq 1$.

b) Estudiar, en función del parámetro real a, el carácter de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{a}{a-1}\big)^n \operatorname{arcsen}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big).$$ *13 puntos*

2.- Hallar el punto P, situado en el primer cuadrante y perteneciente a la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

tal que la tangente a la elipse en P forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

15 puntos

3.- Para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se considera

$$I_n(x) = \int_1^x (t-x)e^{n(x-t)}\, dt.$$

a) Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$I_n(x) = e^{n(x-1)}\big(\frac{1-x}{n} + \frac{1}{n^2}\big) - \frac{1}{n^2}.$$ *6 puntos*

b) Probar que, si $x \in [0,1]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(x)}{\int_0^1 e^{-nt}\, dt} = 0.$$ *6 puntos*

c) Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{\int_x^1 e^{n(x-t)}\, dt}{\int_0^1 e^{-nt}\, dt}, \qquad x \in [0,1].$$

c.1) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$. *7 puntos*

c.2) Sea b un número real, con $0 < b < 1$. Demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,b]$. *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 30 de Junio de 2003.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right)^n$.

2.- Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)-\cos(2x)+1-2x}{x-\mathrm{sen}(x)}$.

3.- Estudiar el carácter de $\int_0^\infty \frac{\log(t)}{t^2+1}\,dt$.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 30 de Junio de 2003.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL

1.- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por recurrencia mediante

$$x_1 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{6x_n^2+6}{x_n^2+11}, \quad n \geq 1.$$

a) Admitiendo que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, determinar los posibles valores de su límite. *5 puntos*

b) Probar que si $x_1 > 3$, entonces

$$x_n > x_{n+1} > 3 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Deducir que en este caso $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, e indicar su límite. *12 puntos*

c) Si $x_1 = \dfrac{10}{3}$, probar que para cada $n \geq 1$ se tiene que

$$x_{n+1} - 3 \leq \frac{19}{20}(x_n - 3),$$

y concluir que

$$x_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}\Big(\frac{19}{20}\Big)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

8 puntos

2.- Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$.

a) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(\big(\frac{a}{a-1}\big)^n \operatorname{arcsen}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\Big)$. *7 puntos*

Indicación: Estudiar para qué valores de a se tiene que $\left|\dfrac{a}{a-1}\right| \leq 1$.

b) Estudiar, en función del parámetro real a, el carácter de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{a}{a-1}\big)^n \operatorname{arcsen}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big).$$

13 puntos

3.- Estudiar la continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$ de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

15 puntos

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 30 de Junio de 2003.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL

1.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log(n)}\right)^n$.

2.- Hallar la suma de la serie

$$1-2+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}+\cdots.$$

3.- Probar que la ecuación $2x+e^x=0$ tiene exactamente una raíz real.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 30 de Junio de 2003.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Hallar el punto P, situado en el primer cuadrante y perteneciente a la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

tal que la tangente a la elipse en P forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

15 puntos

2.- Para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se considera

$$I_n(x) = \int_1^x (t-x)e^{n(x-t)}\,dt.$$

a) Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$I_n(x) = e^{n(x-1)}\Big(\frac{1-x}{n} + \frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{n^2}.$$ *6 puntos*

b) Probar que, si $x \in [0,1]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(x)}{\displaystyle\int_0^1 e^{-nt}\,dt} = 0.$$ *6 puntos*

c) Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_x^1 e^{n(x-t)}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 e^{-nt}\,dt}, \qquad x \in [0,1].$$

c.1) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$. *7 puntos*
c.2) Sea b un número real, con $0 < b < 1$. Demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,b]$. *6 puntos*

3.- **a)** Desarrollar la función $f(x) = e^{-x^2}$ en serie de potencias centrada en $x = 0$. ¿Cuál es su radio de convergencia? *6 puntos*
b) Probar que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$ *8 puntos*

c) Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ con un error menor que $0'001$. *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 30 de Junio de 2003.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Calcular, por integración, el área del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(1,4)$ y $C(5,2)$.

2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)-\cos(2x)+1-2x}{x-\operatorname{sen}(x)}$.

3.- Estudiar el carácter de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(t)}{t^2+1}\,dt$.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
11 de Septiembre de 2003.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 18:50.

1.- **a)** Probar que, si $x \geq 0$, se cumple que $\log(1+x) \leq x$. *4 puntos*
b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

b.1) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\log(x_n) < 1$. *8 puntos*
b.2) Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. *6 puntos*

2.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Estudiar la monotonía y hallar los extremos relativos de f. Hacer un esbozo de su gráfica. *8 puntos*
b) Probar que f está acotada. *4 puntos*
c) Determinar $f(\mathbb{R})$. *6 puntos*

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = x^{1/(2n+1)} - x^{1/(2n-1)}, \qquad x \geq 0.$$

a) Estudiar la convergencia puntual de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, y hallar la función suma en el conjunto que proceda. *8 puntos*
b) Estudiar la convergencia uniforme de la serie en $[0,1]$. *4 puntos*
c) Estudiar la convergencia uniforme de la serie en los intervalos de la forma $[1,b]$, con $b > 1$. *6 puntos*
d) Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_1^2 f_n(x)\,dx.$$ *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (**1º de Matemáticas**)
11 de Septiembre de 2003.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:10 a 20:50.

1.- Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

2.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Determinar los extremos relativos de f, los intervalos de concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión.

3.- Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Calcular $f^{(100)}(0)$.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos. Esta segunda parte vale 40 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
13 de Febrero de 2004.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 19:00.

1.- Sea $a \in [1,2]$ un número real. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n^2 + x_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y calcular su límite. *14 puntos*

b) Calcular, cuando $a \in [1,2)$,

$$\lim_{n\to\infty} [\cos(2 - x_n)]^{\frac{1}{4-x_n^2}}.$$ *6 puntos*

2.- **a)** Determinar, en función del valor de $x \in \mathbb{R}$, el carácter de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2^n}\right)$$

y calcular su suma cuando sea convergente. *8 puntos*

b) Estudiar, según los valores de los parámetros $a > 0$ y $b > 0$, el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + b^n}.$$ *12 puntos*

3.- Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 + \cos(x)}{2 - \operatorname{sen}(x)}.$$

a) Probar que la ecuación $f(x) = x$ tiene una única raíz en $[0, \pi/2]$.
6 puntos

b) Probar que existe un único punto $\alpha \in (0, \pi/2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. *8 puntos*

c) Demostrar que $f'(x) > 0$ para todo $x \in [0, \alpha)$ y que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (\alpha, \pi/2]$. Deducir cuáles son los extremos de f en $[0, \pi/2]$. *6 puntos*

Instrucciones:

Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*
El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale **60 puntos** *sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
13 de Febrero de 2004.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:15 a 21:00.

1.- Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

y calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)}{\sqrt[3]{n}}.$$

2.- Sean f y g funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que existen

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = l_2 \in \mathbb{R}.$$

¿Se puede asegurar que existe $\lim_{x\to a} g(x)$? Razónese la respuesta.

3.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1, \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \le 2, \\ \dfrac{x^2 - 2x}{2 - x} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones:
Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*
El tema se determinará a sorteo, y debe redactarse en las hojas entregadas al efecto. El valor del **tema** *es de* **16 puntos**, *y el de cada* **cuestión** *de* **8 puntos**, *todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2004.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1.-

(a) Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right]^{1/n}.$$ *10 puntos*

(b) Estudiar, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty}\log\left[\frac{(n^2+n-2)^\alpha}{(n^2-2n+1)^{1-\alpha}}\right].$$ *6 puntos*

2.- Sea $h\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{4}{(2x+1)^2}.$$

(a) Probar que existe una única primitiva g de h en $(0,\infty)$ tal que

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0.$$ *5 puntos*

(b) Determinar la primitiva f de la función g anterior tal que

$$f(1)=2\,\log(2)-\log(3).$$ *7 puntos*

(c) Demostrar que en $(0,\infty)$ cualquier primitiva de g es estrictamente creciente. *8 puntos*

3.- Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\,e^{-nx}.$$

(a) Sea $a>0$ cualquiera. Probar que las series $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ convergen uniformemente en $[a,\infty)$. Deducir que ambas convergen puntualmente en $(0,\infty)$. *12 puntos*

(b) Para cada $x>0$ sea

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}.$$

Probar que f es derivable en $(0,\infty)$ y calcular $f'(x)$. *4 puntos*

(c) Para cada $x>0$ sea $g(x)=-e^{-x}f(x)$. Probar que, para cada $x\in(0,\infty)$,

$$g'(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$ *4 puntos*

(d) Determinar $f(x)$ sabiendo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=-\log(2).$$ *4 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2004.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b < 1$. Probar que la ecuación

$$\log(a^x + b^x) = x$$

tiene una única raíz real, la cual es positiva.

2.- Mayorar el error cometido al reemplazar $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ por $1 - \dfrac{x^2}{6}$ en el cálculo de

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx.$$

3.- Estudiar el carácter de la integral

$$\int_0^\infty x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) dx.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2004.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL

1.- Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 2; \quad a_n = 4n + a_{n-1}, \quad (n \geq 2).$$

a) Estudiar si la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es o no convergente. *10 puntos*

b) Demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n - 2n^2| < 2n.$$ *6 puntos*

c) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2}.$$ *4 puntos*

2.-

a) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!}{n!\, n^n}\right]^{1/n}.$$ *12 puntos*

b) Estudiar, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \log\left[\frac{(n^2+n-2)^{\alpha}}{(n^2-2n+1)^{1-\alpha}}\right].$$ *8 puntos*

3.- Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ para $x > 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Probar que existe al menos un punto $c \in (0,\infty)$ tal que $f'(c) = 0$.
. *20 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2004.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

EXAMEN DEL PRIMER PARCIAL

1.- Probar por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) = \frac{n(2n^2+3n+7)}{6}.$$

2.- Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

converge y calcular su suma.

3.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b < 1$. Probar que la ecuación

$$\log(a^x + b^x) = x$$

tiene una única raíz real, la cual es positiva.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2004.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}[\log(1+x)] - \log[1+\operatorname{sen}(x)]}{x^4}.$$
16 puntos

2.- Sea $h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{4}{(2x+1)^2}.$$
(a) Probar que existe una única primitiva g de h en $(0,\infty)$ tal que
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
5 puntos

(b) Determinar la primitiva f de la función g anterior tal que
$$f(1) = 2\,\log(2) - \log(3).$$
7 puntos

(c) Demostrar que, en $(0,\infty)$, cualquier primitiva de g es estrictamente creciente. *8 puntos*

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\, e^{-nx}.$$
(a) Sea $a > 0$ cualquiera. Probar que las series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ convergen uniformemente en $[a,\infty)$. Deducir que ambas convergen puntualmente en $(0,\infty)$. *12 puntos*

(b) Para cada $x > 0$ sea
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}.$$
Probar que f es derivable en $(0,\infty)$ y calcular $f'(x)$. *4 puntos*

(c) Para cada $x > 0$ sea $g(x) = -e^{-x} f(x)$. Probar que, para cada $x \in (0,\infty)$,
$$g'(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$
4 puntos

(d) Determinar $f(x)$ sabiendo que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\log(2).$$
4 puntos

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen ordinario — 29 de Junio de 2004.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

EXAMEN DEL SEGUNDO PARCIAL

1.- Mayorar el error cometido al reemplazar $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ por $1 - \dfrac{x^2}{6}$ en el cálculo de

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx.$$

2.- Calcular el volumen del sólido generado al girar, alrededor de OX, el recinto que limita la gráfica de la función $y = \operatorname{tg}(2x)$ con el eje OX en el intervalo $[0, a]$, con $0 < a < \pi/4$.

3.- Estudiar el carácter de la integral

$$\int_0^\infty x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) dx.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
11 de Septiembre de 2004.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:50.

1.- Se considera la función f definida por

$$f(x) = x^2 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Realizar un esbozo de la gráfica de f. En particular, estudiar su monotonía y hallar sus extremos relativos. ¿ Cuál es el máximo absoluto de f en $(0,\infty)$? Razónese. *9 puntos*

b) Se define la sucesión numérica $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_1 = 2; \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge y calcular su límite. *12 puntos*

c) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$ *3 puntos*

2.- **a)** Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left[1 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + n \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{n}\right)\right].$$ *8 puntos*

b) Se considera la función $F : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt.$$

Probar que, para cada $x \geq 1$, se verifica la desigualdad

$$2\,\log(x) \leq F(x).$$ *8 puntos*

3.- Sea $f : (-1,0) \cup (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}.$$

a) Probar que f se puede prolongar por continuidad a $(-1,\infty)$. *2 puntos*

b) Hallar el desarrollo en serie de potencias de f en un entorno de $x = 0$. *3 puntos*

c) Demostrar que

$$\int_0^{1/2} \frac{\log(1+x)}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n^2}.$$ *7 puntos*

d) Sea S la suma de la serie numérica del apartado anterior. Probar que la integral impropia

$$\int_0^{1/2} \frac{\log(x)}{1+x}\, dx$$

converge y determinar su valor en función de S. *8 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL **($1^{\underline{o}}$ de Matemáticas)**
11 de Septiembre de 2004.
$2^{\underline{a}}$ Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:05 a 13:45.

1.- Estudiar la continuidad y derivabilidad, en $x = 0$, de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{|x|} - 1}{|x|}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.- Dado el número complejo $z = -1 + \sqrt{3}i$, se pide:
a) Obtener las raíces cuartas de z.
b) Hallar $x \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{z^{10}}{2 + xi} \in \mathbb{R}$.

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x + \frac{1}{n}}, \quad x \in [0, \infty).$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $[0, \infty)$ de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos. Esta segunda parte vale 40 puntos sobre la nota total (100 puntos) del examen.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 31 enero de 2005

Tiempo: de 16:00 a 19:00

1.- Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por recurrencia por:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n} - \frac{1}{4}, \quad \text{para cada } \; n \in \mathbb{N}.$$

1. Estudiar monotonía y acotación de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. (10 puntos)
2. Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. (5 puntos)
3. Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x_n}\right)^{\frac{1}{4x_n - 1}}$. (7 puntos)

2.- Para cada $a > 0$, se consideran las sucesiones $\{x_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por:

$$x_n(a) = \frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n+1})} \quad \text{y} \quad y_n(a) = \frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}.$$

1. Probar que, cualquiera que sea $a > 0$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(a)$ converge. (7 puntos)
2. Comprobar que se cumple la igualdad
$$y_n(a) - y_{n+1}(a) = x_n(a) \quad (a > 0; \; n = 1, 2, 3, \cdots).$$ 2 puntos
3. Si $a \geq 1$, demostrar que la sucesión $\{y_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0, y determinar la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(a)$. (7 puntos)
4. Si $0 < a < 1$, probar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(1 + a^n)$ converge y deducir que la sucesión $\{y_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ también converge. (6 puntos)

3.- Se considera la función $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

1. Probar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene una única raíz $c \in (0, \infty)$. (10 puntos)
2. Deducir, del apartado anterior, la monotonía de f en $(0, c)$ y (c, ∞) y, como consecuencia, el valor del único extremo absoluto de f en $(0, \infty)$. (6 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 31 ENERO DE 2005

TIEMPO: DE 19:15 A 21:00

1. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{5}{1}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{6}{2}\right)^{\frac{2}{n}}\cdots\left(\frac{n+4}{n}\right)^{\frac{n}{n}}\right].$$

(8 puntos)

2. Estudiar el carácter de la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+e^{-n}}{\log n}.$$

(8 puntos)

3. (a) Sea $x\in\mathbb{R}$, con $x>-2$. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)^n+1}$.

   (b) Se define la función $f:(-2,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$f(x)=(1-x^2)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)^n+1}.$$

   Estudiar la continuidad de f en $(-2,\infty)$.

(8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 4 junio de 2005

Tiempo: de 9:15 a 12:00

1. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para cada $x \in \mathbb{R}$, se define
$$H_n(x) = \int_0^x t^n \cdot \log(1+t^2)\, dt.$$
   (a) Determinar explícitamente, $H_0(x)$ y $H_1(x)$. (5 puntos)
   (b) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el cálculo de $H_n(x)$ se puede reducir al cálculo de una integral racional (no es necesario calcular esta última). (3 puntos)
   (c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $u_n = H_n(1)$. Demostrar que la sucesión numérica $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y converge hacia cero. (10 puntos)
   (d) Calcular: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2}\, dt.$ (6 puntos)

2. (a) Estudiar el carácter de la integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} te^{-t}\, dt$, y hallar su valor, en caso de convergencia. (4 puntos)
   (b) Sea $\alpha > 0$. Discutir, en función de α, el carácter de la integral
$$\int_1^{\infty} \frac{\log t}{\sqrt{(t-1)^{\alpha}}} e^{-t}\, dt.$$
   (Indicación: Probar que $\log t < t$, para todo $t > 0$.) (12 puntos)

3. Se considera la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, definida en $[0,1]$ por: $f_1(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$;
$$f_n(x) = \frac{\log[1+n^4x^2]}{2n} - \frac{\log[1+(n-1)^4x^2]}{2(n-1)}, \qquad (n \geq 2).$$
   (a) Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$, con función suma $f \equiv 0$ (idénticamente nula). (12 puntos)
   (b) Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge puntualmente, pero no uniformemente en $[0,1]$. (8 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 4 JUNIO DE 2005

TIEMPO: DE 12:15 A 13:50

1. (a) Hallar el desarrollo limitado de orden 5, en $x = 0$, de la función:

$$f(x) = \cos x.$$

   (b) Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(xe^{x}) - \cos(xe^{-x}) + 2x^3}{x^5}.$$

(8 puntos)

2. Estudiar si la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{2x} (e^{4-\frac{t^2}{4}} - 1)\, dt$$

tiene o no extremos relativos y, en caso afirmativo, determinar en qué puntos se alcanzan. (8 puntos)

3. Hallar el área del recinto que limita la gráfica de $f(x) = 1 + |\operatorname{sen} x|$ con OX, en $[0, 2\pi]$. (8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas primer parcial 30 junio de 2005

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1.- Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{x+1}{2} + \log x$$

1. Probar que existe un único punto $\alpha \in (3, 4)$ tal que $f(\alpha) = \alpha$. (10 puntos)
2. Demostrar que $f([3, 4]) \subset [3, 4]$. (6 puntos)
3. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_1 = 3, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad (\text{para cada } n \in \mathbb{N}).$$

   Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. (8 puntos)

2.-

a) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos \left(\frac{1}{n}\right) + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$ (10 puntos)

b) Probar que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{[\log(n+1)]^2}{(\log n)(\log(n+2))}$$

es telescópica y calcular su suma. (10 puntos)

3.- Determinar a, b, $c \in \mathbb{R}$, con $c > 1$, de manera que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+2}, & \text{si } x \geq 1 \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES PRIMER PARCIAL 30 JUNIO DE 2005

Tiempo: de 12:15 a 14:00

1. Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p, \quad p>0.$$

(8 puntos)

2. Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tag} x}-\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{x^3}.$$

(8 puntos)

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$. Probar que

$$\frac{\operatorname{tag} a}{a}<\frac{\operatorname{tag} b}{b}.$$

(8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas segundo parcial 30 junio de 2005

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1.-

a) Estudiar y representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{\log x}{x}. \qquad (10 \text{ puntos})$$

b) Hallar el volumen del sólido generado al girar el recinto que determina la gráfica de f con OX en $[1, e^2]$.

(8 puntos)

2.-

a) Estudiar el carácter de la integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}$, y hallar su valor, en caso de convergencia.

(5 puntos)

b) Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_1^\infty e^{-\sqrt{\log x}} \cdot \operatorname{sen} x \, dx. \qquad (13 \text{ puntos})$$

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$$

1. Determinar la funciónf, límite puntual de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ en $(0,1]$. (7 puntos)
2. Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera. Si $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, para $x \in (0,1]$, estudiar la monotonía de g_n y deducir que, cualquiera que sea $x \in (0,1]$, $\quad g_n(x) \geq 0$. (5 puntos)
3. Dado $a \in (0,1)$, probar que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformemente hacia f en $[a,1]$. (7 puntos)
4. Demostrar que la convergencia de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ hacia f no es uniforme en $(0,1]$.

(5 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES SEGUNDO PARCIAL 30 JUNIO DE 2005

TIEMPO: DE 12:15 A 14:00

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x+1, & \text{si } \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Hallar las funciones F tales que $F'(x) = f(x)$, si $x \neq 0$.

   (b) Determinar la función F del apartado anterio que verifica que

$$\int_1^2 F(x)\, dx = \frac{11}{3}.$$

(8 puntos)

2. Dado $z = 1 + \sqrt{3}i$, se pide

   (a) Hallar z^{-1} y $\dfrac{1}{z^3}$.

   (b) Hallar las raíces cuartas de z^{-1}.

(8 puntos)

3. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} [\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

(8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas final 30 junio de 2005

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1.- Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{x+1}{2} + \log x$$

1. Probar que existe un único punto $\alpha \in (3,4)$ tal que $f(\alpha) = \alpha$. (10 puntos)
2. Demostrar que $f([3,4]) \subset [3,4]$. (5 puntos)
3. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_1 = 3, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad (\text{para cada } n \in \mathbb{N}).$$

   Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. (7 puntos)

2.-

a) Estudiar el carácter de la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2}$, y hallar su valor, en caso de convergencia.

(4 puntos)

b) Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\log x}} \cdot \operatorname{sen} x \, dx.$$ (12 puntos)

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$$

1. Determinar la funciónf, límite puntual de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0,1]$. (7 puntos)
2. Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera. Si $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, para $x \in (0,1]$, estudiar la monotonía de g_n y deducir que, cualquiera que sea $x \in (0,1]$, $\quad g_n(x) \geq 0$. (5 puntos)
3. Dado $a \in (0,1)$, probar que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f en $[a,1]$. (6 puntos)
4. Demostrar que la convergencia de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ hacia f no es uniforme en $(0,1]$.

   (4 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES FINAL 30 JUNIO DE 2005

TIEMPO: DE 12:15 A 14:00

1. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tag} x} - \sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{x^3}.$$

(8 puntos)

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x+1, & \text{si } \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Hallar las funciones F tales que $F'(x) = f(x)$, si $x \neq 0$ (8 puntos)

   (b) Determinar la función F del apartado anterior que verifica que

$$\int_1^2 F(x)\,dx = \frac{11}{3}.$$

(8 puntos)

3. Dado $z = 1 + \sqrt{3}i$, se pide

   (a) Hallar z^{-1} y $\dfrac{1}{z^3}$.

   (b) Hallar las raíces cuartas de z^{-1}.

(8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES (12 DE SEPTIEMBRE DE 2005)

TIEMPO: DE 12:15 A 14:00

1. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arcsen} 1 + \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2}) + \cdots + \operatorname{arcsen}(\frac{1}{n})}{\log(2n)}.$$

(8 puntos)

2. Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}, & \text{si } x > 0 \\ \\ x^2 + bx + c, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Determinar b y c para que f sea continua y derivable en $x = 0$. (8 puntos)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = x^n + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n+1}\right)$$

   (a) Probar que, para todo $x \geq 0$, $\quad \operatorname{sen} x \leq x$.

   (b) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, \frac{1}{2}]$.

(8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
1 de Febrero de 2006.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

1.- Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales definida por recurrencia por:

$$x_1 = 2; \qquad x_{n+1} = \sqrt[4]{2 + x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. *10 puntos*
b) Demostrar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. *5 puntos*
c) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x_n^2 - 2).$$ *5 puntos*

2.- **a)** Determinar los extremos absolutos de la función

$$f(x) = \frac{1+x}{2+x}$$

en el intervalo $[-1, 1]$. *8 puntos*
b) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos(n)}{2+\cos(n)} \right)^{2n-\log(n)}.$$ *12 puntos*

3.- Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y dos veces derivable en (a,b) tal que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Se supone además que existen $c, d \in (a,b)$, con $c < d$, verificando que $f(c) < c$ y $f(d) > d$. Demostrar que:

a) Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = x_0$. *6 puntos*
b) Existen $x_1, x_2 \in (a,b)$, con $x_1 < x_0 < x_2$, tales que

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 1.$$ *10 puntos*

c) Existe $x_3 \in (a,b)$ tal que $f''(x_3) = 0$. *4 puntos*

Instrucciones:
Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*
El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale **60 puntos** *sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
1 de Febrero de 2006.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

1.- Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} (n\, a_n) = 1.$$

Determinar el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \right)$$

2.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes condiciones:
i) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$;
ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1.$
Demostrar que f es derivable en todo punto $a \in \mathbb{R}$ y determinar $f'(a)$.

3.- Probar que, cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$x + \log(x) = \alpha$$

tiene exactamente una raíz en $(0, \infty)$.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones:
Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*
El tema se determinará a sorteo, y debe redactarse en las hojas entregadas al efecto. El valor del **tema** *es de* **16 puntos**, *y el de cada* **cuestión** *de* **8 puntos**, *todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 10 Mayo de 2006

Tiempo: de 9:00 a 11:45

1. Los vértices de un rectángulo son los puntos $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(a,b)$ y $C(0,b)$, siendo B un punto de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, situado en el primer cuadrante. Hallar las coordenadas de B para que el volumen del cilindro obtenido al hacer girar ese rectángulo alrededor del eje OX sea máximo. (16 puntos)

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \pi - \sqrt{3}\int_0^x \frac{dt}{2+\cos t}.$$

   (a) Estudiar la monotonía de f y deducir de ello si existen o no extremos relativos. (4 puntos)

   (b) Probar que $f(x) + f(-x)$ es constante en $\mathbb{R}$, y obtener el valor de esa constante. (5 puntos)

   (c) Demostrar que f' es una función periódica, con periodo 2π y, por consiguiente, $f(x+2\pi) - f(x) = C \quad (x \in \mathbb{R})$, siendo $C < 0$. (5 puntos)

   (d) Determinar explícitamente $f(x)$, para $x \in (-\pi, \pi)$, y deducir del resultado obtenido el valor de C del apartado anterior. (8 puntos)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{(1+nx)^2}{1+n^2x^2}$$

   (a) Estudiar la convergencia puntual de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$ y hallar la función límite f. (5 puntos)

   (b) Probar que la convergencia no es uniforme en $(0,\infty)$. (5 puntos)

   (c) Demostrar que, si $a > 0$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a,\infty)$. (7 puntos)

   (d) Estudiar si es cierta o no la igualdad

$$\int_0^x f = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n, \qquad x > 0.$$

5 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas (10 junio de 2006)

Tiempo: de 9:15 a 12:00

1. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^n$ en $[0,\infty)$ tal que
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{n-1)}(0) = 0.$$
   (a) Probar que, dado $a > 0$,
$$\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} \cdot f^{n)}(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx. \qquad \text{(10 puntos)}$$
   (b) Demostrar que, si $|f^{n)}(x)| \leq M$ para $0 \leq x \leq a$, entonces
$$|\int_0^a f(x)\,dx| \leq \frac{a^{n+1}}{n!}\frac{M}{\sqrt{2n+1}}. \qquad \text{(6 puntos)}$$

2. (a) Probar que, para cada $x \in (4,\infty)$, se cumple que
$$\log x \leq \sqrt{x}. \qquad \text{(6 puntos)}$$
   (b) Dado $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, estudiar el carácter de la integral impropia
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{a^2+t^2}\,dt. \qquad \text{(14 puntos)}$$

3. (a) Sea $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por
$$h(x) = \log\left[(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}\right] - \log[(1+\frac{x}{n})^n]$$
   Demostrar que h es monótona en $[0,1]$. (6 puntos)

   (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por
$$f_n(x) = \frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}.$$
   i) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.
   (10 puntos)
   ii)Calcular
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx. \qquad \text{(8 puntos)}$$

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES (10 JUNIO DE 2006)

TIEMPO: DE 12:10 A 13:50

1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}$ tal que $f'(a) \neq 0$. Calcular

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)f'(a)} - \frac{1}{f(x)-f(a)}\right].$$

(8 puntos)

2. Hallar los complejos z que son solución de la ecuación

$$(1+z)^4 = (1-z)^4.$$

(8 puntos)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{\cos^2 t}{n^2 + \cos^2 t}\, dt \quad \text{(no intentar calcular la integral)}$$

Probar que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(8 puntos)

4. Tema a sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas, primer parcial (30 junio de 2006)

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1. Se considera la función $f : (-\frac{3}{2}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}$$

(a) Estudiar la monotonía de f y deducir que, para cada $x \in [-1, \sqrt{2}]$ se cumple que

$$1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$ (6 p.)

(b) Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por recurrencia, de manera que

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. (14 p.)

2. (a) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}).$$ (10 p.)

(b) Estudiar, en función del parámetro $a > 0$, el caraácter de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}.$$ (10 p.)

3. Se consideran las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 4\cos x, & \text{si } x \geq \dfrac{\pi}{2} \\ x \cdot \operatorname{tag}(\dfrac{x}{2}), & \text{si } x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(a) Estudiar la continuidad de f y g. (4 p.)

(b) Probar que existen $x_1, x_2 \in (0, 2)$ tales que $f(x_1) = \pi$ y $f(x_2) = 2\pi$. (6 p.)

(c) Demostrar que existe $x_0 \in (0, 2)$ tal que $g[f(x_0)] = 0$. (6 p.)

(d) Estudiar la continuidad uniforme de $g \circ f$ en $[0, 1]$. (4 p.)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Cuestiones, primer parcial (30 junio de 2006)

Tiempo: de 12:15 a 14:00

1. Estudiar el carácter de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\,\pi\right). \qquad (\ 8 \text{ p.})$$

2. Calcular

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right). \qquad (\ 8 \text{ p.})$$

3. Probar que, para cada $x \in [0,\infty)$

$$\sqrt[4]{x} \leq 2x + \frac{3}{8}\,. \qquad (\ 8 \text{ p.})$$

4. Tema a sorteo. (16 p.)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas, segundo parcial (30 junio de 2006)

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1. Sean $f, g : [0, \frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$$

   (a) Calcular

$$\int_0^{\pi/4} [f(x) + g(x)]\, dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi/4} [f(x) - g(x)]\, dx. \qquad (\ 10 \text{ p.})$$

   (b) Deducir cuánto vale el área del recinto que determina la gráfica de cada una de esas funciones con OX, en $[0, \frac{\pi}{4}]$. (10 p.)

2. Sea $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ una función tal que:

$$f(a) = 0 \quad \text{y, para cada } x \in [a, b], \quad 0 \leq f'(x) \leq 1.$$

   (a) Probar que, para cada $x \in [a, b]$, $\quad [f(x)]^2 \leq 2 \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt.$ (15 p.)

   (b) Deducir que, para cada $x \in [a, b]$, $\quad [f(x)]^2 \leq 2 \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt.$ (5 p.)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = ne^{-n/x}.$$

   (a) Probar que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0, \infty)$. (6 p.)

   (b) Demostrar que la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente en $(0, \infty)$, y determinar la función suma de la serie en ese intervalo. (8 p.)

   (c) Dado $a > 0$, Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $(0, a]$.

   (6 p.)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Cuestiones, segundo parcial (30 junio de 2006)

Tiempo: de 12:15 a 14:00

1. Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \log x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   (a) Probar que f admite desarrollo limitado de orden dos en $x = 0$, y determinar ese desarrollo.

   (b) ¿Existe $f'''(0)$? Razónese. (8 p.)

2. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{n}\right). \qquad (\text{ 8 p.})$$

3. Determinar el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen

$$\frac{-\pi}{4} \leq \arg\,(z + i) \leq \frac{\pi}{4}\,. \qquad (\text{ 8 p.})$$

4. Tema a sorteo. (16 p.)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas, examen final (30 junio de 2006)

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1. Se considera la función $f : (-\frac{3}{2}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}$$

   (a) Estudiar la monotonía de f y deducir que, para cada $x \in [-1, \sqrt{2}]$ se cumple que
   $$1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}.$$ (6 puntos)

   (b) Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por recurrencia, de manera que
   $$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$
   Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. (14 puntos)

2. Sea $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ una función tal que:

$$f(a) = 0 \quad \text{y, para cada } x \in [a,b], \quad 0 \leq f'(x) \leq 1.$$

   (a) Probar que, para cada $x \in [a,b]$, $\quad [f(x)]^2 \leq 2\int_a^x f(t)\,dt.$ (15 puntos)

   (b) Deducir que, para cada $x \in [a,b]$, $\quad [f(x)]^2 \leq 2\int_a^b f(t)\,dt.$ (5 puntos)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = ne^{-n/x}.$$

   (a) Probar que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0,\infty)$. (6 puntos)

   (b) Demostrar que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente en $(0,\infty)$, y determinar la función suma de la serie en ese intervalo. (8 puntos)

   (c) Dado $a > 0$, Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $(0,a]$.
   (6 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Cuestiones, examen final (30 junio de 2006)

Tiempo: de 12:15 a 14:00

1. Estudiar el carácter de la serie numérica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\,\pi\right). \qquad \text{(8 p.)}$$

2. Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \log x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
   (a) Probar que f admite desarrollo limitado de orden dos en $x = 0$, y determinar ese desarrollo.
   (b) ¿Existe $f'''(0)$? Razónese. (8 p.)

3. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\,\pi}{n}\right). \qquad \text{(8 p.)}$$

4. Tema a sorteo. (16 p.)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas (12 de septiembre de 2006)

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$$

   (a) Estudiar la monotonía de f, hallar sus extremos relativos y hacer un esbozo de su gráfica. (12 p.)

   (b) Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por recurrencia, por

$$x_1 = a \in [0, 2), \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

   Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. (12 p.)

2. Sea $\alpha > 0$. Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x - 1}\, dx,$$

   según los distintos valores de α. (16 p.)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2(n+1)}.$$

   (a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. (6 p.)

   (b) Se denota por $S(x)$ la función suma de la serie anterior.
   i) Probar que $S(x)$ es derivable y calcular $S'(0)$. (7 p.)
   ii) Demostrar que, cualquiera que sean $x, y \in [-\pi, \pi]$, se cumple que

$$|S(x) - S(y)| \leq |x - y|. \qquad \text{(7 p.)}$$

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Cuestiones, (12 de septiembre de 2006)

Tiempo: de 12:15 a 14:00

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $f(0) = 0$. Se define $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \\ f'(0), & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Probar que g es derivable en $x = 0$ y calcular $g'(0)$. (8 p.)

2. Calcular

$$\lim_{x \to \pi/4} (\operatorname{tag} x)^{\operatorname{tag}(2x)}.$$

(8 p.)

3. Sea $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \log(x + 1) - \log x - \frac{2}{2x + 1}$$

Determinar la primitiva f de g, en $(0, \infty)$, que cumple que

$$f(1) = 2 \log 2 - \log 3.$$

(8 p.)

4. Tema a sorteo. (16 p.)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

PROBLEMAS 1 DE FEBRERO DE 2007

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

$$x_1 = a > 1, \qquad x_{n+1} = \frac{5x_n - 4}{x_n}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Estudiar, en función de a, la monotonía y acotación de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. (15 puntos)

   (b) En caso de convergencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, determinar su límite. (5 puntos)

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$. Se define la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ por:

$$b_n = a_n + a_{n+1} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$$

   es alternada y converge. Denotemos su suma por S. (12 puntos)

   (b) Demostrar que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, hallar su límite L en función de S, y probar que $L < 0$. (8 puntos)

3. (a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la ecuación

$$x^4 + x^3 = n$$

   tiene una única raíz real en $(0, \infty)$, que denotamos por a_n. (6 puntos)

   (b) Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida en el apartado anterior. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{(8 puntos)}$$

   y calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{a_n}. \qquad \text{(6 puntos)}$$

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 1 DE FEBRERO DE 2007

TIEMPO: DE 12:15 A 2:00

1. Calcular el límite de la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$u_n = (n^2+1)\,\mathrm{sen}\,(\frac{1}{n^3+1}) + (n^2+2)\,\mathrm{sen}\,(\frac{1}{n^3+2}) + \cdots + (n^2+n)\,\mathrm{sen}\,(\frac{1}{n^3+n}).$$

(8 puntos)

2. Sean a, $b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b > 0$. Estudiar el carácter de la serie

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} + \cdots ,$$

y hallar su suma en caso de convergencia. (8 puntos)

3. Sean $a, b \in [1, e]$, con $a < b$. Demostrar que se cumple que

$$b^3 \log b - a^3 \log a \leq 4e^2(b-a).$$

(8 puntos)

4. Tema: a sorteo

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Parcial — 8 de Junio de 2007.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 19:00.

1.- Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(2x)+\operatorname{sen}(2x)-4x}{x(\operatorname{ch}(x)+\cos(x)-2)}\,.$$
10 puntos

2.- Se considera la función f definida por
$$f(x) = \frac{x}{(4+x^2)^2}\,.$$
a) Estudiar la monotonía de f y hallar sus extremos. Hacer un esbozo de la gráfica de f. *12 puntos*

b) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de f y su asíntota, si tal área tiene sentido. *6 puntos*

3.- Estudiar el carácter de la integral impropia
$$\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha(2+\operatorname{sen}(\sqrt{t}))}\,dt$$
según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. *10 puntos*

4.- Para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ se define la función $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por
$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{e^{nx}}\,.$$
(i) Probar que la serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge puntualmente en $[0,1]$ y determinar la función suma. *6 puntos*

(ii) Estudiar la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ en $[0,1]$ y en $[a,1]$, siendo $0 < a < 1$. *10 puntos*

(iii) Estudiar la convergencia de la serie numérica
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/2}^{1} f_n(x)\,dx$$
y calcular su suma si procede. *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Parcial — 8 de Junio de 2007.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:15 a 21:15.

1.- Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $0 < f(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que la ecuación

$$\int_0^x f(t)\,dt = 2x - 1$$

tiene una única raíz real.

2.- Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

3.- Obtener los valores $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación

$$z^4 - \overline{z} = 0\,.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (Toda la asignatura) — 29 de Junio de 2007.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

1.- Se considera la función $f : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log(x + 2) - x\,.$$

a) Estudiar la monotonía de f y deducir que

$$f(x) \leq 1\,, \text{ para todo } x \in (-2, \infty)\,.$$ *6 puntos*

b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos raíces reales, α y β, tales que $-2 < \alpha < 0 < \beta$. *8 puntos*

c) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por

$$x_1 = 0\,; \quad x_{n+1} = \log(x_n + 2)\,, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\,.$$

Probar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. *8 puntos*

2.- Se define la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(r) = \int_0^1 \sqrt{1 - x^r}\, dx\,.$$

a) Dado $r > 0$, probar que, para cada $x \in [0, 1]$,

$$1 - x^r \leq \sqrt{1 - x^r} \leq 1 - \frac{x^r}{2}\,.$$ *4 puntos*

b) Calcular $\lim\limits_{r \to \infty} f(r)$. *12 puntos*

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la función $u_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_n(x) = x^n - x^{n-1/2}\,.$$

a) Determinar la n-ésima suma parcial, $S_n(x)$, de la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Probar que la serie converge puntualmente en $[0, 1]$ y calcular la función suma $S(x)$. *8 puntos*

b) Estudiar la convergencia uniforme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ en los intervalos $[0, 1]$ y $[0, a]$, donde $0 < a < 1$. *8 puntos*

c) ¿Es S integrable en [0,1]? Razonar la respuesta y, si es afirmativa, calcular

$$\int_0^1 S(x)\, dx\,.$$ *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (Toda la asignatura) — 29 de Junio de 2007.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:15.

1.- Calcular
$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\,e^{1/(x+1)} - x\,e^{1/x}\right].$$

2.- Estudiar el carácter de la integral impropia
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\log(1+\cos^2(x))}{(1+x^2)^2}\,dx\,.$$

3.- Hallar todas las raíces complejas de la ecuación
$$(1+z)^3 = (1-z)^3$$
y escribir los resultados en forma binómica.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (1er Parcial) — 29 de Junio de 2007.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

1.- Se considera la función $f : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log(x + 2) - x\,.$$

a) Estudiar la monotonía de f y deducir que

$$f(x) \leq 1\,, \text{ para todo } x \in (-2, \infty)\,.$$ *7 puntos*

b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos raíces reales, α y β, tales que $-2 < \alpha < 0 < \beta$. *8 puntos*

c) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por

$$x_1 = 0\,; \quad x_{n+1} = \log(x_n + 2)\,, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\,.$$

Probar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. *9 puntos*

2.- Sea $a > 0$, con $a \neq 1$.

a) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sqrt[n]{a} - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^n .$$ *10 puntos*

b) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n} - 1}\,.$$ *10 puntos*

3.- Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable en $(0, \infty)$ tal que f' es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$.

a) Probar que, para cada $x \in (1, \infty)$, se verifican las desigualdades

$$f(x + 1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x - 1)\,.$$ *12 puntos*

b) Se supone que $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Determinar $\lim_{x\to\infty} f'(x)$. *4 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (1er Parcial) — 29 de Junio de 2007.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:15.

1.- Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right).$$

2.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{1+e^{1/x}}\,, & \text{si } x\neq 0\,,\\ 0\,, & \text{si } x=0\,.\end{cases}$$

3.- Calcular
$$\lim_{x\to\infty}\Big[(x+1)\,e^{1/(x+1)}-x\,e^{1/x}\Big].$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (2º Parcial) — 29 de Junio de 2007.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

1.- Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen}(x)) - \operatorname{sen}(x)\,\log(1+x)}{x^4}.$$ *16 puntos*

2.- Se define la función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por
$$f(r) = \int_0^1 \sqrt{1-x^r}\,dx.$$

a) Dado $r > 0$, probar que, para cada $x \in [0,1]$,
$$1 - x^r \le \sqrt{1-x^r} \le 1 - \frac{x^r}{2}.$$ *6 puntos*

b) Calcular $\lim\limits_{r\to\infty} f(r)$. *14 puntos*

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la función $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$u_n(x) = x^n - x^{n-1/2}.$$

a) Determinar la n-ésima suma parcial, $S_n(x)$, de la serie funcional $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Probar que la serie converge puntualmente en $[0,1]$ y calcular la función suma $S(x)$.
8 puntos

b) Estudiar la convergencia uniforme de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ en los intervalos $[0,1]$ y $[0,a]$, donde $0 < a < 1$. *9 puntos*

c) ¿Es S integrable en [0,1]? Razonar la respuesta y, si es afirmativa, calcular
$$\int_0^1 S(x)\,dx.$$ *7 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (2º Parcial) — 29 de Junio de 2007.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:15.

1.- Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ que satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Calcular $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

2.- Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\log(1+\cos^2(x))}{(1+x^2)^2}\,dx\,.$$

3.- Hallar todas las raíces complejas de la ecuación

$$(1+z)^3 = (1-z)^3$$

y escribir los resultados en forma binómica.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Extraordinario — 11 de Septiembre de 2007.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

1.- Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x^2-\sqrt{x}-2\,.$$

a) Probar que existe un único $\alpha\in(1,\infty)$ tal que $f(\alpha)=0$. *6 puntos*
b) Se define la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_1=2\,;\quad x_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{x_n}}\,,\ (n\in\mathbb{N})\,.$$

i) Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. *8 puntos*
ii) Probar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. *6 puntos*

2.- Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=\pi$ y verifica

$$2\,\mathrm{sen}(f(x)-x)=\mathrm{sen}(x)\,,\quad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\,.$$

a) Determinar $f'(x)$ en función de $f(x)$ y calcular $\lim\limits_{x\to\pi} f'(x)$. *5 puntos*
b) Probar que existe $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{sen}(f(x))}{\mathrm{sen}(x)}$ y calcular su valor. *5 puntos*

3.- Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\frac{\log(x)}{1+x^2}\,.$$

Probar que las integrales impropias $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ convergen ambas y tienen valores opuestos. *10 puntos*

4.- **a)** Estudiar la monotonía en $(0,\infty)$ de la función $f(x)=\dfrac{\log(x)}{x}$ y deducir que la sucesión $(\sqrt[n]{n})_{n=3}^{\infty}$ es monótona. *6 puntos*
b) Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $f_n:[1,3]\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x)=x\left(1+\sqrt[n]{nx}\right).$$

i) Estudiar la convergencia puntual y uniforme en el intervalo $[1,3]$ de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. *9 puntos*
ii) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_1^3 f_n(x)\,dx$. *5 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Extraordinario — 11 de Septiembre de 2007.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:15.

1.- Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\log(n)}}$.

2.- Sea p un número natural fijo y sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_0^x e^{-t} \operatorname{sen}^{2p}(t)\, dt\,.$$

Probar que f es creciente y está acotada superiormente por 1.

3.- Obtener los valores $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación

$$\arg\Big(\frac{z}{z+1}\Big) = \frac{\pi}{2}\,.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Adicional — 23 de Noviembre de 2007.

1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:30 a 19:00.

1.- Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes de números reales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por:

$$x_n = a_n \text{ si } n \text{ es impar}; \quad x_n = b_n \text{ si } n \text{ es par.}$$

Probar, a partir de la definición de sucesión convergente, que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L\,.$$

1.5 puntos

2.- Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

$$x_1 = 0\,; \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2\sqrt{2}}\,, \ \ (n \in \mathbb{N})\,.$$

Estudiar la monotonía y acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. En caso de convergencia, determinar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. *2.5 puntos*

3.- Calcular, según los valores del parámetro $p \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log 2)^2 + (\log 3)^2 + \cdots + (\log n)^2}{n^p}\,.$$

2 puntos

4.- **a)** Estudiar, según los valores del parámetro $a > 0$, el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \log\left(1 + \frac{1}{a^n}\right)\,.$$

1 punto

b) Comprobar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+4)\,2^n}{3^{n+1}}$$

converge y calcular su suma. *1 punto*

2ª Parte: TEORÍA. Duración: de 19:15 a 19:50.

TEMA: A sorteo. *2 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones deben entregarse escritas con tinta, cada problema en hojas separadas, debiendo figurar en cada una los apellidos y nombre, en este orden, del alumno. Una vez elegido el tema de teoría, el alumno dispondrá de 5 minutos para repasarlo. El valor de cada apartado figura a la derecha.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
31 de Enero de 2008.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

1.- Sea $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{3x - x^2 + 4}{6}.$$

a) Determinar los extremos absolutos de f en el intervalo $[1,2]$. *6 p.*

b) Se considera la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por:

$$x_1 = a \in [1,2], \quad x_{n+1} = \frac{3x_n - x_n^2 + 4}{6}, \; n \in \mathbb{N}.$$

i) Probar que $x_n \in [1,2]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. *4 p.*

ii) Estudiar la monotonía de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. *9 p.*

iii) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, determinar su límite. *5 p.*

2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^4+1} - ax^2 + \dfrac{1-\cos(bx)}{x^2} + c, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Determinar a, b, c para que f sea continua en $x = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *14 p.*

3.- **a)** Calcular los límites siguientes:

i) $\lim_{x\to\infty} \left[\big(1 - \log(x)\big) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right]$, **ii)** $\lim_{x\to\infty} \left[x^{1/x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right]$. *6 p.*

b) Sea $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = x^{1/x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Determinar la función derivada de f en $(0,\infty)$ y deducir que existe $A > 0$ tal que, cualquiera que sea $x \in (A,\infty)$, $f'(x) < 0$. *6 p.*

c) Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right).$$ *10 p.*

Instrucciones:

Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*
El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale **60 puntos** *sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
31 de Enero de 2008.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

1.- Calcular:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

2.- Sea $f(x)=x+\cos(\pi x)$. Si $g(x)=mx^2+n$, se pide:
a) Determinar $m,n\in\mathbb{N}$ de manera que $g(0)=f(0)$ y $g(1)=f(1)$.
b) Para los valores obtenidos en a), probar que existe $t\in(0,1)$ tal que $f'(t)=g'(t)$.

3.- Sea $a>0$ y sea $n\in\mathbb{N}$, con $n\geq 2$. Probar que, cualquiera que sea $x\in(0,\infty)$, se cumple que
$$(n-1)\,x+\frac{a^n}{x^{n-1}}\geq n\,a.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones:
Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno.*
El tema se determinará a sorteo, y debe redactarse en las hojas entregadas al efecto. El valor del **tema** *es de* **16 puntos**, *y el de cada* **cuestión** *de* **8 puntos**, *todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

PROBLEMAS 6 JUNIO DE 2008

TIEMPO: DE 16:00 A 19:00

1. (a) Obtener el desarrollo limitado de orden 4, en $x = 0$, de la función $f(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x}$

   (b) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{sen^2(1/n)} - (1 + \frac{1}{2n^2})^2}{\log(1 + \operatorname{tag}^4(\frac{2}{n}))}$$

(10 puntos)

2. Discutir según los valores del parámetro $\alpha > 0$, el carácter de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{t+1}{\sqrt{t^\alpha(4+t^6)}}\, dt.$$

(12 puntos)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n \cdot e^{1-x}}{n!}.$$

   (a) Estudiar la monotonía de f_n y hallar sus extremos. (5 puntos)

   (b) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ en $[0, \infty)$. (8 puntos)

   (c) Sea $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$. Determinar, sin calcular la integral, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$. (2 puntos)

   (d) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$. Deducir de ello que $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. (7 puntos)

4. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, con $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $[\alpha, \pi/2]$ de la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n}.$$

   Determinar, si procede, la función suma. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 6 JUNIO DE 2008

Tiempo: de 19:15 a 21:00

1. El lado $\overline{AB}$ de un rectangulo está sobre el eje OX y el lado opuesto a $\overline{AB}$ tiene su vértices, C y D, sobre la gráfica de la función $f(x) = e^{-2x^2}$. Determinar los vértices del rectangulo de área máxima. (8 puntos)

2. Calcular
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(2+\operatorname{sen}^2 x)}.$$
(8 puntos)

3. Sean $z, \omega \in \mathbb{C}$ tales que
$$\begin{cases} 1+z+\omega = 0 \\ |z| = |\omega| = 1. \end{cases}$$
Probar que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\omega) = -\frac{1}{2}$ (8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas segundo parcial (27 junio de 2008)

Tiempo: de 9:00 a 12:00

2.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \int_0^x e^{-t} \operatorname{sen}^{2n} t \, dt.$$

1. Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es creciente y está acotada. (6 puntos)
2. Justificar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $I_n = \lim_{x \to \infty} f_n(x)$, y demostrar

$$(4n^2 + 1)I_n = 2n(2n - 1)I_{n_1}.$$ (8 puntos)

3. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. (7 puntos)

1.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^4}$$

1. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, 1]$. (9 puntos)
2. Estudiar si es cierta o no la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, dx.$$ (9 puntos)

3.- Se considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 - n}$.

1. Determinar el campo de convergencia de dicha serie. (5 puntos)
2. Demostrar que la serie converge uniformemente en todo el campo de convergencia. (6 puntos)
3. Para cada $t \in (-1, 1)$, sea $S(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n^2 - n}$.

   Determinar explícitamente la función S y deducir la función suma de la serie dada inicialmente. (10 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES SEGUNDO PARCIAL (27 JUNIO DE 2008)

TIEMPO: DE 12:15 A 14:00

1. Calcular:
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{kn^2}{n^4+k^4}. \qquad \text{(8 puntos)}$$

2. Estudiar el carácter de la integral impropia:
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}\, dx. \qquad \text{(8 puntos)}$$

3. Determinar el lugar geométrico de los puntos del plano determinado por los complejos z tales que
$$\left|\frac{z-3}{z-2}\right| = 2. \qquad \text{(8 puntos)}$$

4. Tema: a sorteo . (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

PROBLEMAS FINAL (27 JUNIO DE 2008)

TIEMPO: DE 9:00 A 12:00

1.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos.

1. Demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = 1$$

tiene una única solución, r_n, en $(0, \infty)$. (8 puntos)

2. Demostrar que la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. (10 puntos)

2.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \int_0^x e^{-t} \operatorname{sen}^{2n} t \, dt.$$

1. Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es creciente y está acotada. (6 puntos)
2. Justificar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $I_n = \lim_{x \to \infty} f_n(x)$, y demostrar que

$$(4n^2 + 1) I_n = 2n(2n - 1) I_{n-1}$$ (8 puntos)

3. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. (7 puntos)

3.- Se considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 - n}$.

1. Determinar el campo de convergencia de dicha serie. (5 puntos)
2. Demostrar que la serie converge uniformemente en todo el campo de convergencia. (6 puntos)
3. Para cada $t \in (-1, 1)$, sea $S(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n^2 - n}$.

   Determinar explícitamente la función S y deducir la función suma de la serie dada inicialmente. (10 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES FINAL (27 JUNIO DE 2008)

TIEMPO: DE 12:15 A 14:00

1. Estudiar el carácter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)^{n^2}. \qquad (\ 8 \text{ puntos})$$

2. Calcular:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right). \qquad (\ 8 \text{ puntos})$$

3. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{n^4+k^4}. \qquad (\ 8 \text{ puntos})$$

4. Tema: a sorteo . (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas (9 septiembre de 2008)

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1.-

1. Calcular $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}\log(1+x) - \cos(\sqrt{x})}{x^2}$. (8 puntos)

2. Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^{n^2} \cdot n^2\left[n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$ (12 puntos)

2.-

1. Probar que, para cada $k \in [1,\infty)$,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt[4]{t}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{k}}.$$ (6 puntos)

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $S_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} + \cdots \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Demostrar que

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt[4]{t}} \leq S_n \leq \int_1^{n} \frac{dt}{\sqrt[4]{t}} + 1.$$ (7 puntos)

3. Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt[4]{n^3}}$. (7 puntos)

3.- Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{n+n^4x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

1. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$. (10 puntos)

2. Se considera la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de dicha serie en $[0,\infty)$.

(10 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES FINAL (9 SEPTIEMBRE DE 2008)

TIEMPO: DE 12:15 A 14:00

1. Probar que la ecuación
$$\cos(2x) + 1 = 3x,$$
tiene exactamente una raíz real. (8 puntos)

2. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Se define $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por
$$g(x) = \int_0^x f(t)(x-t)\,dt.$$
Probar que g es derivable en $\mathbb{R}$ y deducir que g es de clase $\mathcal{C}^2$. (8 puntos)

3. Dado $x \in \mathbb{R}$, se considera el complejo
$$z = \frac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}}.$$
   (a) Calcular $\mathrm{Re}z$ e $\mathrm{Im}z$.
   (b) Resolver la ecuación $\omega^3 = z + 7i$, siendo z el complejo dado. (8 puntos)

4. Tema: a sorteo . (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 21 noviembre de 2008

Tiempo: de 16:00 a 19:00

1.- Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por recurrencia por:

$$x_1 = \alpha \geq 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 4}, \quad \text{para cada } \; n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. (3 puntos)
Indicación: Estudiar por separado los casos: a) $\alpha \in [1, 4]$. b) $\alpha > 4$.

2.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran:

$$a_n = \log[(\sqrt{1+\sqrt{2}})(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2}}) \cdots (\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2}})],$$

$$b_n = \text{ sen } 1 + \text{ sen } \frac{1}{2} + \cdots \text{ sen } \frac{1}{n}.$$

1. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

2. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n})$.

(2 puntos)

3.- a) Estudiar, según los valores de $a \in \mathbb{R}^+$, el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$.

b) Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - 2n + 3}{n!}$. (2 puntos)

4.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos, con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que $\{\sqrt{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $\sqrt{a}$. (1 punto)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

PROBLEMAS 30 DE ENERO DE 2009

Tiempo: de 9:00 a 12:00

1. (a) Sea $a \in (0,1)$, con $a \neq \frac{1}{2}$. Probar que

$$a < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{1-a}} < \frac{1}{2} \quad \text{si } a \in (0,\frac{1}{2}), \quad \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{1-a}} < a \quad \text{si } a \in (\frac{1}{2},1).$$

(6 puntos)

(b) Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por recurrencia por:

$$x_1 = a \in [0,1], \quad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}+\sqrt{1-x_n}}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Estudiar, según los valores de a, la convergencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y determinar el límite de la sucesión, caso de que exista. (14 puntos)

2. Dado $\alpha > 0$, se considera la serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^\alpha}.$$

(a) Probar que, si $\alpha \geq 2$, la serie converge. (8 puntos)

(b) Probar que, si $\alpha = 1$, la serie diverge. (2 puntos)

(c) Estudiar el carácter de la serie en los casos:

$i)$ $0 < \alpha < 1$. $\quad ii)$ $1 < \alpha < 2$. (10 puntos)

3. Se consideran las funciones f y g, definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \frac{x}{1+e^x}, \qquad g(x) = 1 + e^x(1-x)$$

(a) Probar que existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) = 0$. (8 puntos)

(b) Estudiar la monotonía de f y deducir que f tiene un único extremo absoluto. Determinar el valor de éste. (12 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 30 DE ENERO DE 2009

TIEMPO: DE 12:15 A 14:00

1. Estudiar, en función del parámetro real a, la convergencia y convergencia absoluta de la serie numérica
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\cdot a^{2n}}{n+1}.$$
(8 puntos)

2. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, sea g_α la función definida en $\mathbb{R}$ por
$$g_\alpha(t)=\begin{cases} t^{\alpha t}, & \text{si } t>0\\ 1, & \text{si } t\leq 0.\end{cases}$$
   (a) Estudiar la continuidad de la función g_α.
   (b) Calcular $\lim\limits_{t\to\infty} g_\alpha(t)$, según los diferentes valores de α.

(8 puntos)

3. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y sea f una función derivable en I. Se supone que la ecuación $f(x)=0$ tiene exactamente dos raíces, a y b, en I, siendo $a<b$. Probar que $f'(a)\cdot f'(b)\leq 0$. (8 puntos)

4. Tema a sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Parcial — 5 de Junio de 2009.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 19:00.

1.- Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = b\ \mathrm{sen}(x) + b\ \mathrm{sen}(2x) + x\ \cos(x)\,, \quad (b \in \mathbb{R})\,.$$

a) Obtener el desarrollo limitado de orden 5 de f en $x = 0$. *6 puntos*

b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. *4 puntos*

c) Determinar, según los valores de $b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\mathrm{tg}^5(x)}$. *10 puntos*

2.- **a)** Estudiar el carácter de la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi\, t}{2t+1}\right) dt\,.$$ *8 puntos*

b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_1^{x} \frac{1}{t}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi\, t}{2t+1}\right) dt$. *12 puntos*

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{n^2 + \cos(x)}{2n^2 + \mathrm{sen}^2(x)}\,.$$

a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}$ de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. *10 puntos*

b) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^{4019} f_n(x)\, dx$. *4 puntos*

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g_n(x) = f_n(x) - \dfrac{1}{2}$. Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}$ de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$. *6 puntos*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 puntos sobre la nota total del examen (100 puntos).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Parcial — 5 de Junio de 2009.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:15 a 21:00.

1.- Calcular
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^4}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{9}{n^4}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{n^2}{n^4}}\right).$$

2.- Hallar el área $S(\lambda)$ del recinto limitado por la curva de ecuación $y = x + \dfrac{1}{2\,x^2}$, la recta de ecuación $y = x$ y las paralelas al eje OY trazadas por los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = \lambda$, donde $\lambda > 1$. Calcular $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S(\lambda)$.

3.- Calcular
$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{10}-\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{10}.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 puntos, y el de cada cuestión de 8 puntos, todo ello sobre la nota total de 100 puntos.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (Toda la Asignatura) — 29 de Junio de 2009.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

1.- Dado $a \in (0, \pi/2)$, se define la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$u_n = \int_0^a \operatorname{sen}^n(t)\, dt, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Estudiar la monotonía de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. *9 ps*
b) Probar que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y calcular su límite. *9 ps*

2.- Dados $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, sea f una función dos veces derivable en el intervalo $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
a) Estudiar la continuidad y derivabilidad en I de la función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{si } x \neq a, \\ f'(a), & \text{si } x = a. \end{cases}$$ *10 ps*

b) Se supone, además, que $f(a) = f'(a) = 0$ y que existe $b \in (a, a+\varepsilon)$ tal que $f(b) = 0$. Probar que entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$ y deducir que

$$f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$ *8 ps*

3.- Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se considera la función $f_n \colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \operatorname{sen}(x) \cos^n(x).$$

a) Estudiar la monotonía de f_n y determinar sus extremos relativos, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *5 ps*
b) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *7 ps*
c) Probar que la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge puntualmente en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y hallar la función f suma de la serie. *5 ps*
d) Estudiar la convergencia uniforme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ en los intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$, siendo $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. *7 ps*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 ps sobre la nota total del examen (100 ps).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (Toda la Asignatura) — 29 de Junio de 2009.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

1.- **a)** Probar por inducción que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

b) Probar la convergencia y determinar la suma de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots n}{1^3+2^3+\cdots+n^3}.$$

2.- Estudiar el carácter de la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

3.- Resolver, en $\mathbb{C}$, la ecuación

$$z^6 + 8 + 8\,i = 0\,.$$

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta**, *debiendo figurar en cada hoja los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 ps, y el de cada cuestión de 8 ps, todo ello sobre la nota total de 100 ps.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (Primer Parcial) — 29 de Junio de 2009.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

1.- Dado $a > 0$, se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_1 = a\,; \qquad x_{n+1} = \log(1 + x_n)\,, \quad (n \geq 1)\,.$$

Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. *20 ps*

2.- Dados $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, sea f una función dos veces derivable en el intervalo $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad en I de la función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, & \text{si } x \neq a, \\ f'(a), & \text{si } x = a. \end{cases}$$ *12 ps*

b) Se supone, además, que $f(a) = f'(a) = 0$ y que existe $b \in (a, a + \varepsilon)$ tal que $f(b) = 0$. Probar que entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$ y deducir que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}\,.$$ *8 ps*

3.- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x^{\alpha}}\,.$$

a) Estudiar la monotonía de f, según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. *6 ps*

b) Estudiar, en función de $\alpha \in \mathbb{R}$, el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[\log(n) + 1\right]}{n^{\alpha}}\,.$$ *14 ps*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas***, debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden***, del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 ps sobre la nota total del examen (100 ps).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Final (Primer Parcial) — 29 de Junio de 2009.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

1.- **a)** Probar por inducción que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

b) Probar la convergencia y determinar la suma de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots n}{1^3+2^3+\cdots+n^3}.$$

2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una raíz real en $[0, 2]$.

3.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$x_n = \operatorname{arctg}\Big(\frac{n}{n^2+1}\Big) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{n}{n^2+2}\Big) + \cdots + \operatorname{arctg}\Big(\frac{n}{n^2+n}\Big)\,.$$

Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$, si existe.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta**, *debiendo figurar en cada hoja los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 ps, y el de cada cuestión de 8 ps, todo ello sobre la nota total de 100 ps.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Extraordinario — 9 de Septiembre de 2009.
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:30 a 12:30.

1.- **a)** Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la ecuación

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{x}$$

tiene una única solución en el intervalo $\Big(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\Big)$, a la que denotaremos por r_n. *8 ps*

b) Se define la sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$a_n = r_n - n\pi\,, \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{r_n}\Big) \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)\,,$$

y deducir que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y converge hacia 0. Probar que, además, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\Big\{\frac{1}{n\pi}\Big\}_{n=1}^{\infty}$. *12 ps*

2.- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}(\alpha x) - x\cos(x)\,.$$

a) Determinar el desarrollo limitado de orden 3 de f en $x = 0$, y calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha}\,\log(1+x)}\,,$$

según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. *10 ps*

b) Estudiar, en función del valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, el carácter de la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}\,\log(1+x)}\,dx\,.$$ *10 ps*

3.- Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n - 2 + \frac{6}{n+1}\Big)\,x^n\,.$$

a) Determinar el campo de convergencia de la serie. *6 ps*

b) Hallar la función suma en dicho campo de convergencia. *14 ps*

Instrucciones: *Las soluciones de los problemas deben entregarse escritas* **con tinta y en hojas separadas**, *debiendo figurar en cada una los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El valor de cada apartado figura a la derecha. Esta primera parte vale 60 ps sobre la nota total del examen (100 ps).*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º de Matemáticas)
Examen Extraordinario — 9 de Septiembre de 2009.
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:45 a 14:30.

1.- Siendo $a, b \in \mathbb{R}$, determinar la relación entre a y b para que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{a\,n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+b}{n+2}\right)^{n+2}.$$

2.- Sea $p > 1$ fijo. Probar que, para cada $x \in (1, \infty)$, se cumple que

$$(1+x)^p < 2^{p-1}(1+x^p)\,.$$

3.- Sea f una función continua en $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$a_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f^2(x)\, dx\,.$$

Probar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y calcular su límite.

TEMA: A sorteo.

Instrucciones: *Las soluciones a las cuestiones deben entregarse escritas* **con tinta**, *debiendo figurar en cada hoja los* **Apellidos y Nombre, en este orden**, *del alumno. El tema se determinará a sorteo y debe entregarse en hojas aparte. El valor del tema es de 16 ps, y el de cada cuestión de 8 ps, todo ello sobre la nota total de 100 ps.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

25 DE NOVIEMBRE DE 2009

TIEMPO: DE 17:00 A 19:00

1. Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales que verifican la siguiente propiedad: "Para cada $a \in A$ y para cada $b \in B$ se tiene que $a < b$".

   (a) Demostrar que A tiene extremo superior, B tiene extremo inferior y que

   $$\sup A \leq \inf B.$$

   (1 punto)

   (b) Dar un ejemplo de dos conjuntos A y B que verifiquen la propiedad anterior y tales que $\sup A <\inf B$. (0,5 puntos)

   (c) Dar un ejemplo de dos conjuntos A y B que verifiquen la propiedad anterior y tales que $\sup A = \inf B$. (0,5 puntos)

2. Sea $a > 1$. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recurrentemente por

   $$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 2}{x_n + 2}} \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Probar que, para cada n natural, $x_n > 1$. (2 puntos)

   (b) Demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. (2 puntos)

   (c) Calcular su límite. (1 punto)

3. Sea x un número irracional. Probar que existe una sucesión de números racionales que converge hacia x. (1 punto)

4. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Encontrar la relación que existe entre ambos para que

   $$\lim_{x\to\infty} \log[(\frac{x+b}{x})^{x+1}] = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{\frac{x+a}{x}})^{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}}. \quad \text{(2 puntos)}$$

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

PROBLEMAS 9 DE FEBRERO DE 2010

TIEMPO: DE 16:00 A 19:00

1. Sean $f, g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \log(\dfrac{e^x - 1}{x}), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = f(x) - x.$$

   (a) Probar que f es continua en $[0,\infty)$. (2 puntos)

   (b) Demostrar que, para cada $x > 0$, $f(x) > 0$ y $g(x) < 0$.
   (Indicación: Probar que, para cada $x > 0$, $1 + x < e^x$). (10 puntos)

   (c) Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(a_n), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

   i. Estudiar monotonía y acotación de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. (6 puntos)

   ii. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, determinar su límite. (2 puntos)

2. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$. Se supone que

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty.$$

   Demostrar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(a) \leq f(x)$.

   (15 puntos)

3. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} n[\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1] = k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

   (a) Probar que la sucesión $\{\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia uno. (5 puntos)

   (b) Calcular: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1/x_n)}{\log\, n}$. (5 puntos)

   (c) Demostrar que las sucesiones $\{\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{1 + \dfrac{k}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes.

   (5 puntos)

4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcular

$$\lim_{x\to 0}[1 + \cos(\alpha x^8) - \cos(\beta x^8)]^{1/x^{16}}. \qquad \text{(10 puntos)}$$

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 9 DE FEBRERO DE 2010

TIEMPO: DE 19:15 A 21:00

1. Demostrar que, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$,

$$[(1+1)(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n+1})]^2 > 2n+3.$$

(8 puntos)

2. Sea g una función definida en $\mathbb{R}$, continua en el punto $a \in \mathbb{R}$, pero no derivable en $x = a$, y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = (x-a)g(x)$$

Estudiar la derivabilidad de f en $x = a$ y determinar $f'(a)$, si procede.

(8 puntos)

3. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea f una función definida en I. Se dice que f es lipschitziana en I si existe $k > 0$ tal que, cualesquiera que sean x, $y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Probar que, si $f(x) = e^x$, f es lipschitziana en cualquier intervalo compacto $[a, b]$. (8 puntos)

4. Tema: A sorteo (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 19 de abril de 2010

Tiempo: de 17:00 a 19:00

1.- El lado $\overline{AB}$ de un rectángulo esrá sobre el eje OX, y el lado opuesto tiene sus vértices, C y D, sobre la gráfica de la función $y = e^{-x^2/2}$. Determinar los vértices del rectángulo de área máxima.

2.- Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x + \frac{x^2}{2})}{1-\sqrt{1-x^4}}.$$

3.-
Probar que converge la serie

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \cdots$$

y determinar su suma.

4.- Hallar el campo de convergencia y la función suma de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{ch} n)\, x^n.$$

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

Cálculo Infinitesimal

PROBLEMAS 29 DE MAYO DE 2010

TIEMPO: DE 9:00 A 12:00

1. Se considera la función $f : (0, \infty) - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x(x-2)}.$$

   (a) Estudiar la monotonía de f y determinar los extremos relativos de f, caso de que existan. Hacer un esbozo de la gráfica de f. (10 puntos)

   (b) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de f con el eje OX en el intervalo $[e, \infty)$, justificando que tal área tiene sentido. (8 puntos)

   (c) Calcular: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\sqrt[3]{8-x} - 2 + \frac{x}{12}) \cdot \frac{f(x)}{\operatorname{sen} x}.$ (8 puntos)

2. Se define $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\displaystyle F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt.$

   (a) Probar que, cualquiera que sea $x \geq 1$, se cumple que

$$\log x \leq F(x).$$ (6 puntos)

   (b) Demostrar que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t+a}\, dt = e^{-a}[F(x+a) - F(1+a)].$$ (8 puntos)

   (c) Expresar, de forma análoga a la indicada en el apartado b),

$$\int_1^x \frac{e^{at}}{t}\, dt \quad (a > 0).$$ (6 puntos)

3. (a) Calcular, según los diferentes valores de $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}).$$ (6 puntos)

   (b) Estudiar, según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, el caráter de la integral impropia

$$\int_1^\infty x^\alpha (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}})\, dx.$$ (8 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

Cálculo Infinitesimal

CUESTIONES 29 DE MAYO DE 2010

TIEMPO: DE 12:00 A 13:30

1. (a) Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)x^n.$$

(b) Probar la convergencia y calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{2^n}.$$

(8 puntos)

2. Sea f una función continua en $[0,1]$: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$a_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} f^2(x)\,dx.$$

Probar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite. (8 puntos)

3. Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\frac{2}{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}+\cdots+\frac{n}{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n^3}}\right).$$

(8 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 18 junio de 2010

examen final (plan antiguo)

Tiempo: de 16:00 a 19:00

1. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por recurrencia de la forma siguiente:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{x_n^2}{2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   (a) Estudiar monotonía y acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. (14 puntos)

   (b) Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. (6 puntos)

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$,con $n \geq 2$, sea $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(n-t)^n}\, dt$.

   (a) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$,

$$a_n = \log(\frac{n}{n-1}) - \frac{1}{n}. \qquad \text{(6 puntos)}$$

   (b) Demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, se cumple que

$$0 < a_n \leq \frac{1}{2n(n-1)}. \qquad \text{(6 puntos)}$$

   (c) Deducir que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge y que su suma, S, verifica que $0 \leq S \leq \dfrac{1}{2}$.
   (8 puntos)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + |x - n|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   (a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, 1]$ y en $\mathbb{R}$. (8 puntos)

   (b) Calcular: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$. (4 puntos)

   (c) Probar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x)]^2\, dx$, y determinar su valor. (8 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 18 JUNIO DE 2010

PLAN ANTIGUO

TIEMPO: DE 19:15 A 21:00

1. Probar que, cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$x + \log x = a$$

tiene exactamente una raíz en el intervalo $(0, \infty)$. (8 puntos)

2. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y sea f una función definida en I, derivable en un punto $a \in I$. Se define la función $g : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Probar que existe $\lim_{x \to a} g(x)$ y determinar ese límite. (8 puntos)

3. Determinar el campo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n5^n}.$$ (8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

PROBLEMAS 18 JUNIO DE 2010

PRIMER PARCIAL

TIEMPO: DE 16:00 A 19:00

1. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por recurrencia de la forma siguiente:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{x_n^2}{2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   (a) Estudiar monotonía y acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. (14 puntos)

   (b) Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. (6 puntos)

2. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2[\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n] - \log(\pi n 2^{2n+1})}{2n^3}.$$

(20 puntos)

3. Se considera la función $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = t - \log t.$$

   (a) Estudiar la monotonía de f y probar que, para cada $t \in (0, \infty)$,

$$t \geq 1 + \log t.$$ (14 puntos)

   (b) Deducir que, cualesquiera que sean $x > 0$ e $y > 0$,

$$e^{x+y} \geq e^2 (x \cdot y).$$ (6 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 18 JUNIO DE 2010

PRIMER PARCIAL

TIEMPO: DE 19:15 A 21:00

1. Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n}{3n^2+1}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{n}{3n^2+2}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{n}{3n^2+n}\right)\right]. \qquad \text{(8 puntos)}$$

2. Probar que, cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$x + \log x = a$$

tiene exactamente una raíz en el intervalo $(0, \infty)$. (8 puntos)

3. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y sea f una función definida en I, derivable en un punto $a \in I$. Se define la función $g : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Probar que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ y determinar ese límite. (8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 18 junio de 2010

segundo parcial

Tiempo: de 16:00 a 19:00

1. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = a \operatorname{sen} x + a \operatorname{sen}(2x) + x \cos x.$$

   (a) Determinar el desarrollo limitado de orden 5 de f, en $x = 0$. (6 puntos)

   (b) Calcular: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$, y $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{tag} x^5}$. (14 puntos)

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, sea $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(n-t)^n}\, dt$.

   (a) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$,

$$a_n = \log(\frac{n}{n-1}) - \frac{1}{n}. \qquad \text{(6 puntos)}$$

   (b) Demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, se cumple que

$$0 < a_n \leq \frac{1}{2n(n-1)}. \qquad \text{(6 puntos)}$$

   (c) Deducir que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge y que su suma, S, verifica que $0 \leq S \leq \dfrac{1}{2}$.
   (8 puntos)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + |x - n|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   (a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, 1]$ y en $\mathbb{R}$. (8 puntos)

   (b) Calcular: $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$. (4 puntos)

   (c) Probar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x)]^2\, dx$, y determinar su valor. (8 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 18 JUNIO DE 2010

SEGUNDO PARCIAL

TIEMPO: DE 19:15 A 21:00

1. Calcular:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right). \qquad \text{(8 puntos)}$$

2. Hallar el área determinada por las curvas de ecuaciones:

$$y^2 = 3x, \qquad x^2 + y^2 = 4. \qquad \text{(8 puntos)}$$

3. Determinar el campo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n5^n}. \qquad \text{(8 puntos)}$$

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 18 junio de 2010

examen final (grado)

Tiempo: de 16:00 a 19:00

1. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por recurrencia de la forma siguiente:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{x_n^2}{2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   (a) Estudiar monotonía y acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. (14 puntos)

   (b) Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. (6 puntos)

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, sea $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(n-t)^n}\, dt$.

   (a) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$,

$$a_n = \log\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}. \qquad \text{(6 puntos)}$$

   (b) Demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, se cumple que

$$0 < a_n \leq \frac{1}{2n(n-1)}. \qquad \text{(6 puntos)}$$

   (c) Deducir que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge y que su suma, S, verifica que $0 \leq S \leq \dfrac{1}{2}$. (8 puntos)

3. Sea $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{\log x \cdot \log(1-x)}{x}.$$

   (a) Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$. (6 puntos)

   (b) Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$. (14 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 18 JUNIO DE 2010

FINAL (GRADO)

TIEMPO: DE 19:15 A 21:00

1. Probar que, cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$x + \log x = a$$

tiene exactamente una raíz en el intervalo $(0, \infty)$. (8 puntos)

2. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y sea f una función definida en I, derivable en un punto $a \in I$. Se define la función $g : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Probar que existe $\lim_{x \to a} g(x)$ y determinar ese límite. (8 puntos)

3. Determinar el campo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n5^n}.$$ (8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Problemas 13 de septiembre de 2010

Plan antiguo. Tiempo: de 16:00 a 19:00

1. (a) Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(\operatorname{ch} x) - x$. Estudiar la monotonía de f y deducir que la ecuación $\log(\operatorname{ch} x) = x$ tiene una única raíz real. (6 puntos)

   (b) Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por recurrencia de la forma siguiente:
   $$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \log(\operatorname{ch} x_n), \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
   Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite. (8 puntos)

   (c) Estudiar el carácter de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. (6 puntos)

2. Se considera la función $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
   $$g(x) = (x+1)\log(x+1) - x \log x - \log(2x+1).$$

   (a) Calcular los límites siguientes:
   $$\lim_{x\to 0^+} g(x), \quad \lim_{x\to +\infty} g(x), \quad \lim_{x\to 0^+} g'(x), \quad \lim_{x\to +\infty} g'(x).$$ (6 puntos)

   (b) Probar que g'(función derivada de g) es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$ y que g es estrictamente creciente en $(0, \infty)$. (8 puntos)

   (c) Estudiar el carácter de la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g'(n)$. (6 puntos)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por
   $$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{e^{nx}} \quad (x \geq 0).$$

   (a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, \infty)$ y en $[a, \infty)$, siendo $a > 0$. (8 puntos)

   (b) Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x)\, dx$ converge y determinar su valor. Estudiar si es o no cierta la igualdad
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$ (7 puntos)

   (c) Estudiar la convergencia uniforme, en $[1, \infty)$, de la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{e^{nx}}$. (5 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

CUESTIONES 13 DE SEPTIEMBRE DE 2010

GRADO

TIEMPO: DE 19:15 A 21:00

1. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}[\operatorname{arcsen}(\frac{n}{5n^2+1})+\operatorname{arcsen}(\frac{n}{5n^2+2})+\cdots+\operatorname{arcsen}(\frac{n}{5n^2+n})].$$

(8 puntos)

2. Sean a, $b \in [0,1)$, con $a < b$. Demostrar que

$$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \operatorname{arcsen} b - \operatorname{arcsen} a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}.$$

(8 puntos)

3. Probar que, cualquiera que sea $\alpha > 0$, se verifica que

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{-\alpha x^2}}{1+x}\,dx\right| \le \log 2.$$

(8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (16 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

Grado en Matemáticas. Cálculo Infinitesimal

27 de octubre de 2010

1. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales definida por recurrencia por:

$$x_1 = 1; \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{e^{x_n} + e^{-x_n}}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

   Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y determinar su límite.

2. Sea para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   (a) Probar que para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

   (b) Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2\sqrt{n}}$.

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

Grado en Matemáticas. Cálculo Infinitesimal

1 de diciembre de 2010

1. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones de números reales dadas por:

$$x_n = n \cdot (n!)^{a/n}; \qquad y_n = (\frac{2b}{1+b^2})^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Probar que $0 \leq \dfrac{2b}{1+b^2} \leq 1$.

   (b) Calcular el límite de la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

   (c) Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la sucesión $\{n^{a+1} \cdot e^{-a}\}_{n=1}^{\infty}$.

   (d) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n)$.

2. Sea $a \in \mathbb{R}$

   (a) Probar que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x+a)}{\log x} = 1$

   (b) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} [\dfrac{\log(x+a)}{\log x}]^{x \log(x+a)}$.

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

Grado en Matemáticas. Cálculo Infinitesimal

19 de enero de 2011

Tiempo 16:00 a 19:15

1. (a) Demostrar que para cada a, $b \in \mathbb{R}$ se verifica $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b|$. (5 puntos)

   (b) Sea $k \in \mathbb{R}$ con $0 < k < 1$. Probar que la ecuación $1 + x - k \operatorname{sen} x = 0$ tiene un única solución en el intervalo $(-\pi, 0)$. Sea c esta solución. (10 puntos)

   (c) Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

   $$x_1 = a \in \mathbb{R}, \quad x_{n+1} = k(\operatorname{sen} x_n) - 1) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

   Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\quad |x_{n+1} - c| \leq k|x_n - c|$. (10 puntos)

   (d) Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y calcular su límite. (5 puntos)

2. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, tal que

   $$f(1) = 0 \qquad \text{y} \quad f(2) = f(3) = 2.$$

   (a) Probar que existen $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f'(d_1) = 0$ y $f'(d_2) = 1$. (10 puntos)

   (b) Probar que existe $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = \dfrac{1}{2011}$. (10 puntos)

3. Sea f una función derivable en un intervalo abierto I que tiene exactamente dos raices a y b en I. Probar que $f'(a) \cdot f'(b) \leq 0$. (20 puntos)

4. Se consideran las funciones $f(x) = \operatorname{arctg} x$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = 1 + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$.

   (a) Estudiar su crecimiento. (5 puntos)

   (b) Probar que $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [1, +\infty)$. (5 puntos)

5. Tema: a sorteo (20 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

PROBLEMAS 2 DE MARZO DE 2011

TIEMPO: DE 8:30 A 10:55

1. Se considera una pirámide de altura $b > 0$ y base un exágono regular de lado a. Si se verifica que $a^2 + b^2 = 1$, hallar la pirámide que tiene volumen máximo.

(4 puntos)

2. Sea $a > 0$ y $f(x) = \log(a + x) - x\sqrt{a - x}$ para cada $x \in (-a, a)$.

   (a) Obtener el desarrollo limitado de la función f de orden 3, en $x = 0$.

   (3 puntos)

   (b) Calcular:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x - \operatorname{sen} x}.$$

   (1 puntos)

3. Tema: a sorteo. (2 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

PROBLEMAS 27 DE ABRIL DE 2011

TIEMPO: DE 8:30 A 10:55

1. Sea $a > 0$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión dada por

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{e^{x_n}} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. (2 puntos)

   (b) Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ es telescópica y estudiar su carácter. (2 puntos)

2. Se considera la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con

$$a_{8p+1} = \frac{4}{16^p}, \quad a_{8p+5} = \frac{-1}{16^p}, \quad a_n = 0 \text{ si } n \neq 8p+1 \text{ y } n \neq 8p+5.$$

   (a) Hallar el radio de convergencia de dicha serie de potencias. (1 puntos)

   (b) Hallar el radio de convergencia ρ de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n. \qquad \text{(1,5 puntos)}$$

   (c) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Calcular $f'(x)$ para cada $x \in (-\rho, \rho)$. (1,5 puntos)

3. Tema: a sorteo. (2 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL

Examen (15 de julio de 2011)

Tiempo: de 16:00 a 20:00

1. Sea $a > 0$, y sea $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable que verifica $f(0) = f'(0) = 0$ y $f(a) = 0$. Probar que la ecuación $xf'(x) - f(x) = 0$ tiene soluciones en $(0, \infty)$.

   (16 puntos)

   Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, y sea $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha \sqrt{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (8 puntos)

   (b) Sumar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en el caso $\alpha = 1/2$. (8 puntos)

2. Sea $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ para cada $x \in (0, \infty)$ y sea $F : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   $$F(x) = \int_1^x tf'(t)\,dt.$$

   (a) Representar gráficamente la función $y = f(x)$. (8 puntos)

   (b) Hallar el área de la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x > 1, \; 1 < y < f(x)\}$. (8 puntos)

   (c) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [F(x + 1) - F(x)]$. (8 puntos)

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$. Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

   $$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq b, \\ x^2 + 12 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

   (a) Probar que f es derivable con derivada continua en $(0, \infty)$ si y solo si $a = 8\sqrt{2}$ y $b = 2$. (8 puntos)

   (b) Si f es derivable con derivada continua, probar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$ es convergente y calcular su valor.

   (8 puntos)

   (c) Si f es derivable con derivada continua probar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{f(x)}\,dx$ es divergente.

   (8 puntos)

4. Tema: A sorteo. (20 puntos)

Instrucciones: *Escriba con tinta. Las soluciones de ejercicios distintos deben entregarse en hojas separadas, debiendo figurar en cada una de ellas los APELLIDOS y nombre, en este orden, del alumno/a.*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Primera prueba de evaluación continua (3 de noviembre de 2011)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: Propiedades arquimediana y de densidad en $\mathbb{R}$. (4 puntos)

2. Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) \geq \frac{n^3+8n}{3}.$$

(2 puntos)

3. Determinar, razonadamente, los extremos superior e inferior del conjunto

$$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \big((1,2) \cap \mathbb{Q}\big).$$

(2 puntos)

4. Resolver la inecuación

$$\frac{x}{x-1} \leq x.$$

(2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Segunda prueba de evaluación continua (22 de noviembre de 2011)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Calcular
$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\log(n^2+1)-\log(n^2)}}.$$
(2 puntos)

3. Calcular, según los valores del parámetro $p\in\mathbb{Z}$,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^p}.$$
(2 puntos)

4. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por
$$x_1=2\,;\qquad x_{n+1}=\sqrt[4]{2+x_n^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$
Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y hallar su límite.
(2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1[er] curso, Grado en Matemáticas)

Tercera prueba de evaluación continua (12 de diciembre de 2011)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Estudiar la existencia de límite en cada punto $x_0 \in \mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{I}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(2 puntos)

3. Calcular, si existe,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \log(x) \cos(x)}{\sqrt[3]{x^7+1}}.$$

(2 puntos)

4. Determinar si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2}{2x^3+1} \operatorname{sen}(x)$$

existe, y calcularlo en caso afirmativo. (2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Cuarta prueba de evaluación continua (10 de enero de 2012)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Determinar los valores de los parámetros reales a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x}}{x} & \text{si } x > 0, \\ ax + b & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ \dfrac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x < -1, \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$. (2 puntos)

3. Sea $\alpha > 0$. Demostrar que la ecuación

$$e^x - x^\alpha = 2$$

tiene alguna solución en el intervalo $(0, \infty)$. (2 puntos)

4. Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua, con $f(0) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Probar que f alcanza su máximo absoluto en $[0,\infty)$, es decir, existe $x_0 \in [0,\infty)$ tal que $f(x_0) \ge f(x)$ para todo $x \in [0,\infty)$. (2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial — 26 de enero de 2012
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$x_1 \in (3,4) \cup (4,\infty); \quad x_{n+1} = 7 - \frac{12}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Estudiar la monotonía y acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y determinar, si existe, su límite. *12 puntos*

   (b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{x_n}\right)^{1/(x_n^2-16)}$. *8 puntos*

2. (a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que la ecuación

$$x + \operatorname{arctg}(x) = n$$

   tiene una única solución, que llamamos x_n, en $(0,\infty)$. *8 puntos*

   (b) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida en el apartado anterior. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} (n - x_n) = \pi/2.$$ *7 puntos*

   (c) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1-x_1) + \operatorname{sen}(2-x_2) + \ldots + \operatorname{sen}(n-x_n)}{n}.$$ *5 puntos*

3. (a) Demostrar que para todo $x \in (0,1)$ se tiene que

$$x < e^x - 1 < xe^x,$$

   y deducir que

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}.$$ *12 puntos*

   (b) Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Obtener el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{pn}\right),$$

   donde exp denota la función exponencial. *8 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial — 26 de enero de 2012
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $\alpha > 0$. Calcular $\lim_{n\to\infty} \Big((n+1)^\alpha - n^\alpha\Big) \operatorname{sen}^2\big(\frac{1}{n}\big)$. *8 puntos*

2. (a) Sean I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ lipschitziana en I, es decir, tal que existe $L > 0$ de modo que para todos $x, y \in I$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| < L|x - y|.$$

Probar que f es uniformemente continua en I. *3 puntos*

(b) Sea $a > 0$. Deducir que la función $f(x) = \log(x)$, $x \in (a, \infty)$, es uniformemente continua en (a, ∞). *5 puntos*

3. Sea $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1 - x & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f alcanza sus extremos absolutos en $[0, 2]$. *3 puntos*

(b) Determinar dichos extremos absolutos. *5 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Quinta prueba de evaluación continua (28 de febrero de 2012)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - 1 - \frac{x^2}{2}}{\operatorname{sen}^3(x)}$. (2 puntos)

3. Estudiar y esbozar la gráfica de la función $f(x) = x\log(x)$. (2 puntos)

4. Sean $a > 0$, $b > 0$. Determinar el rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y de área máxima. (2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Sexta prueba de evaluación continua (3 de abril de 2012)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Estudiar, en función del parámetro $\alpha > 0$, la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}\alpha^n}{n}$.
(2 puntos)

3. Determinar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(e^{1/n} - 1\big) \operatorname{sen}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$. (2 puntos)

4. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge, y determinar su suma con un error menor que una centésima. (2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1.er curso, Grado en Matemáticas)

Séptima prueba de evaluación continua (8 de mayo de 2012)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Probar que para cada $x > 0$ se tiene que

$$\log(x+1) \leq \int_0^x \frac{e^t}{t+1}\, dt \leq e^x - 1.$$

(2 puntos)

3. Calcular, con las justificaciones adecuadas, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{t}\,\right) dt}{\operatorname{tg}^2(x)}$. (2 puntos)

4. Hallar el área del recinto acotado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = \cos(x)$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$. (2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Octava prueba de evaluación continua (28 de mayo de 2012)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Estudiar la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^4}\, dx.$$

(2 puntos)

3. Estudiar la convergencia de

$$\int_1^\infty \frac{\cos(1+x^3)\log(x)}{x^2}\, dx.$$

(2 puntos)

4. Estudiar la convergencia, y calcular el valor si procede, de

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,)}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx.$$

(2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 19 de junio de 2012
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Sea $f(x) = \log(1-x)$, $x \in (-1,1)$.

   (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $f^{(n)}$. *4 puntos*

   (b) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden n en el punto $x_0 = 0$. *3 puntos*

   (c) Sea $R_n(f,0)$ el resto de Taylor de f de orden n en el punto 0, y admitamos que para cada $x \in (-1,1)$, $\lim_{n\to\infty} R_n(f,0)(x) = 0$. Deducir que
   $$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$ *3 puntos*

   (d) Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$ converge. *7 puntos*

   (e) Sumar la serie del apartado anterior para $a \in (-1,1)$. *7 puntos*

2. Se define $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por
   $$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt.$$

   (a) Estudiar el signo y la monotonía de F. *4 puntos*

   (b) Calcular $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ y $\lim_{x\to\infty} F(x)$. *4 puntos*

   (c) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de F y sus puntos de inflexión. *4 puntos*

   (d) Esbozar la gráfica de F. *3 puntos*

   (e) Demostrar que, si $a > 0$, se tiene que
   $$\int_1^x \frac{e^t}{t+a}\, dt = e^{-a}\Big(F(x+a) - F(1+a)\Big).$$ *5 puntos*

3. Dado un número real α, se considera la función $f(x) = e^{\alpha x} - \cos(x)$.

   (a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x_0 = 0$. *4 puntos*

   (b) Estudiar, en función del valor de α, el carácter de las integrales
   $$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{5/2}e^{2x}}\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{5/2}e^{2x}}\, dx.$$ *12 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 19 de junio de 2012
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Hallar los valores de los parámetros reales a y b para los que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+ae^x)-b\,\mathrm{sen}(x)}{x^2}=1.$$ *8 puntos*

2. Probar que la serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots$$

es convergente, y calcular su suma. *8 puntos*

3. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos(k/n)$. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 19 de junio de 2012
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Sea $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Probar que f es una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. *4 puntos*

   (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea x_n el único número real tal que $f(x_n) = n$. Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente. *3 puntos*

   (c) Deducir el valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$. *2 puntos*

   (d) Teniendo en cuenta que $x_n^3 + x_n = n$ para cada natural n, probar que

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3}{n} = 1.$$ *5 puntos*

   (e) Estudiar la convergencia de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx_n}$. *6 puntos*

2. Sea $f(x) = \log(1 - x)$, $x \in (-1, 1)$.

   (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $f^{(n)}$. *4 puntos*

   (b) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden n en el punto $x_0 = 0$. *3 puntos*

   (c) Sea $R_n(f, 0)$ el resto de Taylor de f de orden n en el punto 0, y admitamos que para cada $x \in (-1, 1)$, $\lim_{n\to\infty} R_n(f, 0)(x) = 0$. Deducir que

   $$\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$ *3 puntos*

   (d) Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$ converge. *7 puntos*

   (e) Sumar la serie del apartado anterior para $a \in (-1, 1)$. *7 puntos*

3. Dado un número real α, se considera la función $f(x) = e^{\alpha x} - \cos(x)$.

   (a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x_0 = 0$. *4 puntos*

   (b) Estudiar, en función del valor de α, el carácter de las integrales

   $$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{5/2} e^{2x}}\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^{5/2} e^{2x}}\, dx.$$ *12 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 19 de junio de 2012
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. (a) Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(n)}$. *3 puntos*

   (b) Calcular $\lim_{n\to\infty} n\big(\sqrt[n]{\log(n)} - 1\big)$. *5 puntos*

2. Probar que la serie

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots$$

   es convergente, y calcular su suma. *8 puntos*

3. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\cos(k/n)$. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen extraordinario — 18 de julio de 2012
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 12:00.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión dada por

$$x_1 \in (0,1), \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Estudiar la monotonía de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *4 puntos*

   (b) Estudiar la acotación de la sucesión. *4 puntos*

   (c) Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$. *3 puntos*

   (d) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(x_n^3)}{x_n^2 - 1}$. *5 puntos*

   (e) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}(-1)^n(1-x_n)$. *6 puntos*

2. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $0 < f(x) < 1$ para todo $x \in [0,2]$.

   (a) Demostrar que existen $\alpha > 0$ y $\beta < 1$ tales que $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ para todo $x \in [0,2]$. *4 puntos*

   (b) Probar que la ecuación

$$x - \int_0^x f(t)\,dt = 2 - 2\beta$$

   admite una única solución en el intervalo $[0,2]$. *14 puntos*

3. Sea $\alpha > 0$, y consideremos la función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \frac{\operatorname{arctg}^2(t)}{t^\alpha}.$$

   (a) Determinar para qué valores de α es convergente la integral

$$\int_0^\infty f(t)\,dt.$$ *14 puntos*

   (b) Deducir del apartado anterior que la función $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{arctg}^2(t)}{t^2}\,dt,$$

   es acotada. *6 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen extraordinario — 18 de julio de 2012
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:15 a 14:00.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n)}\big((n^3+1)^{1/n}-1\big).$$ *6 puntos*

2. Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos(x)-x^2}{\big(1-\cos(x/2)\big)^2}.$$ *6 puntos*

3. Estudiar, en función del valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\Big(e^{1/n}-1\Big).$$ *6 puntos*

4. Probar que para todo $x > 0$ se tiene que
$$\frac{2}{3(x+2)^{2/3}} < \sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x} < \frac{2}{3x^{2/3}},$$
y deducir el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2/3}\big(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}\big)$. *6 puntos*

5. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Primera prueba de evaluación continua (22 de noviembre de 2012)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e + e^{1/2} + \ldots + e^{1/n} - n}{\log(n+1)}.$$
(2 puntos)

3. Sea $\alpha \in (1,2)$. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por
$$x_1 = \alpha\,; \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Probar que $1 < x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (1,5 puntos)

   (b) Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. (1,5 puntos)

   (c) Determinar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. (0,5 puntos)

   (d) Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Determinar razonadamente $\sup A$ e $\inf A$. (0,5 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Segunda prueba de evaluación continua (10 de diciembre de 2012)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. (a) Probar que $\lim_{x\to+\infty}\big(\log(e^x+x)-x\big)=0$. (1 punto)

   Indicación: para cada $x\in\mathbb{R}$ se tiene que $x=\log(e^x)$.

   (b) Probar que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(e^x+x)}{x}=1$. (0,5 puntos)

   (c) Determinar $\lim_{x\to+\infty}\Big(\dfrac{\log(e^x+x)}{x}\Big)^x$. (1,5 puntos)

3. Sea $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ continua en $[0,\infty)$ y tal que $f(0)=0$, $f(2)=3$ y $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$. Probar que f no es inyectiva. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1^er^ curso, Grado en Matemáticas)

Tercera prueba de evaluación continua (14 de enero de 2013)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua en $[0,\infty)$ y tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Probar que f es acotada. (3 puntos)

3. Determinar el valor de las contantes reales a y b para las que la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}(1/x) & \text{si } x > 0, \\ ax + b & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$, y obtener la función f' en ese caso. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial — 7 de febrero de 2013
1ª Parte: PROBLEMAS
Duración: de 16:00 a 18:45

Instrucciones: Escriba con **tinta**.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$x_1 = 2; \quad x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   a) Estudiar la monotonía y acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y determinar, si existe, su límite. *12 puntos*

   b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \big(4 - x_n\big)^{\operatorname{cotg}(3-x_n)}$. *8 puntos*

2. Sean a y b números reales y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + be^x + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Se pide:

   a) Determinar los valores de a y b para los que f es derivable en $\mathbb{R}$. *8 puntos*

   b) Probar que para todo $x > 0$ se tiene que $\operatorname{sen}(x) \leq x$. *6 puntos*

   c) Demostrar que f es acotada en $\mathbb{R}$. *6 puntos*

3. Sea $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0, \infty)$, derivable en $(0, \infty)$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   a) Probar que f alcanza su máximo absoluto en $[0, \infty)$. *10 puntos*

   b) Si además $f(0) = 0$, probar que existe un punto $c > 0$ tal que $f'(c) = 0$. *5 puntos*

   c) Calcular $\max\{xe^{-x} \colon x \geq 0\}$. *5 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial — 7 de febrero de 2013
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA
Duración: de 19:00 a 20:30

Instrucciones: Escriba con **tinta**.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto tal que todos sus puntos son aislados. Probar que A es finito. *8 puntos*

2. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cdots + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}$. *8 puntos*

3. Probar que la ecuación
$$x^2 = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$$
tiene exactamente dos soluciones reales. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1[er] curso, Grado en Matemáticas)

Cuarta prueba de evaluación continua (13 de marzo de 2013)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}^2(x)) - \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen}(x))}{x^4}.$$
(3 puntos)

3. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = x\exp(1/x^2)$. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Quinta prueba de evaluación continua (19 de abril de 2013)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. (a) Estudiar, en función del parámetro real p, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big).$$ (2,5 puntos)

   (b) Sumar dicha serie para $p = 0$. (0,5 puntos)

3. Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Sexta prueba de evaluación continua (22 de mayo de 2013)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Determinar el número de soluciones de la ecuación

$$e^{x^2} + \int_0^{x^2} \frac{e^t}{1+t}\, dt = 2$$

en el intervalo $[0, \infty)$. (3 puntos)

3. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5n^2 + 2kn + k^2}$. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 6 de junio de 2013
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. *a*) Sean $a, b > 0$. Demostrar que $\log(a+b) - \log(a) < \dfrac{b}{a}$. *7 puntos*

   b) Sea α un parámetro real. Estudiar la convergencia de la serie

   $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\big(\log(3^n + 2^n) - n\log(3)\big).$$ *13 puntos*

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ y par, y definamos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

   $$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

   a) Probar que F es impar. *6 puntos*

   b) Supongamos que $f(0) \neq 0$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Estudiar, en función del valor de n, si la función G dada por

   $$G(x) = F(x^n), \quad x \in \mathbb{R},$$

   presenta en el punto 0 un extremo relativo. *14 puntos*

   Sugerencia: estudiar el signo de G' en un entorno de 0.

3. Se considera la función

   $$f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{1+x}, \qquad x \in (-1, \infty).$$

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 3 en $x_0 = 0$. *6 puntos*

   b) Estudiar, en función del valor del parámetro real α, el carácter de la integral

   $$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}}\,dx.$$ *14 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 6 de junio de 2013
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:30.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Estudiar, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n+2)(n^2-1) - 2n(n+1)^2}{n(n+1)(n+2)},$$
y, en caso de convergencia, calcular su suma. *8 puntos*

2. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}$. *8 puntos*

3. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} t^2\, dt}{\operatorname{tg}^3(x)}$. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 6 de junio de 2013
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la forma siguiente:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)\right), \quad n \geq 1.$$

   a) Probar que la sucesión es creciente y todos sus términos están en el intervalo $[0,1]$. *8 puntos*

   b) Demostrar que la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x = 0$$

   carece de raíces en el intervalo abierto $(0,1)$. *8 puntos*

   c) Probar que la sucesión converge hacia 1. *4 puntos*

2. *a*) Sean $a, b > 0$. Demostrar que $\log(a+b) - \log(a) < \dfrac{b}{a}$. *7 puntos*

   b) Sea α un parámetro real. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\big(\log(3^n + 2^n) - n\log(3)\big).$$ *13 puntos*

3. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{1+x}, \qquad x \in (-1, \infty).$$

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 3 en $x_0 = 0$. *6 puntos*

   b) Estudiar, en función del valor del parámetro real α, el carácter de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}}\, dx.$$ *14 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 6 de junio de 2013
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:30.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,\infty)$ y derivable en $(0,\infty)$. Se supone que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, y existen $a, b > 0$ tales que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Probar que la derivada de f ha de anularse en algún punto $x_0 \in (0,\infty)$. *8 puntos*

2. Calcular $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}$. *8 puntos*

3. Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} t^2\, dt}{\operatorname{tg}^3(x)}$. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen extraordinario — 1 de julio de 2013
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $a \in (1,4)$. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recurrentemente por:

$$x_1 = a\,; \qquad x_{n+1} = 6 - \frac{10}{x_n + 1}\,, \quad n \geq 1\,.$$

   a) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (1,4)$. *5 puntos*

   b) Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y calcular su límite. *7 puntos*

   c) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\Big)$.

   Indicación: recordar la equivalencia $\log(x) \sim_1 x - 1$. *10 puntos*

2. *a*) Demuéstrese que la ecuación

$$\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{1+x^2}$$

   tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$, a la que llamamos x_0. *8 puntos*

   b) Probar que la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = x\,\Big(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(x)\Big)$$

   alcanza su máximo absoluto en el intervalo $[0,1]$, y que lo hace precisamente en el punto x_0 determinado en (a). *8 puntos*

   c) Probar que $g(x_0) = \dfrac{x_0^2}{1+x_0^2}$, y deducir que $g(x) \leq 1/2$ para todo $x \in [0,1]$.

   6 puntos

3. Se considera la función

$$G(x) = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{1+e^t}\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Probar que G es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}$ y calcular su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$. *8 puntos*

   b) Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^t}\,dt$, y obtener una expresión no integral de la función G.

   8 puntos

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen extraordinario — 1 de julio de 2013
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:30.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Calcular
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^3)\,\mathrm{sen}(1/x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$$
8 puntos

2. Sea $\alpha > 0$. Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{n^{\alpha+1}\pi + 1}{n^{\alpha}}\right).$$
Indicación: Se sugiere utilizar alguna relación trigonométrica. *8 puntos*

3. Probar que la integral impropia
$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^{5/2}}\,dx$$
es convergente. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Primera prueba de evaluación continua (20 de noviembre de 2013)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema. (4 puntos)

2. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} + \operatorname{tg}(1/n^2) - 1}{\cos(1/n)\log((n+3)/n)}.$$
(2 puntos)

3. Sea $\alpha \in (2,3)$. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por
$$x_1 = \alpha\,; \qquad x_{n+1} = \frac{5x_n - 6}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Probar que $2 < x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (1,5 puntos)

   (b) Estudiar la monotonía de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. (1,5 puntos)

   (c) Determinar $\lim_{n\to\infty} x_n$. (0,5 puntos)

   (d) Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Determinar razonadamente $\sup A$ e $\inf A$. (0,5 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1[er] curso, Grado en Matemáticas)

Segunda prueba de evaluación continua (11 de diciembre de 2013)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema. (4 puntos)

2. Estudiar la existencia de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^2}\right)^{\frac{x^3}{x\sqrt{x}+1}}\cos(x)$. (3 puntos)

3. Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$ y tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Probar que f toma al menos dos veces todos los valores mayores que $f(0)$. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1^{er} curso, Grado en Matemáticas)

Tercera prueba de evaluación continua (13 de enero de 2014)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema. (4 puntos)

2. Sin utilizar la derivación, demostrar que la función $f(x) = x2^{-x}$ alcanza su máximo absoluto en $\mathbb{R}$. (3 puntos)

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua.

   (i) Demostrar que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de (a,b) que es de Cauchy, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ también es de Cauchy. (1 punto)

   (ii) Deducir que existe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y es real. (2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial — 6 de febrero de 2014
1ª Parte: PROBLEMAS
Duración: de 09:00 a 11:45

Instrucciones: Escriba con **tinta**.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea k un número natural con $k > 1$, y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida recurrentemente por

$$x_1 = k; \qquad x_{n+1} = \frac{k\,(1 + x_n)}{k + x_n}\,, \quad n \geq 1\,.$$

   a) Probar que la sucesión es de números racionales. *2 puntos*

   b) Estudiar la monotonía y acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y determinar, si existe, su límite. *13 puntos*

2. Para cada número natural n se consideran las funciones f_n y g_n definidas por

$$f_n(x) = n\,(1-x)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\,x}{2}\right), \quad x \in [0,1]; \quad g_n(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\,x}{2}\right) - \frac{\pi}{2n}(1-x), \quad x \in [0,1).$$

   a) Demostrar que la función g_n se anula en un único punto x_n que se encuentra en el abierto $(0,1)$. *8 puntos*

   b) Demostrar que la función f_n alcanza su máximo absoluto en $[0,1]$, y que lo hace precisamente en el punto x_n del apartado previo. *8 puntos*

   c) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2\,n}\,(1 - x_n) = 0$. *3 puntos*

   d) Teniendo en cuenta que $g_n(x_n) = 0$, deducir que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} n\,x_n = 1$. *8 puntos*

   e) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = \dfrac{\pi}{2e}$. *8 puntos*

3. Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,\infty)$ tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. Probar que f alcanza sus extremos absolutos en $[0,\infty)$. *10 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial — 6 de febrero de 2014
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA
Duración: de 12:00 a 13:45

Instrucciones: Escriba con **tinta**.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $\alpha \in (0,1)$. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}}{n^{1-\alpha}}$. *8 puntos*

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2.$$

Se supone además que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Se pide:

   a) Probar que $f(0) = 0$. *2 puntos*

   b) Probar que f es derivable en 0 y obtener $f'(0)$. *2 puntos*

   c) Probar que f es derivable en $\mathbb{R}$ y obtener $f'(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. *4 puntos*

3. Sea $\alpha \in (0,1)$, y consideremos la función $f(x) = x^\alpha$, $x \geq 1$. Probar, utilizando el teorema de los incrementos finitos, que f es uniformemente continua en $[1, \infty)$.
8 puntos

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Cuarta prueba de evaluación continua (20 de marzo de 2014)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x) - (x^2 + x^4)\cos(x)}{\operatorname{tg}(x^4)\cos(2x)}.$$
(3 puntos)

3. Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,\infty)$ y derivable en $(0,\infty)$, tal que f' está acotada en $(0,\infty)$. Aplicando convenientemente el teorema de los incrementos finitos a la función f, probar que la función g definida por
$$g(x) = \frac{f(x)}{x+1}, \qquad x \in [0,\infty),$$
es acotada. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1er curso, Grado en Matemáticas)

Quinta prueba de evaluación continua (12 de mayo de 2014)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Estudiar, en función del parámetro real a, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} a^n. \qquad \text{(3 puntos)}$$

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$ (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 5 de junio de 2014
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Sea $a \in \mathbb{R}$.

   a) Calcular, si existe, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, a^n$. *6 puntos*

   b) Estudiar la convergencia de la serie

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, a^n. \qquad \textit{14 puntos}$$

2. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

   a) Estudiar la paridad, monotonía y concavidad de F. *8 puntos*

   b) Calcular

   $$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - x}{\operatorname{sen}^3(x) - x^2 \log(1 + 2x)}. \qquad \textit{8 puntos}$$

   c) Probar que F es acotada. *4 puntos*

3. Se considera la función

   $$f(x) = xe^{2x} - \log(1 + x), \qquad x \in (-1, \infty).$$

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x_0 = 0$. *4 puntos*

   b) Probar que la función f es estrictamente positiva en $(0, \infty)$. *4 puntos*

   c) Estudiar, en función del valor del parámetro real α, el carácter de la integral

   $$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^x}{f(x)}\, dx. \qquad \textit{12 puntos}$$

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 5 de junio de 2014
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:30.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Se sabe que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}$ y
$$f(0) = f'(0) = 0, \qquad f''(0) \neq 0.$$
Probar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y deducir para qué valores de $a > 0$ converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} f\big(\frac{1}{n^a}\big).$$
8 puntos

2. Calcular $\lim_{n\to\infty} \big(\dfrac{n+1}{n^2+1} + \dfrac{n+2}{n^2+4} + \ldots + \dfrac{n+n}{n^2+n^2}\big)$. *8 puntos*

3. Sea $a < 1$, y sea $f\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ una función continua tal que $f(x) \leq x^a$ para todo $x \geq 1$. Se define
$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt, \qquad x \geq 1.$$
Calcular $\lim_{x\to\infty} \Big(F\big(x + \dfrac{1}{x}\big) - F(x)\Big)$. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 5 de junio de 2014
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función f_n como

$$f_n(x) = x^2(n - x) + 1, \qquad x \geq 0.$$

   a) Estudiar la monotonía de la función f_n. *4 puntos*

   b) Demostrar que f_n se anula en un único punto, que llamamos x_n, de su dominio, y que $x_n \in (n, n+1)$. *7 puntos*

   c) Deducir que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y tiende a $+\infty$, y que $\{x_n - n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y tiende a 0. *5 puntos*

   d) Probar que $\{x_n - n\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{1/n^2\}_{n=1}^{\infty}$. *4 puntos*

2. Sea $a \in \mathbb{R}$.

   a) Calcular, si existe, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\, a^n$. *6 puntos*

   b) Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, a^n.$$ *14 puntos*

3. Se considera la función

$$f(x) = xe^{2x} - \log(1 + x), \qquad x \in (-1, \infty).$$

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x_0 = 0$. *4 puntos*

   b) Probar que la función f es estrictamente positiva en $(0, \infty)$. *4 puntos*

   c) Estudiar, en función del valor del parámetro real α, el carácter de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^x}{f(x)}\, dx.$$ *12 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 5 de junio de 2014
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:30.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 1$. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{\log(n)}.$$
8 puntos

2. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \ldots + \frac{n+n}{n^2+n^2}\right)$. *8 puntos*

3. Sea $a < 1$, y sea $f\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ una función continua tal que $f(x) \le x^a$ para todo $x \ge 1$. Se define
$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt, \qquad x \ge 1.$$
Calcular $\lim_{x\to\infty} \Big(F\big(x + \frac{1}{x}\big) - F(x)\Big)$. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen extraordinario — 2 de julio de 2014
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función f_n como

$$f_n(x) = x^3 - n^4 x - 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Estudiar la monotonía de la función f_n y sus extremos, y esbozar su gráfica. *6 puntos*

   b) Demostrar que en el intervalo $(0, \infty)$ la función f_n se anula en un único punto, que llamamos x_n, tal que $x_n \in (n^2, n^2 + 1)$. *6 puntos*

   c) Deducir que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y tiende a $+\infty$, y que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^2} = 1$. *5 puntos*

   d) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^4(x_n - n^2) = 1$. *4 puntos*

   e) Estudiar el carácter de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x_n}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x_n}}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - n^2)$. *8 puntos*

2. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1 + t^2}\, dt.$$

   a) Estudiar la monotonía de F. *3 puntos*

   b) Probar que si $x > 0$ se tiene que $F(x) \leq 1 - e^{-x}$. *4 puntos*

   c) Probar que la gráfica de F admite una asíntota horizontal. *4 puntos*

   d) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - \operatorname{arctg}(x)}{x \operatorname{sen}(x)}.$$ *4 puntos*

3. Sea $\alpha > 0$. Se considera la función

$$f(x) = \log(1 + x) + e^{-\alpha x} - 1, \qquad x \in (-1, \infty).$$

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x_0 = 0$. *4 puntos*

   b) Estudiar, en función del valor del parámetro real α, el carácter de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x^3}\, dx.$$ *12 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen extraordinario — 2 de julio de 2014
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\Big((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\Big).$$ *8 puntos*

2. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]$ y tal que $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$. Probar que existe un punto $d \in (a,b)$ tal que $f''(d) = 0$. *8 puntos*

3. Sea $a > 0$. Estudiar la convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+2)},$$
y sumarla para $a = 1$. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL

1er curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Primera prueba de evaluación continua (28 de octubre de 2014)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema. (4 puntos)

2. Sea
$$A = \{x \in \mathbb{I} : \frac{2x}{x-2} < 1\} \cup \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$
Probar que A es acotado y determinar, justificadamente, los extremos superior e inferior de A. (3 puntos)

3. Sea $\alpha \in [0,3]$. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por
$$x_1 = \alpha\,; \qquad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
(a) Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. (1 punto)
(b) Estudiar la monotonía de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Es convergente la sucesión? (2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL

1$^{\text{er}}$ curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Segunda prueba de evaluación continua (2 de diciembre de 2014)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema. (4 puntos)

2. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión dada por

$$x_1 > 1, \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. (1,5 puntos)

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\big(2(x_n - 1)\big)}{x_n^6 - 1}$. (0,75 puntos)

c) Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Determinar el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \big(f^2(x_n) + f(x_n^2)\big).$$ (0,75 puntos)

3. *a*) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1$. (0,75 puntos)

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2\log(2)} + \dfrac{1}{3\log(3)} + \ldots + \dfrac{1}{n\log(n)}}{\log(\log(n))}$. (2,25 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas y Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones)
Examen parcial — 23 de enero de 2015
1ª Parte: PROBLEMAS
Duración: de 09:00 a 11:45

Instrucciones: Escriba con **tinta**.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida recurrentemente por

$$x_1 \in (1,2); \qquad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n^2 + \frac{2}{3}, \quad n \geq 1.$$

   a) Estudiar la monotonía y acotación de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y determinar, si existe, su límite. *12 puntos*

   b) Si suponemos que x_1 es mayor que 2, ¿la sucesión tiene límite? *5 puntos*

2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n e^{-x}$.

   a) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. *3 puntos*

   b) Sin utilizar la derivación, probar que f está acotada y alcanza su máximo absoluto en $[0,\infty)$. *8 puntos*

   c) Utilizando la derivada, determinar razonadamente el valor de dicho máximo y en qué punto se alcanza. *6 puntos*

3. Para cada número natural n se considera la función f_n definida por

$$f_n(x) = x^5 + nx^3 - 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Demostrar que la función f_n se anula en un único punto $x_n > 0$. *8 puntos*

   b) Teniendo en cuenta que $f_n(x_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, probar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y converge hacia 0. *7 puntos*

   c) Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}_{n=1}^{\infty}$. *4 puntos*

   d) Sea α un número real, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x_n)^{n^{\alpha}}$. *7 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas y Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones)
Examen parcial — 23 de enero de 2015
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA
Duración: de 12:00 a 13:45

Instrucciones: Escriba con **tinta**.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $\alpha > 0$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha^n (2n)!}{(n!)^2}$. *8 puntos*

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b)$ y tal que existe y es finito $\lim_{x\to b} f(x)$. Probar que f es uniformemente continua en $[a,b)$. *8 puntos*

3. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, derivable en 0 y con $f(0) = 0$.
   a) Comprobar que $\lim_{n\to\infty} nf(1/n) = f'(0)$. *4 puntos*
   b) Calcular, si existe, el valor de
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(1) + f(1/2) + \cdots + f(1/n)}{\log(n)}.$$ *4 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL

1^{er} curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Tercera prueba de evaluación continua (17 de marzo de 2015)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema. (4 puntos)

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^4(x) - \cos\left(e^{x^2} - 1\right) + 1}{\operatorname{tg}^2(x)\big(\log(1+x) - x\big)}$. (3 puntos)

3. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL

1$^{\text{er}}$ curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Cuarta prueba de evaluación continua (7 de mayo de 2015)

Tiempo: de 09:00 a 10:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema: A sorteo. (4 puntos)

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^n}{n^2+1}$. (4 puntos)

3. Calcular
$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx.$$ (2 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas y Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones)
Examen parcial y final — 8 de junio de 2015
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Sean $\alpha > 0$ y $f\colon (-1/\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x - \log(1 + \alpha x)}{x^2 + 1}.$$

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x = 0$. *4 puntos*

   b) Estudiar, según los valores de α, la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$. *6 puntos*

   c) A partir de ahora fijemos $\alpha = 1$. Comprobar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2 f'(x)}{x^2} = -1.$$ *5 puntos*

   d) Deducir que f es decreciente en un intervalo (x_0, ∞), con $x_0 > 0$ adecuado. *4 puntos*

   e) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$. *5 puntos*

2. Sea f una función par, derivable en $\mathbb{R}$ y con $f(0) = 0$.

   a) Probar que $f'(0) = 0$. *4 puntos*
   Se define $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} f(t)\, dt.$$

   b) Probar que F es una función impar y periódica. *7 puntos*

   c) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2}$. *6 puntos*

   d) Obtener F si $f(t) = t \operatorname{sen}(t)$. *4 puntos*

3. Sean $\alpha > 0$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - \alpha \operatorname{sen}(x)$.

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x = 0$. *2 puntos*

   b) Estudiar, según los valores de α, la convergencia de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}\sqrt{1+x}}\, dx.$$ *13 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas)
Examen parcial y final — 8 de junio de 2015
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:30.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Sea I un intervalo abierto tal que $0 \in I$, y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I y tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, y $|f''(x)| \leq 2$ para todo $x \in I$. Probar que
$$|f(x) - x| \leq x^2, \quad x \in I.$$
8 puntos

2. Estudiar, según los valores del parámetro real α, la convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)^n}{n^2+n}.$$
8 puntos

3. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^4}\sqrt{\frac{n^3-k^3}{n}}.$ *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas y Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones)
Examen parcial y final — 8 de junio de 2015
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Sea $f(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

   a) Estudiar la monotonía, extremos relativos, convexidad y asíntotas de f, y esbozar su gráfica. *7 puntos*

   b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, demostrar que en el intervalo $(0, \infty)$ la ecuación $f(x) = n$ tiene una única solución, que llamamos x_n. *4 puntos*

   c) Probar que $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ es creciente y tiende hacia ∞. *5 puntos*

   d) Comprobar que $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ es equivalente a $\{\log(n)\}_{n=2}^{\infty}$. *5 puntos*

2. Sean $\alpha > 0$ y $f\colon (-1/\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{x - \log(1 + \alpha x)}{x^2 + 1}.$$

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x = 0$. *4 puntos*

   b) Estudiar, según los valores de α, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$. *6 puntos*

   c) A partir de ahora fijemos $\alpha = 1$. Comprobar que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2 f'(x)}{x^2} = -1.$$ *5 puntos*

   d) Deducir que f es decreciente en un intervalo (x_0, ∞), con $x_0 > 0$ adecuado. *4 puntos*

   e) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$. *5 puntos*

3. Sean $\alpha > 0$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - \alpha \operatorname{sen}(x)$.

   a) Obtener el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en $x = 0$. *2 puntos*

   b) Estudiar, según los valores de α, la convergencia de la integral
$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}\sqrt{1+x}}\, dx.$$ *13 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas y Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones)
Examen parcial y final — 8 de junio de 2015
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:30.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $[a,b]$. Probar que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión convergente. *8 puntos*

2. Sea I un intervalo abierto tal que $0 \in I$, y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I y tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, y $|f''(x)| \le 2$ para todo $x \in I$. Probar que
$$|f(x) - x| \le x^2, \quad x \in I.$$
8 puntos

3. Calcular $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^4}\sqrt{\frac{n^3-k^3}{n}}$. *8 puntos*

4. Tema de teoría: a sorteo. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas y del Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones)
Examen extraordinario — 10 de julio de 2015
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante

$$x_1 \in (2,4), \quad x_{n+1} = \sqrt{6x_n - 8}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   a) Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada, y determinar su límite. *8 puntos*

   b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n^2 - 15)^{1/(4-x_n)}$. *5 puntos*

   c) Comprobar que, para cada n natural, se tiene que

$$4 - x_{n+1} = \frac{6(4-x_n)}{4+\sqrt{6x_n-8}}.$$ *3 puntos*

   d) Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(4-x_n)$. *5 puntos*

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función f_n como

$$f_n(x) = n(2 - e^{-x}) - x, \qquad x \in [0,\infty).$$

   a) Estudiar la monotonía de la función f_n. *4 puntos*

   b) Probar que $\max\{xe^{1-2x} : x \in [0,\infty)\} = 1/2$. *5 puntos*

   c) Demostrar que en el intervalo $(0,\infty)$ la función f_n se anula en un único punto, que llamamos x_n, tal que $x_n \in (2n-1, 2n)$. *7 puntos*

   d) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}(2n - x_n) = 0$. *4 puntos*

   e) Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}$. *4 puntos*

3. *a*) Estudiar, en función del valor del parámetro real positivo α, el carácter de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^{-x^2} - \alpha)\,\mathrm{arctg}(x)}{x^{\alpha}}\,dx.$$ *12 puntos*

   b) ¿Converge la integral si $\alpha = 0$? *3 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas y del Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones)
Examen extraordinario — 10 de julio de 2015
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:30.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)+\left(n+\frac{2}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2+2}\right)+\cdots+(n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)\right).$$ *8 puntos*

2. Sean f y g funciones reales continuas en el intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b), de modo que $f(a)=0$ y $g(b)=0$.

   a) Probar que existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)g(c)=-f(c)g'(c)$. *5 puntos*

   b) Probar que existe $d\in(a,b)$ tal que $g(d)=(a-d)g'(d)$. *3 puntos*

3. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua y tal que $f(x)\geq x$ para todo $x\in[0,1]$. Demostrar que la ecuación

$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt=\frac{1}{2}$$

   tiene una única solución en $[0,1]$. *8 puntos*

4. Tema de teoría. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL

1$^{\text{er}}$ curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Programa Conjunto Matemáticas–Física

Primera prueba de evaluación continua (21 de octubre de 2014)

Tiempo: de 12:00 a 13:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema 2. Monotonía, acotación y convergencia. (4 puntos)

2. Sea
$$A = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{2m}\right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$
Probar que A es acotado y determinar, justificadamente, los extremos superior e inferior de A. (3 puntos)

3. Sea $\alpha > 0$. Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por
$$x_1 = \alpha\,; \qquad x_{n+1} = \frac{3 + x_n}{2 + 2x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
(a) Probar que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (0,5 puntos)

(b) Probar que $|x_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}\,|x_n - 1|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (1 punto)

(c) Probar que $|x_n - 1| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}\,|\alpha - 1|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (0,5 puntos)

(d) Calcular el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. (1 punto)

CÁLCULO INFINITESIMAL

1^{er} curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Programa Conjunto Matemáticas–Física

Segunda prueba de evaluación continua (18 de noviembre de 2015)

Tiempo: de 12:00 a 13:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema 6. Caracterización secuencial de los conjuntos compactos. (4 puntos)

2. Calcular $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+1}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}}+\cdots+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-n}{\log(n)}$. (3 puntos)

3. Calcular $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{n^2\big(e-e^{\cos(1/n)}\big)}$. (3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas,
Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones,
Programa Conjunto Matemáticas–Física)
Examen parcial — 19 de enero de 2016
1ª Parte: PROBLEMAS
Duración: de 16:00 a 18:45

Instrucciones: Escriba con **tinta**.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida recurrentemente por

$$x_1 = 1; \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1\,.$$

   (a) Estudiar la monotonía de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *5 puntos*

   (b) Probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. *4 puntos*

   (c) Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}.$$
4 puntos

   (d) Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\log(n)}.$$
6 puntos

2. Para cada número natural n se considera la ecuación

$$x^5 + e^x = n + 1.$$

   (a) Demostrar que la ecuación tiene una única solución real, que denominamos x_n. *8 puntos*

   (b) Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y tiende hacia infinito. *6 puntos*

   (c) Justificar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^5}{e^{x_n}} = 0$. *4 puntos*

   (d) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{x_n}}{n+1} = 1$, y deducir que $x_n \sim \log(n)$. *7 puntos*

3. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[0,1]$, tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

   (a) Demostrar que existe $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 1$. *4 puntos*

   (b) Supongamos a partir de ahora que $f'(0) > 1$. Probar que existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) > x_0$. *5 puntos*

   (c) Deducir que ha de existir $d \in (0,1)$ tal que $f'(d) < 1$. *7 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas, Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones, Programa Conjunto Matemáticas–Física)
Examen parcial — 19 de enero de 2016
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA
Duración: de 19:00 a 20:45

Instrucciones: Escriba con **tinta**.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en la **parte superior de cada hoja**. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Calcular
$$\inf\left\{n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}.$$ *8 puntos*

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que para cada $x \in [0,1]$ existe $y \in [0,1]$ tal que
$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|f(x)|.$$
Demostrar que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$. *8 puntos*

3. Calcular el conjunto imagen de la función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$ *8 puntos*

4. Tema de teoría: Teorema de Heine. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL

1^er curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Programa Conjunto Matemáticas–Física

Tercera prueba de evaluación continua (6 de abril de 2016)

Tiempo: de 12:00 a 13:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema 15. Condición suficiente de extremo relativo. (4 puntos)

2. Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \operatorname{tg}(x)\log(1+x^2)}{\operatorname{arc\,tg}(x) - \operatorname{sen}(x) + x^3/6}.$$
(3 puntos)

3. Determinar, en función del valor de $a > 0$, el carácter de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \log(1+a^n).$$
(3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL

1^{er} curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Programa Conjunto Matemáticas–Física

Cuarta prueba de evaluación continua (11 de mayo de 2016)

Tiempo: de 12:00 a 13:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Tema 20. Integrabilidad de las funciones continuas y de las funciones monótonas.

(4 puntos)

2. Estudiar la convergencia absoluta y la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

(3 puntos)

3. Calcular

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)dx}{(1+\cos(x))(\operatorname{sen}^2(x)-2)}.$$

(3 puntos)

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas, Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones, Programa Conjunto Matemáticas–Física)
Examen parcial y final — 8 de junio de 2016
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 18:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Estudiar, en función del parámetro $x \in \mathbb{R}$, el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+2^n)}.$$ *20 puntos*

2. Sea $\phi : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{e^t}{\operatorname{sen}(t)}\, dt, \quad 0 < x < 1.$$

   (a) Probar que $\operatorname{sen}(t) \leq t\, e^t$ si $t > 0$. *4 puntos*

   (b) Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = +\infty$. *7 puntos*

   (c) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de la función

$$h(x) = e^x \operatorname{sen}(x^2) - 2xe^{x^2} \operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$ *4 puntos*

   (d) Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\phi(x)}{\log(x)} = -1.$ *7 puntos*

3. Sean $\alpha > 0$ y $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^x - \log(1+x) - 1.$$

   (a) Probar que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0,\infty)$. *6 puntos*

   (b) Estudiar, según los valores de α, la convergencia de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{f(x)}\, dx.$$ *12 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas, Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones, Programa Conjunto Matemáticas–Física)
Examen parcial y final — 8 de junio de 2016
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:00 a 20:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN SÓLO DEL SEGUNDO PARCIAL

1. Probar que
$$\cos(x) - 1 \geq -\frac{2}{\pi}\,x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$
8 puntos

2. Estudiar, según los valores del parámetro real a, la convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{Sh}(n).$$
Calcular su suma cuando la serie sea convergente. *8 puntos*

3. Estudiar la convergencia de la integral
$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$
Calcular su valor, si procede. *8 puntos*

4. Tema de teoría. Tema 22: Regla de Barrow generalizada. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas, Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones, Programa Conjunto Matemáticas–Física)
Examen parcial y final — 8 de junio de 2016
1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 16:00 a 18:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = x^3 - 3n^2x + n.$$

   (a) Estudiar la monotonía de f_n y esbozar su gráfica. *4 puntos*

   (b) Probar que f_n se anula en el intervalo (n, ∞) en un único punto, que llamamos x_n. *6 puntos*

   (c) Probar que

$$\sqrt{3}\,n - x_n = \frac{n}{x_n(\sqrt{3}\,n + x_n)} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$ *3 puntos*

   (d) Probar que

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{3}\,n - x_n) = 0$$

   y deducir que $x_n \sim \sqrt{3}\,n$. *7 puntos*

2. Sea $\phi : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{e^t}{\operatorname{sen}(t)}\, dt, \quad 0 < x < 1.$$

   (a) Probar que $\operatorname{sen}(t) \le t\, e^t$ si $t > 0$. *4 puntos*

   (b) Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = +\infty$. *7 puntos*

   (c) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de la función

$$h(x) = e^x \operatorname{sen}(x^2) - 2xe^{x^2} \operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$ *4 puntos*

   (d) Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\phi(x)}{\log(x)} = -1$. *7 puntos*

3. Sean $\alpha > 0$ y $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^x - \log(1 + x) - 1.$$

   (a) Probar que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$. *6 puntos*

   (b) Estudiar, según los valores de α, la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{f(x)}\, dx.$$ *12 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas, Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones, Programa Conjunto Matemáticas–Física)
Examen parcial y final — 8 de junio de 2016
2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 19:00 a 20:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

ALUMNOS QUE SE EXAMINAN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Sea $a > 1$. Calcúlese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1) + \cos(2) + \ldots + \cos(n)}{n^a}.$$

Si $a \in (0, 1]$, ¿se obtiene el mismo valor para el límite? *8 puntos*

2. Demuéstrese que

$$\left|\operatorname{sen}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) - \operatorname{sen}(x)\right| \leq \frac{1}{x} \quad \text{si } x > 0\,.$$

Dedúzcase el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/2}\Big(\operatorname{sen}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) - \operatorname{sen}(x)\Big)\,.$$

8 puntos

3. Estudiar, según los valores del parámetro real a, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{Sh}(n).$$

Calcular su suma cuando la serie sea convergente. *8 puntos*

4. Tema de teoría. Tema 9: Teorema de Weierstrass. *16 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas, Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones, Programa Conjunto Matemáticas–Física)

Examen extraordinario — 4 de julio de 2016

1ª Parte: PROBLEMAS. Duración: de 9:00 a 11:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Se considera la función $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x - \log(1 + x).$$

   (a) Estudiar la monotonía de la función f. *4 puntos*

   (b) Probar que $0 < f(x) < \dfrac{x^2}{2}$ para todo $x > 0$. *4 puntos*

   (c) Se define la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = x_n - \log(1 + x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada, y determinar su límite. *6 puntos*

   (d) Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. *6 puntos*

2. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de periodo $T > 0$ y continua, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe una constante $k > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \le k\,|g(x) - g(y)| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Demostrar que f es periódica de periodo $T > 0$. *4 puntos*

   (b) Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$. *6 puntos*

   (c) Demostrar que f es acotada en $\mathbb{R}$. *5 puntos*

   (d) Si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g'(x_0) = 0$, probar que f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$. *5 puntos*

3. (a) Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^{3/2})}{x^2}\,dx$. *8 puntos*

   (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos

$$a_n = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{arctg}(x^{3/2})}{x^2}\,dx.$$

   Estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *3 puntos*

   (c) Probar que $\dfrac{\operatorname{arctg}(n^{3/2})}{(n+1)^2} \le a_n \le \dfrac{\operatorname{arctg}((n+1)^{3/2})}{n^2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Deducir el valor del límite $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$. *6 puntos*

   (d) Estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$. *3 puntos*

CÁLCULO INFINITESIMAL (1º del Grado de Matemáticas, Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones, Programa Conjunto Matemáticas–Física)

Examen extraordinario — 4 de julio de 2016

2ª Parte: CUESTIONES Y TEORÍA. Duración: de 12:00 a 13:45.

Instrucciones: Escriba con **tinta**. Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 100 puntos aparece a la derecha.

1. Sea f una función definida en un entorno I de 0 y derivable en 0. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $I \setminus \{0\}$ que converge hacia 0. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(0)}{\operatorname{sen}(a_n) + \operatorname{tg}(a_n)}.$$

8 puntos

2. En función de k, ¿cuántas raíces tiene la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + k$ en el intervalo $[0, 2]$? *8 puntos*

3. Sea f una función continua en $[0, 1]$. Sea φ la función definida en $[0, 1]$ por

$$\varphi(x) = \int_0^1 t f(xt)\, dt.$$

Probar que para $x > 0$ se tiene que

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u)\, du,$$

y calcular $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$. *8 puntos*

4. **Tema de teoría:**

Tema 13. Teoremas de valor medio del cálculo diferencial. *16 puntos*