INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

4º curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Primera prueba de evaluación continua (7 de noviembre de 2017)

Tiempo: de 14:00 a 15:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Si S es un subconjunto denso del espacio normado E, demostrar que todo elemento de E se puede escribir como suma de una serie absolutamente convergente de elementos de S.

(3 puntos)

2. Sea E un espacio normado y $T \in \mathcal{L}(E)$. Probar que

$$||T|| = \sup\{\, |f(Tx)| : x \in E,\ \|x\| = 1,\ f \in E',\ \|f\| = 1\}.$$

(3 puntos)

3. Se considera en c_0 el conjunto H de las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0$.

(i) Probar que H es un hiperplano cerrado. (2 puntos)

(ii) Si $a \in c_0 \setminus H$, probar que no existe $b \in H$ tal que $\operatorname{dist}(a, H) = \|a - b\|_\infty$. (2 puntos)

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

4º curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Segunda prueba de evaluación continua (30 de noviembre de 2017)

Tiempo: de 13:00 a 14:00 horas

Instrucciones:
Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de un espacio normado E es débilmente convergente hacia $x \in E$ si para todo $f \in E'$ se tiene que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $f(x)$.

   Se dice que un conjunto $A \subset E$ es débilmente cerrado si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converja débilmente hacia un punto x se deduce que $x \in A$.

   (i) Probar que todo conjunto débilmente cerrado es cerrado. (1 puntos)

   (ii) Probar que todo subespacio cerrado es débilmente cerrado. (2 puntos)

   (iii) Probar que el conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^2(\mathbb{R})$, formado por las sucesiones e_n con todos sus términos nulos excepto un 1 en la posición n-ésima, es cerrado pero no débilmente cerrado en $\ell^2(\mathbb{R})$.

   (2 puntos)

2. Sea E el espacio vectorial $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ dotado de la norma $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, y consideramos el subespacio
$$L = \{f \in E \colon f(0) = 0\}.$$
   Fijada una función $a \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, se define el operador $T\colon L \to (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ dado por
$$T(f) = f' + af, \qquad f \in L.$$
   Se pide:

   (i) Probar que L es un espacio de Banach. (1 puntos)

   (ii) Probar que T es continuo. (1 puntos)

   (iii) Demostrar que T admite inversa continua. (3 puntos)

   Indicación: Se puede utilizar en este apartado el teorema de existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy adecuado.

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

4º curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Examen final (11 de enero de 2018)

Tiempo: de 9:00 a 13:00 horas

Instrucciones: Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Se consideran los espacios normados $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ y $F = (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|)$, donde $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ para cada $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

   (a) Demostrar que $\varphi : F \to \mathbb{R}$, dado por $\varphi(f) = f'(1/2)$, es un funcional lineal y continuo en F, y calcular su norma. (1 punto)

   Indicación: Para el cálculo de la norma basta esbozar la gráfica de funciones adecuadas que permitan deducir el valor de la misma.

   (b) Probar que φ no es continuo si a $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ se le dota de la topología de subespacio de E. (0,5 puntos)

2. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de escalares tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$ converge para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^1$. Probar que $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ está acotada. (1,5 puntos)

3. Si f es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$, probar que dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tal que
$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |f'(x) - p'(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$ (1,5 puntos)

4. Sean X, Y y Z espacios de Banach, A_1 una aplicación lineal y continua de X en Z, y A_2 una aplicación lineal y continua de Y en Z. Supongamos que para cada $x \in X$ la ecuación $A_1(x) = A_2(y)$ tiene una única solución $y \in Y$, y pongamos $y = A(x)$. Demostrar que A es una aplicación lineal y continua de X en Y. (1,5 puntos)

5. Sea H un espacio de Hilbert. Probar que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a x si, y sólo si, $\{<x_n, y>\}_{n=1}^\infty$ converge hacia $<x, y>$ uniformemente en $\{y \in H : \|y\| = 1\}$. (1,5 puntos)

6. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $A\colon H \to H$ un operador lineal, continuo y autoadjunto. Se consideran los operadores D_1 y D_2 definidos por
$$D_1 x = Ax + ix, \quad D_2 x = Ax - ix, \quad x \in H.$$

   (a) Calcular $||D_j x||^2$, $j = 1, 2$, y deducir que D_1 y D_2 son inyectivos. (0,5 puntos)

   (b) Probar que si $z \in H$ es ortogonal al rango de D_1, entonces $z = 0$. Deducir que el rango de D_1 es denso en H. Proceder de forma análoga para D_2. (1 punto)

   (c) Utilizando lo obtenido en (a), probar que el rango de D_1 es cerrado, y concluir que D_1 es sobre (el resultado análogo para D_2 no ha de probarse). (0,5 puntos)

   (d) Demostrar que D_1^{-1} es continuo. (0,5 puntos)

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

Soluciones del examen final de 11 de enero de 2018

1. Se consideran los espacios normados $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ y $F = (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|)$, donde $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ para cada $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

   (a) Demostrar que $\varphi : F \to \mathbb{R}$, dado por $\varphi(f) = f'(1/2)$, es un funcional lineal y continuo en F, y calcular su norma. (1 punto)

   Indicación: Para el cálculo de la norma basta esbozar la gráfica de funciones adecuadas que permitan deducir el valor de la misma.

   (b) Probar que φ no es continuo si a $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ se le dota de la topología de subespacio de E. (0,5 puntos)

   Solución:

   (a) La linealidad de φ se debe a la de la derivación. Además,

   $$|\varphi(f)| = |f'(1/2)| \leq \|f'\|_\infty \leq \|f\|,$$

   luego φ es también acotada, y por lo tanto continua, y $\|\varphi\| \leq 1$. Para ver que la norma es precisamente 1 basta construir funciones f_n de norma infinito igual a 1 que presenten en el punto 1/2 el máximo de $|f_n'|$, con $f_n'(1/2) = n$, teniéndose entonces que

   $$\|\varphi\| \geq \frac{|f_n'(1/2)|}{\|f_n\|} = \frac{n}{1+n} \to 1 \text{ cuando } n \to \infty.$$

   Alternativamente, se pueden construir funciones f_n de norma infinito igual a $1/n$ que presenten en el punto 1/2 el máximo de $|f_n'|$, con $f_n'(1/2) = 1$.

   (b) Basta observar que, para cualquiera de las sucesiones construidas en el apartado anterior, se tiene que

   $$\frac{|f_n'(1/2)|}{\|f_n\|_\infty} \to \infty \text{ cuando } n \to \infty.$$

2. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de escalares tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$ converge para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^1$. Probar que $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ está acotada. (1,5 puntos)

   Solución: Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ el operador lineal $T_k : \ell^1 \to \mathbb{K}$ dado por

   $$T_k(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^k \alpha_n x_n.$$

   Es claro que T_k es continuo y $\|T_k\| = \max\{|\alpha_n| : 1 \leq n \leq k\}$. Por otra parte, por hipótesis sabemos que para todo $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^1$ existe $\lim_{k\to\infty} T_k(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$, y un corolario del teorema de Banach-Steinhaus garantiza que entonces $\sup\{\|T_k\| : k \in \mathbb{N}\} < \infty$, es decir, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ está acotada.

3. Si f es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$, probar que dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tal que

   $$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |f'(x) - p'(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in [a,b]. \qquad (1{,}5 \text{ puntos})$$

Solución: Por el teorema de Weierstrass, y puesto que $f' \in \mathcal{C}([a,b])$, dado $\delta > 0$ existe un polinomio Q tal que $\|f' - Q\|_\infty < \delta$. Consideremos el polinomio

$$p(x) = f(a) + \int_a^x Q(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Es claro, por el teorema fundamental del cálculo, que $p' = Q$. Además, dado $x \in [a,b]$ y por la regla de Barrow, se tiene que

$$\begin{aligned}|f(x) - p(x)| &= \Big|f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt - \big(f(a) + \int_a^x Q(t)\,dt\big)\Big| \leq \int_a^x |f'(t) - Q(t)|\,dt \\ &\leq (b-a)\|f' - Q\|_\infty,\end{aligned}$$

con lo que $\|f - p\|_\infty \leq (b-a)\|f' - Q\|_\infty < (b-a)\delta$. Basta tomar δ tal que $\max\{1, b-a\} \cdot \delta = \varepsilon$ para concluir.

4. Sean X, Y y Z espacios de Banach, A_1 una aplicación lineal y continua de X en Z, y A_2 una aplicación lineal y continua de Y en Z. Supongamos que para cada $x \in X$ la ecuación $A_1(x) = A_2(y)$ tiene una única solución $y \in Y$, y pongamos $y = A(x)$. Demostrar que A es una aplicación lineal y continua de X en Y. (1,5 puntos)

   Solución: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x_1, x_2 \in X$, siendo $y_1 = A(x_1)$, $y_2 = A(x_2)$. Entonces, $A_1(x_1) = A_2(y_1)$ y $A_1(x_2) = A_2(y_2)$, luego, como A_1 y A_2 son lineales,

   $$A_1(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A_1(x_1) + \beta A_1(x_2) = \alpha A_2(y_1) + \beta A_2(y_2) = A_2(\alpha y_1 + \beta y_2).$$

   Por definición del operador A, se tiene que

   $$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2),$$

   con lo que A es lineal. Veamos ahora que su grafo es cerrado: sea $\{(x_n, A(x_n))\}_{n=1}^\infty$ una sucesión convergente en $X \times Y$ hacia (x,y), y probaremos que $A(x) = y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_1(x_n) = A_2(A(x_n))$. Por ser A_1 y A_2 continuas, $\{A_1(x_n)\}_{n=1}^\infty$ converge hacia $A_1(x)$, y $\{A_2(A(x_n))\}_{n=1}^\infty$ converge hacia $A_2(y)$, luego de la unicidad del límite se deduce que $A_1(x) = A_2(y)$, y por lo tanto $A(x) = y$. El teorema del grafo cerrado garantiza que A es continua.

5. Sea H un espacio de Hilbert. Probar que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a x si, y sólo si, $\{<x_n, y>\}_{n=1}^\infty$ converge hacia $<x, y>$ uniformemente en $\{y \in H : \|y\| = 1\}$. (1,5 puntos)

   Solución: Puesto que para todo $y \in H$ con $\|y\| = 1$ se tiene, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que

   $$|<x_n, y> - <x, y>| = |<x_n - x, y>| \leq \|x_n - x\|\|y\| = \|x_n - x\|,$$

   es obvio que si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a x, entonces $\{<x_n, y>\}_{n=1}^\infty$ converge hacia $<x, y>$ uniformemente en $\{y \in H : \|y\| = 1\}$. Recíprocamente, recordamos que, como consecuencia del teorema de Hahn-Banach, se sabe que para cada $n \in \mathbb{N}$,

   $$\|x_n - x\| = \sup\{|\varphi(x_n - x)| : \varphi \in H',\ \|\varphi\| = 1\}.$$

   Ahora bien, por el teorema de representación de Riesz los elementos $\varphi \in H'$ con $\|\varphi\| = 1$ están en biyección con los elementos $y \in H$ con $\|y\| = 1$, mediante la representación $\varphi(x) = <x, y>$, de modo que se puede escribir

   $$\|x_n - x\| = \sup\{|<x_n - x, y>| : y \in H,\ \|y\| = 1\}.$$

   De aquí se concluye inmediatamente.

6. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $A\colon H \to H$ un operador lineal, continuo y autoadjunto. Se consideran los operadores D_1 y D_2 definidos por

$$D_1 x = Ax + ix, \quad D_2 x = Ax - ix, \quad x \in H.$$

(a) Calcular $||D_j x||^2$, $j = 1, 2$, y deducir que D_1 y D_2 son inyectivos. (0,5 puntos)

(b) Probar que si $z \in H$ es ortogonal al rango de D_1, entonces $z = 0$. Deducir que el rango de D_1 es denso en H. Proceder de forma análoga para D_2. (1 punto)

(c) Utilizando lo obtenido en (a), probar que el rango de D_1 es cerrado, y concluir que D_1 es sobre (el resultado análogo para D_2 no ha de probarse). (0,5 puntos)

(d) Demostrar que D_1^{-1} es continuo. (0,5 puntos)

Solución:

(a) Para cada $x \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||D_1 x||^2 &= <Ax + ix, Ax + ix> \\ &= <Ax, Ax> - i <Ax, x> + i <x, Ax> - i^2 <x,x> = \|Ax\|^2 + \|x\|^2, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que, por ser A autoadjunto, $<Ax, x>=<x, Ax>$. Si $D_1 x = 0$ se deduce que $\|Ax\|^2 + \|x\|^2 = 0$, luego $\|x\|^2 = 0$ y $x = 0$, con lo que D_1 es inyectiva. El razonamiento para D_2 es completamente análogo.

(b) Si $z \in H$ es ortogonal al rango (o imagen) de D_1, para cada $x \in H$ se tiene que $<Ax + ix, z>= 0$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} <Ax + ix, z> &= <Ax, z> + i <x, z>=<x, Az> + <x, -iz> \\ &= <x, Az - iz>=<x, D_2 z>, \end{aligned}$$

de donde $D_2 z$ es ortogonal a todo H, y ha de ser 0. Como D_2 es inyectivo, se concluye que $z = 0$. Un resultado teórico indica que el biortogonal del subespacio imagen de D_1 es su adherencia, y será

$$D_1(H)^{\perp\perp} = (D_1(H)^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H,$$

de modo que el rango de D_1 es denso en H. Análogamente, si $z \in H$ es ortogonal al rango (o imagen) de D_2, se prueba que $D_1 z$ es ortogonal a todo H, y ha de ser 0. Como D_1 es inyectivo, se concluye que $z = 0$. El razonamiento restante es idéntico al anterior.

(c) Si y es adherente al rango de D_1, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en H tal que $\lim_{n\to\infty} D_1 x_n = y$. En particular, $\{D_1 x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y como, en virtud de (a),

$$||D_1 x_n - D_1 x_m||^2 = ||D_1(x_n - x_m)||^2 = \|A(x_n - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2,$$

es claro que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es de Cauchy, y por ser H completo convergerá hacia un $x \in H$. Entonces es claro que $D_1 x = \lim_{n\to\infty} D_1 x_n = y$, con lo que $y \in D_1(H)$ y $D_1(H)$ es cerrado. Por ser denso, ha de coincidir con H, y D_1 es sobre.

(d) La continuidad de D_1^{-1} es consecuencia directa del teorema del isomorfismo, pues D_1 es una aplicación lineal, continua y biyectiva entre espacios de Banach.

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

4º curso, Grado en Matemáticas y

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Examen extraordinario (1 de febrero de 2018)

Tiempo: de 9:00 a 13:00 horas

Instrucciones: Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$ biyectiva. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en E con $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| = \infty$. (1,5 puntos)

2. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Probar que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a ℓ^2. (1,5 puntos)

3. Sea E un espacio de Banach y $T : E \to E$ una aplicación lineal. Supongamos que para todo $f \in E'$ y toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E tales que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} f(T(x_n)) = 0$. Probar que T es continuo. (1,5 puntos)

4. Demostrar que si X es un espacio topológico compacto y existe una aplicación $f \colon X \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva, entonces $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ es separable. (1,5 puntos)

5. Sea E un espacio normado, M un subespacio cerrado y A un subconjunto de M. Se dice que A es *total* en M si M es el menor subespacio cerrado que contiene a A.

   Probar que A es total en M si y sólo si todo $f \in E'$ que se anule en A se anula también en M. (1,5 puntos)

6. Si M es el subespacio de $L^2([0,1], \mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que uno y $f(x) = x^2$, hallar $P_M f$, $P_{M^\perp} f$ y $\mathrm{dist}(M, f)$. (1 punto)

7. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$.

   (i) Probar que $\mathrm{Ker}(T) = (T^*(H))^\perp$. (1 punto)

   (ii) Deducir que T es inyectiva si y sólo si $T^*(H)$ es denso en H. (0,5 puntos)

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

Soluciones del examen extraordinario del 1 de febrero de 2018

1. Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$ biyectiva. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en E con $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| = \infty$. (1,5 puntos)

   Solución: Por el teorema de la aplicación abierta, T es un isomorfismo topológico (es decir, su inversa es continua), y existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in E$. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en E con $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$, dado $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ se tiene que $\|x_n\| \geq M/C$, y entonces $\|Tx_n\| \geq CM/C = M$ para cada $n \geq n_0$, con lo que $\lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| = \infty$.

2. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Probar que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a ℓ^2. (1,5 puntos)

   Solución: Para cada $N \in \mathbb{N}$ se define el operador $T_N : \ell^2 \to \mathbb{K}$ dado por
$$T_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n, \qquad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2.$$
   Es claro que T_N es lineal y continuo, y es sencillo comprobar que $\|T_N\| = (\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2)^{1/2}$. Puesto que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge para cada sucesión $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, existe $\lim_{N\to\infty} T_N(x)$ para todo $x \in \ell^2$, y por el corolario 4.1.8 del teorema de Banach-Steinhaus, se deduce que $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|T_N\| < \infty$, es decir, $(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2)^{1/2} < \infty$, lo que significa precisamente que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a ℓ^2.

3. Sea E un espacio de Banach y $T : E \to E$ una aplicación lineal. Supongamos que para todo $f \in E'$ y toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E tales que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} f(T(x_n)) = 0$. Probar que T es continuo. (1,5 puntos)

   Solución: Basta aplicar el teorema del grafo cerrado, que garantiza que una aplicación lineal entre espacios de Banach cuyo grafo sea cerrado será continua. Partimos de una sucesión de pares $\{(x_n, Tx_n)\}_{n=1}^{\infty}$ pertenecientes al grafo que converge hacia un punto (x, y), y se trata de probar que $y = Tx$. La sucesión $\{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de E converge hacia 0, por lo que para todo $f \in E'$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n - x) = 0$. Por hipótesis, se tiene entonces que $\lim_{n\to\infty} f(T(x_n - x)) = 0$, es decir, por la linealidad de T y de f,
$$\lim_{n\to\infty} (f(Tx_n) - f(Tx)) = 0. \tag{1}$$
   Ahora bien, como $Tx_n \to y$ cuando $n \to \infty$, la continuidad de f implica que $f(Tx_n) \to f(y)$ cuando $n \to \infty$, y de (1) se deduce que $f(y) = f(Tx)$ para todo $f \in E'$. Una consecuencia del teorema de Hahn-Banach garantiza entonces que $y = Tx$, como queríamos.

4. Demostrar que si X es un espacio topológico compacto y existe una aplicación $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva, entonces $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ es separable. (1,5 puntos)

   Solución: Consideramos el subespacio vectorial A de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ generado por las funciones $\{1, f, f^2, \ldots, f^n, \ldots\}$. Es claro que A es un álgebra que contiene a la función idénticamente igual a 1 y que separa puntos, por ser f inyectiva. Entonces, por el teorema de Stone A

es densa en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Ahora bien, cualquier elemento de A (combinación lineal finita de potencias de f) se puede aproximar arbitrariamente por una combinación similar pero con coeficientes racionales, y el conjunto de dichas combinaciones formará entonces un conjunto numerable (por serlo $\mathbb{Q}$) y denso en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ (por ser denso en el denso A), con lo que $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es separable.

5. Sea E un espacio normado, M un subespacio cerrado y A un subconjunto de M. Se dice que A es *total* en M si M es el menor subespacio cerrado que contiene a A.

   Probar que A es total en M si y sólo si todo $f \in E'$ que se anule en A se anula también en M. (1,5 puntos)

   Solución: Si A es total en M y $f \in E'$ se anula en A, por linealidad se anulará también en el subespacio generado por A, denotado por $\langle A \rangle$, y por continuidad se anulará a su vez en la adherencia de $\langle A \rangle$, que es el menor subespacio cerrado que contiene a A, y por lo tanto coincide con M.

   Por otra parte, si A no es total en M, existirá $x \in M \setminus \overline{\langle A \rangle}$. Una consecuencia del teorema de Hahn-Banach permite construir un elemento $f \in E'$ tal que $f|_{\overline{\langle A \rangle}} \equiv 0$ pero $f(x) \neq 0$, con lo que f no se anula idénticamente en M a pesar de anularse idénticamente en A.

6. Si M es el subespacio de $L^2([0,1],\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que uno y $f(x) = x^2$, hallar $P_M f$, $P_{M^\perp} f$ y $\operatorname{dist}(M, f)$. (1 punto)

   Solución: No se detallarán todos los cálculos, pero se indicará el procedimiento. En lo que sigue, el producto interno y la norma son las habituales en $L^2([0,1],\mathbb{R})$.

   La base $\{1, x\}$ de M se debe ortonormalizar a una base $\{1, P_1(x)\}$, donde

$$P_1(x) = \frac{x - \langle x, 1 \rangle \cdot 1}{\|x - \langle x, 1 \rangle \cdot 1\|_2}.$$

   Entonces,

$$P_M(x^2) = \langle x^2, 1 \rangle \cdot 1 + \langle x^2, P_1(x) \rangle \cdot P_1(x),$$

   y

$$P_{M^\perp}(x^2) = x^2 - P_M(x^2), \qquad \operatorname{dist}(M, f) = \|P_{M^\perp}(x^2)\|_2.$$

7. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$.

   (i) Probar que $\operatorname{Ker}(T) = (T^*(H))^\perp$. (1 punto)

   (ii) Deducir que T es inyectiva si y sólo si $T^*(H)$ es denso en H. (0,5 puntos)

   Solución:

   (a) $x \in \operatorname{Ker}(T) \iff Tx = 0 \iff \langle Tx, y \rangle = 0$ para todo $y \in H \iff$ por definición del operador adjunto, $\langle x, T^* y \rangle = 0$ para todo $y \in H \iff x \in (T^*(H))^\perp$.

   (b) T es inyectiva $\iff \operatorname{Ker}(T) = \{0\} \iff$ por el apartado previo, $(T^*(H))^\perp = \{0\} \iff T^*(H)$ es denso en H (por un resultado teórico).

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

4º curso, Grado en Matemáticas

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Programa Conjunto Matemáticas–Física

Prueba de evaluación continua (14 de noviembre de 2018)

Tiempo: de 13:00 a 15:00 horas

Instrucciones: Escriba con tinta.
Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja.
La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Sea E un espacio normado, y A un subconjunto suyo. Se define el diámetro de A como

$$\operatorname{diam} A := \sup_{x,y\in A} \|x-y\|.$$

(i) Probar que A es acotado si y sólo si $\operatorname{diam} A < \infty$. (1 punto)

(ii) Probar que si A es acotado, también lo es $\overline{A}$, y además $\operatorname{diam}\overline{A} = \operatorname{diam} A$. (1 punto)

2. Se consideran los conjuntos

$$L = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^2 \quad \text{y} \quad M = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^1.$$

Indicar si cada uno de ellos es hiperplano cerrado o no. (2 puntos)

3. Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{L}(E,F)$. Se supone que existe una bola $B(x_0,r)$ de E de modo que para todo $x \in B(x_0,r)$ y para todo $f \in F'$ la sucesión $\{f(T_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Probar que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathcal{L}(E,F)$. (3 puntos)

4. Sean E un espacio de Banach, y L y M subespacios cerrados de E de modo que $E = L \oplus M$ (suma directa de L y M). Si $x \in E$ se escribe como $x = u + v$, con $u \in L,\ v \in M$, se define el operador $P : E \to L$ dado por $Px = u$, $x \in E$ (denominado la proyección sobre L en la dirección paralela a M). Probar que P es un operador lineal y continuo.

(3 puntos)

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

Soluciones de la prueba de evaluación de 14 de noviembre de 2018

1. Sea E un espacio normado, y A un subconjunto suyo. Se define el diámetro de A como

$$\mathrm{diam}A := \sup_{x,y\in A} \|x-y\|.$$

(i) Probar que A es acotado si y sólo si $\mathrm{diam}A < \infty$. (1 punto)

(ii) Probar que si A es acotado, también lo es $\overline{A}$, y además $\mathrm{diam}\overline{A} = \mathrm{diam}A$. (1 punto)

Solución: (i) Supondremos siempre que A es no vacío. Si A es acotado, por definición está contenido en una bola $B(x_0, r)$ en E, y por lo tanto, para todos $x, y \in A$ se tiene que

$$\|x-y\| \leq \|x-x_0\| + \|x_0-y\| < r + r = 2r.$$

Entonces, es claro que $\mathrm{diam}A \leq 2r < \infty$.

Recíprocamente, si $\mathrm{diam}A < \infty$ y tomamos un punto arbitrario x_0 de A, para cualquier otro punto x de A se tiene que $\|x-x_0\| \leq \mathrm{diam}A$, luego $A \subset \overline{B}(x_0, \mathrm{diam}A)$ y A es acotado.

(ii) Por la definición de diámetro, es claro que si $A \subset B$ entonces $\mathrm{diam}A \leq \mathrm{diam}B$. Por lo tanto, siempre se tiene que $\mathrm{diam}A \leq \mathrm{diam}\overline{A}$. Veamos que si A es acotado se tiene la desigualdad contraria, con lo que se tendrá la igualdad de diámetros y también $\overline{A}$ será acotado según el apartado previo. Dados $\varepsilon > 0$ y $x, y \in \overline{A}$, existen $x', y' \in A$ tales que $\|x-x'\| < \varepsilon$ y $\|y-y'\| < \varepsilon$, luego

$$\|x-y\| \leq \|x-x'\| + \|x'-y'\| + \|y-y'\| \leq \varepsilon + \mathrm{diam}A + \varepsilon.$$

Se deduce entonces que $\mathrm{diam}\overline{A} \leq \mathrm{diam}A + 2\varepsilon$ y, siendo ε arbitrario, se concluye que $\mathrm{diam}\overline{A} \leq \mathrm{diam}A$.

Por supuesto, se pueden dar otros razonamientos para algunas afirmaciones, por ejemplo, la acotación de $\overline{A}$ se deduce de la de A como sigue: existen $x_0 \in E$ y $r > 0$ tales que $A \subset \overline{B}(x_0, r)$, y entonces $\overline{A} \subset \overline{\overline{B}(x_0, r)} = \overline{B}(x_0, r)$, con lo que $\overline{A}$ es acotado.

2. Se consideran los conjuntos

$$L = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^2 \quad \text{y} \quad M = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^1.$$

Indicar si cada uno de ellos es hiperplano cerrado o no. (2 puntos)

Solución: Sabemos que el dual de ℓ^1 es ℓ^∞, y que la identificación de ambos espacios se hace a través de la aplicación que a cada $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ le asigna el funcional $\varphi_a : \ell^1 \to \mathbb{K}$ dado por $\varphi_a(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Por lo tanto, si elegimos la sucesión a constantemente igual a 1 (que es acotada), M es precisamente el núcleo del funcional lineal y continuo φ_a, y sabemos que entonces es un hiperplano cerrado.

En el caso de L, la situación es radicalmente distinta, pues el dual de ℓ^2 es ℓ^2, pero $a \notin \ell^2$. Es inmediato probar que L es un subespacio vectorial de ℓ^2, pero veremos que no es hiperplano ni es cerrado (solo hay que probar una de las dos afirmaciones para concluir). Para la primera afirmación, basta encontrar dos vectores linealmente independientes en

ℓ^2/L, por ejemplo las clases de las sucesiones $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{1/n^{3/2}\}_{n=1}^{\infty}$ de ℓ^2. En cuanto a la segunda, la sucesión $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ claramente no pertenece a L pero sí es adherente a L, pues la sucesión $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $a^n = \{a_j^n\}_{j=1}^{\infty}$, siendo

$$a_1^n = 1; \quad a_j^n = -\frac{1}{n},\ j = 2, \dots, n+1; \quad a_j^n = 0,\ j \geq n+2,$$

es claramente de elementos de ℓ^2 (de hecho, pertenecen a c_{00}) y de L, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n = 0$, y además

$$\|e_1 - a^n\|_2^2 = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Otra forma de hacer el estudio para L es por reducción al absurdo. Si L fuera un hiperplano cerrado de ℓ^2, existiría $\varphi \in (\ell^2)'$ tal que

$$L = \ker(\varphi). \tag{1}$$

Sabemos que $(\ell^2)' \simeq \ell^2$, de modo que existe $a \in \ell^2$ con $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Ahora bien, si denotamos por e_n la sucesión que tiene todos sus términos nulos salvo un 1 en la posición n-ésima, es claro que $e_n - e_1 \in L$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego, de acuerdo con (1), ha de ser $\varphi(e_n - e_1) = 0$, de donde se deduce que $a_n = a_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión a es constante. Dado que $a \in \ell^2$, sólo puede ser que $a = 0$, pero entonces $\varphi \equiv 0$ y $L = \ker(\varphi) = \ell^2$, lo que claramente es falso.

Obsérvese que no tiene sentido definir el operador $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ para todo $x \in \ell^2$, pues la serie anterior puede no ser convergente.

3. Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{L}(E, F)$. Se supone que existe una bola $B(x_0, r)$ de E de modo que para todo $x \in B(x_0, r)$ y para todo $f \in F'$ la sucesión $\{f(T_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Probar que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathcal{L}(E, F)$. (3 puntos)

   Solución: Por hipótesis, para cada $x \in B(x_0, r)$ se tiene que la órbita de x por la familia $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, el conjunto $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, es débilmente acotada en F, y sabemos que (como consecuencia del teorema de Banach-Steinhaus) esto equivale a que dichas órbitas son conjuntos acotados. De aquí se deduce que el conjunto de los puntos de E con órbitas no acotadas no es denso en E (pues no corta a una bola concreta), y esto excluye la segunda alternativa del teorema de Banach-Steinhaus, válido por ser E completo. En conclusión, ha de verificarse la primera alternativa, que afirma que la familia de operadores $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ admite una cota común en $\mathcal{L}(E, F)$, como queríamos.

   Otra forma de concluir, una vez que se sabe que las órbitas son acotadas para los x de la bola $B(x_0, r)$, es deducir que lo son para cualquier $x \in E$, y aplicar de nuevo el teorema de Banach-Steinhaus.

4. Sean E un espacio de Banach, y L y M subespacios cerrados de E de modo que $E = L \oplus M$ (suma directa de L y M). Si $x \in E$ se escribe como $x = u + v$, con $u \in L,\ v \in M$, se define el operador $P : E \to L$ dado por $Px = u$, $x \in E$ (denominado la proyección sobre L en la dirección paralela a M). Probar que P es un operador lineal y continuo.

   (3 puntos)

Solución: Veamos primero la linealidad. Sean $x = u_1 + v_1$ e $y = u_2 + v_2$, con $u_i \in L$, $v_i \in M$, $i = 1, 2$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha v_1 + \beta v_2),$$

donde $\alpha u_1 + \beta u_2 \in L$ y $\alpha v_1 + \beta v_2 \in M$ por ser ambos subespacios. Puesto que la escisión es única (por ser la suma de L y M directa), sabemos que

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha Px + \beta Py.$$

Dado que E es completo y L es cerrado en E, L es completo, y la aplicación $P : E \to L$ es lineal entre espacios de Banach. Si probamos que su grafo es cerrado, el teorema del grafo cerrado garantizará que es continua, con lo que se concluye. Sea $(x, u) \in \overline{G(P)}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en E de modo que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in E$ y $Px_n \xrightarrow{n\to\infty} u \in L$. Si ponemos $x_n = u_n + v_n$, con $u_n \in L$, $v_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, es claro que

$$v_n = x_n - u_n = x_n - Px_n \xrightarrow{n\to\infty} x - u.$$

Por ser M cerrado, se deduce que $x - u \in M$, y entonces la escisión de x en $L \oplus M$ es $u + (x - u)$, de modo que $Px = u$ y el grafo es efectivamente cerrado.

Conviene notar que el grafo de P no es $E \times L$, aunque P sea sobreyectiva: el grafo de P contiene, para cada $x \in E$, un único elemento de la forma (x, u) con $u \in L$, precisamente el par (x, Px).

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

4º curso, Grado en Matemáticas

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Programa Conjunto Matemáticas–Física

Examen final (18 de enero de 2019)

Tiempo: de 9:00 a 13:00 horas

Instrucciones: Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Se define $T : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ mediante

$$(Tf)(t) = t\int_0^t f(s)\,ds, \qquad f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

   (a) Probar que T es lineal y continuo, y calcular su norma. (0,5 puntos)

   (b) Comprobar que T es inyectivo, y que $T^{-1} : T(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ no es continuo. (1 punto)

2. Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que existe $\alpha > 0$ con $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$ para todo $x \in X$. Demostrar que si T es compacto, entonces $\dim X < \infty$. (1,5 puntos)

3. Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de un espacio normado X y $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de escalares. Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:

   (a) Existe un funcional lineal y continuo f sobre X tal que $f(x_i) = \alpha_i$ para todo $i \in I$.

   (b) Existe $M > 0$ tal que para cada familia $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de escalares con un número finito de elementos no nulos se tiene que $|\sum_{i\in I}\lambda_i\alpha_i| \leq M\|\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\|$. (1,5 puntos)

4. Probar que c_{00} es de primera categoría en sí mismo. (1 punto)

5. Sean X e Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de X que converge hacia 0 y tal que $\{T(x_n)\}_{n=1}^\infty$ converge hacia $y \in Y$, se sabe que $y = 0$. Probar que T es continua. (1,5 puntos)

6. Sea $M = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2 : x_1 = 0,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$. Se pide determinar $M^\perp$ y la proyección ortogonal sobre $M^\perp$. (1,5 puntos)

7. (a) Dada $(a_n)_{n=0}^\infty \in \ell^2$, probar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que 1. (0,5 puntos)

   (b) Probar que, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < 1$, el funcional L dado por $L((a_n)_{n=0}^\infty) = \sum_{n=0}^\infty a_n\lambda^n$ está bien definido en ℓ^2, y calcular su norma. (1 punto)

   Indicación: Utilizar el teorema de representación de Riesz.

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

Soluciones del examen de fecha 18 de enero de 2019

1. Se define $T : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ mediante

$$(Tf)(t) = t\int_0^t f(s)\,ds, \qquad f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

   (a) Probar que T es lineal y continuo, y calcular su norma. (0,5 puntos)

   (b) Comprobar que T es inyectivo, y que $T^{-1} : T(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ no es continuo. (1 punto)

Solución:

   (a) El operador está bien definido, de hecho, por el teorema fundamental del cálculo integral se tiene que Tf es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[0,1]$ para cada $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. La linealidad de T es consecuencia de la linealidad de la integral y la propiedad distributiva del producto de funciones respecto de la suma. Veamos que T es acotado: si $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ y $t \in [0,1]$,

$$|Tf(t)| \le t\int_0^1 |f(t)|\,dt \le t\int_0^1 \|f\|_\infty\,dt \le \|f\|_\infty,$$

   con lo que $\|Tf\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |Tf(t)| \le \|f\|_\infty$. Deducimos que T es continuo y que $\|T\| \le 1$. Ahora bien, si escogemos la función f_0 idénticamente igual a 1, es obvio que $\|f_0\|_\infty = 1$ y es inmediato comprobar que $Tf_0(t) = t^2$ para todo $t \in [0,1]$, con lo que $\|Tf_0\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^2| = 1 = \|f_0\|_\infty$, y se concluye que $\|T\| = 1$.

   (b) Si $Tf = 0$ para una función f, es claro que ha de ser $\int_0^t f(s)\,ds = 0$ para todo $t \in (0,1]$. Entonces, la función $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $G(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, será idénticamente nula (obsérvese que es continua en $[0,1]$), y lo será también su derivada, que por el teorema fundamental del cálculo es $G'(t) = f(t)$. Por lo tanto, T es inyectivo. Para probar que su inversa no es continua, escogemos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ dadas por $f_n(t) = nt^{n-1}$, $t \in [0,1]$. Es claro que $\|f_n\|_\infty = n$ y que $Tf_n(t) = t^{n+1}$, $t \in [0,1]$, de modo que $\|Tf_n\|_\infty = 1$. Así,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|T^{-1}(Tf_n)\|_\infty}{\|Tf_n\|_\infty} = \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty}{\|Tf_n\|_\infty} = \infty,$$

   con lo que T^{-1} no es acotado.

2. Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que existe $\alpha > 0$ con $\|T(x)\| \ge \alpha\|x\|$ para todo $x \in X$. Demostrar que si T es compacto, entonces $\dim X < \infty$. (1,5 puntos)

Solución: Se deduce de la desigualdad dada que T es inyectivo (si $Tx = 0$ para un vector x, entonces $\alpha\|x\| \le 0$, luego $\|x\| = 0$ y $x = 0$) y que T^{-1}, que existe, es también continua. Por lo tanto, $T : X \to T(X)$ es lineal, bicontinua y biyectiva, luego es un isomorfismo topológico (y $T(X)$ es un espacio de Banach). Los isomorfismos conservan cerrados y compactos, luego $T(\overline{B}(0,1))$, que es relativamente compacto por ser T compacto, es también cerrado, con lo que $T(\overline{B}(0,1))$ es de hecho compacto. Entonces, $T^{-1}(T(\overline{B}(0,1))) = \overline{B}(0,1)$ es compacta, y el teorema de Riesz asegura que $\dim X < \infty$.

También se podía razonar comprobando, de forma similar, que todo cerrado y acotado de X es compacto.

3. Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de un espacio normado X y $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de escalares. Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:

   (a) Existe un funcional lineal y continuo f sobre X tal que $f(x_i) = \alpha_i$ para todo $i \in I$.

   (b) Existe $M > 0$ tal que para cada familia $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de escalares con un número finito de elementos no nulos se tiene que $|\sum_{i\in I} \lambda_i \alpha_i| \leq M \| \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \|$. (1,5 puntos)

Solución: (a) $\Longrightarrow$ (b) Sea f como en (a). Para cada familia $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de escalares con un número finito de elementos no nulos, $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ es una combinación lineal finita, y la linealidad de f implica que

$$f\big(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\big) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i \alpha_i.$$

Entonces, como f es continua, se tiene que

$$|\sum_{i\in I} \lambda_i \alpha_i| = \|f(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i)\| \leq \|f\| \cdot \| \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\|,$$

como se quería.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Sea M el subespacio de X generado por la familia $\{x_i\}_{i\in I}$. Definimos $f_0 : M \to \mathbb{K}$ mediante la elección necesaria de las imágenes de los x_i, es decir, $f_0(x_i) = \alpha_i$ para todo $i \in I$, y la extendemos a M por linealidad. Esta definición es correcta si el sistema $\{x_i\}_{i\in I}$ fuera libre en X, lo que no está garantizado. Probaremos que la desigualdad en (b) asegura que esta construcción es posible en todo caso (en otras palabras, que no hay ambigüedad en la definición): si existieran un subconjunto finito J de I y un elemento $i_0 \in I \setminus J$ de modo que $x_{i_0} = \sum_{j\in J} \mu_j x_j$ para ciertos escalares μ_j, podemos aplicar la desigualdad (b) a la familia de escalares

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0; \\ -\mu_i & \text{si } i \in J; \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de donde se obtiene que

$$|\sum_{i\in I} \lambda_i \alpha_i| = |\alpha_{i_0} - \sum_{j\in J} \mu_j \alpha_j| \leq M\|x_{i_0} - \sum_{j\in J} \mu_j x_j\| = M \cdot 0 = 0.$$

Entonces, deducimos que $\alpha_{i_0} = \sum_{j\in J} \mu_j \alpha_j$ o, de otro modo, $f_0(x_{i_0}) = \sum_{j\in J} \mu_j f_0(x_j)$. Por lo tanto, la definición de f_0 como aplicación lineal es coherente. Además, f_0 es continua en virtud de la misma desigualdad: dado $x \in M$, existe una familia $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de escalares con un número finito de elementos no nulos de modo que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, y entonces la linealidad de f_0 permite escribir

$$|f_0(x)| = \big|\sum_{i\in I} \lambda_i \alpha_i\big| \leq M \cdot \| \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\| = M\|x\|.$$

Para concluir, basta aplicar el teorema de Hahn-Banach (en una de sus versiones) y extender f_0 a todo X, obteniendo el funcional f lineal y continuo en X pedido en (a).

4. Probar que c_{00} es de primera categoría en sí mismo. (1 punto)

   Solución: Sea e_n la sucesión con todos los términos nulos salvo un 1 en la posición n-ésima. Es inmediato que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base vectorial de c_{00} y es numerable. Un problema resuelto en clase establece que en este caso el espacio siempre es de primera categoría en sí mismo. La razón es que, para cada $n \in \mathbb{N}$, los subespacios $A_n = \langle\{e_1, \ldots, e_n\}\rangle$ son de dimensión finita, luego cerrados, y propios en c_{00}, luego su interior es vacío (problema 5 de la lista de clase). Entonces, A_n es raro ($\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \overset{\circ}{A_n} = \emptyset$), y resulta que c_{00} es unión numerable de raros, $c_{00} = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

5. Sean X e Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X que converge hacia 0 y tal que $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $y \in Y$, se sabe que $y = 0$. Probar que T es continua. (1,5 puntos)

   Solución: Si vemos que el grafo de T, $G(T)$, es cerrado, el correspondiente teorema garantizará que T, siendo lineal entre espacios de Banach, es continua. Sea $(x, y) \in \overline{G(T)}$. Existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\{(x_n, T(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia (x, y). Entonces, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia x y $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia y. Por lo tanto, $\{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 y $T(x_n - x) = T(x_n) - T(x) \xrightarrow{n\to\infty} y - T(x)$. De acuerdo con la hipótesis del problema, podemos asegurar que $y - T(x) = 0$, es decir, $y = T(x)$, con lo que $(x, y) = (x, T(x))$ pertenece al grafo y este es cerrado.

6. Sea $M = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 : x_1 = 0,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$. Se pide determinar $M^{\perp}$ y la proyección ortogonal sobre $M^{\perp}$. (1,5 puntos)

   Solución: Sea e_n la sucesión con todos los términos nulos salvo un 1 en la posición n-ésima. Las condiciones que definen el conjunto M son, equivalentemente, $x_1 = 0,\ x_2+x_3 = 0,\ x_3 + x_4 = 0$, que se pueden escribir como

$$\langle x, e_1\rangle = 0, \quad \langle x, e_2 + e_3\rangle = 0, \quad \langle x, e_3 + e_4\rangle = 0.$$

   Esto equivale a que x sea ortogonal al subespacio L generado por esos tres vectores, es decir, $M =< \{e_1, e_2 + e_3, e_3 + e_4\} >^{\perp} = L^{\perp}$, subespacio cerrado de ℓ^2 (por ser un ortogonal). Como L es cerrado por ser de dimensión finita, se tiene que $M^{\perp} = L^{\perp\perp} = L$, y la proyección sobre L es inmediata en cuanto tengamos una base ortonormal de L, $\{u_1, u_2, u_3\}$, que resultará de aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto libre $\{e_1, e_2 + e_3, e_3 + e_4\}$:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|} = e - 1;\\
v_2 &= e_2 + e_3 - \langle e_2 + e_3, u_1\rangle u_1 = e_2 + e_3,\\
u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{e_2 + e_3}{\|e_2 + e_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3);\\
v_3 &= e_3 + e_4 - \langle e_3 + e_4, u_1\rangle u_1 - \langle e_3 + e_4, u_2\rangle u_2 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 + e_4,\\
u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} v_3.
\end{aligned}$$

   Entonces,

$$P_{M^{\perp}} x = \langle x, u_1\rangle u_1 + \langle x, u_2\rangle u_2 + \langle x, u_3\rangle u_3, \qquad x \in \ell^2.$$

7. (a) Dada $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$, probar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que 1. (0,5 puntos)

   (b) Probar que, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < 1$, el funcional L dado por $L((a_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ está bien definido en ℓ^2, y calcular su norma. (1 punto)

   Indicación: Utilizar el teorema de representación de Riesz.

Solución:

(a) Por la definición de radio de convergencia, basta probar que la serie de potencias converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$. Este hecho se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |z^n|^2\Big)^{1/2},$$

y las dos series a la derecha convergen, la primera porque $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ y la segunda porque es una serie geométrica de razón $|z|^2 < 1$.

(b) L está bien definido por el apartado anterior, pues su valor en $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ es el de la serie de potencias con coeficientes dados por esa sucesión en el punto $\lambda \in B(0,1)$. Además, la linealidad de L es inmediata. De hecho, si se define la sucesión $\mu = (\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ como $\mu_n = \overline{\lambda}^{\,n}$, $n \geq 0$, se tiene que

$$\|\mu\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\lambda}^{\,n}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda|^2)^n = \frac{1}{1 - |\lambda|^2} < \infty,$$

de modo que $\mu \in \ell^2$, y se puede escribir

$$L((a_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{\overline{\lambda}^{\,n}} = \langle (a_n)_{n=0}^{\infty}, (\mu_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \langle (a_n)_{n=0}^{\infty}, \mu \rangle.$$

Entonces, L es el funcional asociado a μ por el teorema de representación de Riesz, que proporciona la igualdad $\|L\| = \|\mu\|_2 = 1/(1 - |\lambda|^2)^{1/2}$.

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

4º curso, Grado en Matemáticas

Programa Conjunto Matemáticas–Ing. Informática de Servicios y Aplicaciones

Programa Conjunto Matemáticas–Física

Examen extraordinario (31 de enero de 2019)

Tiempo: de 16:00 a 19:30 horas

Instrucciones: Los **APELLIDOS y nombre, en este orden**, del alumno/a deben figurar en cada hoja. La puntuación de cada pregunta sobre 10 aparece a la derecha entre paréntesis.

1. Se define $T : \ell^1 \to c_0$ como
$$T((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \sum_{j=2}^{\infty} x_j, \sum_{j=3}^{\infty} x_j, \dots, \sum_{j=n}^{\infty} x_j, \dots\Big).$$
   (a) Probar que T está bien definido y es lineal y continuo, y calcular su norma. (1 punto)

   (b) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de T. (1,25 puntos)

2. Sean a, b números reales positivos, y sea x un vector del espacio normado X tal que para cada $f \in X'$ con $\|f\| \le b$ se tiene que $|f(x)| \le a$. Probar que $\|x\| \le a/b$. (1,25 puntos)

3. Sea K un espacio topológico compacto y $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ un operador lineal tal que para los puntos x de un conjunto D denso en K, la aplicación $T_x : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{K}$ dada por $T_x(f) = (Tf)(x)$ es continua. Probar que T es un operador continuo. (2 puntos)

4. Sean $a < b < c$ tres números reales y sea $\mathcal{P}$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales con la norma
$$\|P\| := \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|, \quad P \in \mathcal{P}.$$
   Estudiar si el funcional lineal $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ dado por $f(P) = P(c)$, $P \in \mathcal{P}$, es continuo. (1,5 puntos)

   ¿Es f continuo cuando se le restringe al espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2019? (0,5 puntos)

5. Sea
$$M = \{f \in L^2[0,1] : \int_0^1 f(t)\,dt = 0,\ \int_0^1 tf(t)\,dt = 0\}.$$
   Determinar la proyección ortogonal sobre M. (1,5 puntos)

6. Probar que el subespacio de ℓ^2 generado por los vectores $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ es denso en ℓ^2, siendo
$$x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ veces}}, -1, 0, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \text{(1 punto)}$$

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

Soluciones del examen de fecha 31 de enero de 2019

1. Se define $T : \ell^1 \to c_0$ como

$$T((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \sum_{j=2}^{\infty} x_j, \sum_{j=3}^{\infty} x_j, \dots, \sum_{j=n}^{\infty} x_j, \dots \Big).$$

   (a) Probar que T está bien definido y es lineal y continuo, y calcular su norma. (1 punto)

   (b) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de T. (1,25 puntos)

   Solución:

   (a) El operador está bien definido porque, para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es (absolutamente) convergente, y la sucesión de sus restos, que es precisamente $T((x_n)_{n=1}^{\infty})$, tiende a 0, es decir, pertenece a c_0. La linealidad de T es consecuencia de la linealidad de la suma de series convergentes. Además, T es acotado: si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$,

$$|\sum_{j=n}^{\infty} x_j| \leq \sum_{j=n}^{\infty} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|x\|_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

   con lo que $\|T(x)\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sum_{j=n}^{\infty} x_j| \leq \|x\|_1$. Se deduce que T es continuo y que $\|T\| \leq 1$. Es claro que para toda $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ de términos positivos se tiene que $\|T(x)\|_{\infty} = \|x\|_1$, con lo que $\|T\| = 1$.

   (b) Observemos que, si ponemos $T((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, es claro que $x_n = y_n - y_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $y_n = 0$ para todo n, también $x_n = 0$ para todo n, y T es inyectiva. Sin embargo, T no es sobreyectiva: consideremos la sucesión de restos de una serie convergente pero no absolutamente convergente, por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$. Dicha sucesión de restos está en c_0, pero la única candidata a ser su contraimagen por T es, de acuerdo con lo anterior, la sucesión $\{(-1)^n/n\}_{n=1}^{\infty}$, que no está en ℓ^1 pues $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n/n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, que diverge.

   Otra posibilidad para probar la no sobreyectividad es razonar por reducción al absurdo: si T fuera sobre, sería una biyección lineal y continua entre espacios de Banach, luego un isomorfismo entre ℓ^1 y c_0, por el teorema de la aplicación abierta. Pero entonces también los duales, $(\ell^1)' \simeq \ell^{\infty}$ y $(c_0)' \simeq \ell^1$, serían isomorfos, lo que no es posible: ℓ^{∞} no es separable, pero ℓ^1 sí lo es.

2. Sean a, b números reales positivos, y sea x un vector del espacio normado X tal que para cada $f \in X'$ con $\|f\| \leq b$ se tiene que $|f(x)| \leq a$. Probar que $\|x\| \leq a/b$. (1,25 puntos)

   Solución: Probaremos el contrarrecíproco. Si $\|x\| > a/b$, una consecuencia del teorema de Hahn-Banach establece que existe $f \in X'$ tal que $\|f\| = 1$ y $|f(x)| = \|x\|$. Entonces, el funcional bf pertenece a X' y $\|bf\| = b$, mientras que $|bf(x)| = b|f(x)| = b\|x\| > a$, como queríamos.

   De otro modo, se puede usar el resultado de teoría

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X',\ \|f\| \leq 1\},$$

y hacer un razonamiento directo: si $f \in X'$ y $\|f\| \leq 1$, el funcional bf verifica la hipótesis del enunciado, con lo que ha de ser $|(bf)(x)| \leq a$, es decir, $|f(x)| \leq a/b$. Entonces, de la expresión anterior para $\|x\|$ se deduce que $\|x\| \leq a/b$.

3. Sea K un espacio topológico compacto y $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ un operador lineal tal que para los puntos x de un conjunto D denso en K, la aplicación $T_x : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{K}$ dada por $T_x(f) = (Tf)(x)$ es continua. Probar que T es un operador continuo. (2 puntos)

   Solución: Sabemos que $\mathcal{C}(K)$ es un espacio de Banach con la topología de la convergencia uniforme (o, de otro modo, con la norma del supremo). Si se prueba que el grafo de T, $G(T)$, es cerrado, el teorema de ese nombre garantizará que T, siendo lineal, es continua. Sea $(f,g) \in \overline{G(T)}$, y se trata de ver que $(f,g) \in G(T)$, es decir, que $g = Tf$. Existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{C}(K)$ tal que $(f_n, Tf_n) \xrightarrow{n\to\infty} (f,g)$ en $\mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K)$, de donde $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ y $Tf_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ en $\mathcal{C}(K)$, y en particular la convergencia será puntual en ambos casos.

   Comenzamos probando que $g(x) = (Tf)(x)$ para los puntos $x \in D$. Por hipótesis, la aplicación T_x del enunciado es continua. Como $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $\mathcal{C}(K)$, se deduce que

   $$g(x) = \lim_{n\to\infty} (Tf_n)(x) = \lim_{n\to\infty} T_x(f_n) = T_x(f) = (Tf)(x).$$

   Dado que g y Tf son funciones continuas en K, su coincidencia en el denso D garantiza su igualdad en todo punto de K, con lo que se concluye.

4. Sean $a < b < c$ tres números reales y sea $\mathcal{P}$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales con la norma

   $$\|P\| := \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|, \quad P \in \mathcal{P}.$$

   Estudiar si el funcional lineal $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ dado por $f(P) = P(c)$, $P \in \mathcal{P}$, es continuo.

   (1,5 puntos)

   ¿Es f continuo cuando se le restringe al espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2019? (0,5 puntos)

   Solución: La respuesta a la segunda pregunta es inmediata, pues el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2019 es de dimensión finita, y todo funcional lineal en él es automáticamente continuo.

   En cuanto a la primera pregunta, veremos que f no es continuo, viendo que no es acotado. Una opción es razonar primero con $a = 0$, $b = 1$ y $c > 1$ y considerar los polinomios $p_n(x) = x^n$, para los que $\|p_n\| = \max_{x\in[0,1]} |x^n| = 1$ y $p_n(c) = c^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$; por lo tanto, f no es continuo en este caso. El caso general se puede tratar transformando el intervalo $[a,b]$ en el $[0,1]$ mediante la aplicación lineal $(x-a)/(b-a)$, que transforma un valor $c > b$ en el punto $(c-a)/(b-a) > 1$, y considerar los polinomios $q_n(x) = p_n((x-a)/(b-a)) = (x-a)^n/(b-a)^n$, que permiten probar la no continuidad de f en este caso.

   Otra opción es utilizar el teorema de Weierstrass. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existe una función f_n continua en $[a,c]$ tal que $f_n|_{[a,b]} \equiv 0$ y $f_n(c) = n$ (basta construirla lineal a trozos, si se desea). Tomado $\varepsilon = 1$, el teorema indicado asegura que existe un polinomio r_n tal que $\max_{x\in[a,c]} |f_n(x) - r_n(x)| < 1$, con lo que $\|r_n\| = \max_{x\in[a,b]} |r_n(x)| < 1$ y

   $$|f(r_n)| = |r_n(c)| \geq |f_n(c)| - |f_n(c) - r_n(c)| > n - 1,$$

   lo que permite probar fácilmente la no continuidad de f.

5. Sea
$$M = \{f \in L^2[0,1] : \int_0^1 f(t)\,dt = 0,\ \int_0^1 tf(t)\,dt = 0\}.$$
Determinar la proyección ortogonal sobre M. (1,5 puntos)

Solución: Si llamamos L al subespacio generado por las funciones $f_1(t) = 1$ y $f_2(t) = t$, $t \in [0,1]$, es claro que L es cerrado (por ser de dimensión 2) y que $M = L^\perp$, de modo que M es también cerrado y $M^\perp = L^{\perp\perp} = L$. Resulta entonces sencillo determinar la proyección ortogonal sobre L y utilizar que $P_M = I - P_{M^\perp} = I - P_L$. Concretamente, determinamos una base ortonormal de L, $\{u_1, u_2\}$, mediante el proceso de Gram-Schmidt:
$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{f_1(t)}{\|f_1\|} = \frac{1}{(\int_0^1 dt)^{1/2}} = 1; \\ v_2(t) &= f_2(t) - \langle f_2, u_1\rangle u_1 = t - \int_0^1 t\,dt \cdot 1 = t - \frac{1}{2}, \\ u_2(t) &= \frac{v_2(t)}{\|v_2\|} = \frac{t - 1/2}{(\int_0^1 (t-1/2)^2 dt)^{1/2}} = \sqrt{12}(t - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$
Entonces,
$$P_M f = f - P_L f = f - (\langle f, u_1\rangle u_1 + \langle f, u_2\rangle u_2), \qquad f \in L^2[0,1].$$

6. Probar que el subespacio de ℓ^2 generado por los vectores $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ es denso en ℓ^2, siendo
$$x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ veces}}, -1, 0, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$ (1 punto)

Solución: Sea L dicho subespacio. De acuerdo con un resultado de teoría, basta ver que $L^\perp = \{0\}$. Sea $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in L^\perp$, lo que equivale a que $\langle y, x_n\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,
$$\begin{aligned} \langle y, x_1\rangle &= y_1 - y_2 = 0, \\ \langle y, x_2\rangle &= y_1 + y_2 - y_3 = 0, \\ \langle y, x_3\rangle &= y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 0, \\ \vdots\quad & \quad\vdots \\ \langle y, x_n\rangle &= \sum_{j=1}^n y_j - y_{n+1} = 0, \\ \vdots\quad & \quad\vdots \end{aligned}$$
Es sencillo comprobar por inducción que para todo $n \geq 2$ se tiene que $y_n = 2^{n-2} y_1$, de modo que
$$\|y\|_2^2 = \sum_{n=1}^\infty |y_n|^2 = |y_1|^2 + |y_1|^2 \sum_{n=1}^\infty 2^{2n-4}.$$
La única posibilidad de que esta suma sea finita, y por lo tanto y pertenezca a ℓ^2, es que $y_1 = 0$, y en ese caso $y = 0$, como queríamos.